Beweis für die Nichtauflösbarkeit der Ikosaedergleichung durch Wurzelzeichen.

Von

F. KLEIN in Göttingen.

Nachdem letzthin in diesen Annalen (wie vorher im Journal für Mathematik*) von der Zurückführung der Auflösung der Gleichungen fünften Grades auf die Ikosaedergleichung erneut die Rede gewesen ist, interessiert vielleicht ein besonders anschaulicher Beweis für die Nichtauflösbarkeit der Ikosaedergleichung — und also der allgemeinen Gleichungen fünften Grades — durch Wurzelzeichen. Dieser Beweis benutzt den einfachen Umstand, daß die Wurzeln $z_1, z_2, \dots, z_{60}$ der Ikosaedergleichung als Funktionen des Ikosaederparameters Z in charakteristischer Weise verzweigt sind, nämlich so, daß von den Blättern der zugehörigen Riemannschen Fläche bei $Z = 0$ je 3, bei $Z = 1$ je 2, bei $Z = \infty$ je 5 miteinander im Zyklus zusammenhängen, andere Verzweigungen aber nicht auftreten.

Wir müssen uns zuerst den Abelschen Satz in Erinnerung rufen, daß, im Falle eine Gleichung durch Wurzelzeichen lösbar ist, man allen bei der Auflösung auftretenden Wurzelgrößen eine solche Form geben kann, daß sie rationale Funktionen der Wurzeln $z_1, \dots, z_n$ der vorgelegten Gleichung vorstellen.

Nehmen wir nun an, daß die Ikosaedergleichung durch Wurzelzeichen lösbar sei, und richten unsere Aufmerksamkeit insonderheit auf die *innerste* dabei auftretende Wurzelgröße! Dieselbe ist, eben weil sie die innerste Wurzelgröße ist, aus einer rationalen Funktion von Z , welche $R(Z)$ heißen mag, gezogen. Wir wollen den Grad der Wurzel, was der Allgemeinheit unseres Ansatzes keinen Eintrag tut und hinterher eine einfachere Ausdrucksweise gestattet, als Primzahl p nehmen. Bemerken wir noch, daß

*) Bd. 129: Über die Auflösung der allgemeinen Gleichungen fünften und sechsten Grades (aus einem Briefe an Hrn. K. Hensel in Marburg); abgedruckt in Bd. 61 dieser Annalen.

$R(Z)$ gewiß keine p^{te} Potenz ist; sonst würde man $\sqrt[p]{R(Z)}$ nicht als innerste vorkommende Wurzel mitrechnen. Nun soll $\sqrt[p]{R(Z)}$ nach dem Abelschen Satze gleich einer rationalen Funktion der Wurzeln $z_1, z_2, \dots, z_{60}$ der Ikosaedergleichung sein:

$$\sqrt[p]{R(Z)} = r(z_1, z_2, \dots, z_{60}).$$

Ich sage, daß hierin bereits ein Widerspruch liegt und zwar wegen der Verzweigung der $z_1, z_2, \dots, z_{60}$ in bezug auf Z .

Aus dieser Verzweigung folgt nämlich sofort, daß r als Funktion von Z wieder nur bei $Z = 0, 1, \infty$ verzweigt sein kann und zwar nur so, daß Blätter, die bei $Z = 0$ nicht isoliert verlaufen, zu je 3 im Zyklus zusammenhängen, Blätter, die bei $Z = 1$ verzweigt sind, zu je 2, und Blätter, die es bei $Z = \infty$ sind, zu je 5. Eine solche Verzweigung kann aber bei einer Funktion $\sqrt[p]{R(Z)}$ nie auftreten.

Um dies möglichst präzise zu fassen, schreiben wir für Z homogen machend Z_1/Z_2 , spalten dann $R(Z_1/Z_2)$ in Zähler und Nenner:

$$R = \frac{\varphi(Z_1, Z_2)}{\psi(Z_1, Z_2)},$$

wo φ, ψ teilerfremde Polynome desselben Grades sein werden, und zerlegen φ, ψ in ihre Linearfaktoren. Wir erhalten so etwa

$$\varphi = l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2} \dots l_{\mu}^{\alpha_{\mu}}, \quad \psi = m_1^{\beta_1} m_2^{\beta_2} \dots m_{\nu}^{\beta_{\nu}},$$

wo

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{\mu} = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{\nu}$$

sein wird. Die Blätter der zu $\sqrt[p]{R(Z)}$ gehörigen Riemannschen Fläche werden überall da, wo ein Linearfaktor l oder m verschwindet, dessen Multiplizität α bez. β nicht durch p teilbar ist, alle p im Zyklus zusammenhängen, andere Verzweigungen aber nicht aufweisen.

Nun ist die Sache die, daß von Verzweigungsstellen der in Rede stehenden Art notwendig mindestens 2 auftreten. In der Tat: aus der für die α, β geltenden Gleichung schließen wir auf das Bestehen der Kongruenz

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{\mu} \equiv \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{\nu} \pmod{p},$$

und eine solche Kongruenz kann — wenn nicht alle α, β einzeln durch p teilbar sind, was auszuschließen ist, weil dann $R(Z)$ eine p^{te} Potenz sein würde — nur so statthaben, daß mindestens zwei der Zahlen α, β nicht durch p teilbar sind.

Die Funktion $\sqrt[p]{R(Z)}$ hat also in der Tat eine Verzweigung, welche mit derjenigen einer Funktion $r(z_1, z_2, \dots, z_{60})$ niemals übereinstimmen kann.

Offenbar gewinnen wir durch die so formulierte Überlegung gleich einen allgemeineren Satz. Es sei $f(z, Z) = 0$ eine algebraische Gleichung

für z , die den Parameter Z rational enthält. Als Funktion von Z seien die Wurzeln z bei $Z = A, B, C, \dots$ verzweigt. Bei $Z = A$ möge eine Anzahl von Blättern zu je κ_1 zusammenhängen, andere zu je κ_2 usw. usw. Ich bilde mir das kleinste gemeinsame Multiplum der Zahlen $\kappa_1, \kappa_2, \dots$ und nenne es κ . Eine entsprechende Bedeutung mögen für die Verzweigungsstelle $Z = B$ die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ bez. λ , für die Verzweigungsstelle $Z = C$ die Zahlen $\mu_1, \mu_2, \dots$ bez. μ haben. *Die vorgelegte Gleichung ist gewiß nicht durch Wurzelzeichen lösbar, wenn die Zahlen $\kappa, \lambda, \mu, \dots$ alle relativ prim sind.*

Juist, den 26. August 1905.