8. *Über die Theorie des Gleichstromgenerators;* *von P. Riebesell.*

§ 1. Einleitung.

Mit der Einführung der Wendepole begann eine neue Ära im Gleichstrommaschinenbau. Die Funkengrenze, die bisher hauptsächlich die Konstruktion beeinflusste, wurde weit hinausgeschoben, ja die Erwärmungsgrenze wurde als einziges Hindernis bezeichnet, die Leistung der Maschine unbegrenzt zu steigern.¹⁾ Eine wissenschaftlich begründete Anordnung der Wendepole hat jedoch eine exakte Vorausberechnung der Maschine zur Voraussetzung; vor allem ist es nötig, Klarheit über die *Vorgänge in der Kommutierungszone* zu besitzen. Die *elektrischen Vorgänge* sind für den einfachen Fall, daß die Bürstenbreite gleich der Lamellenbreite ist, durch zahlreiche Abhandlungen genügend geklärt.²⁾ Die *magnetischen Erscheinungen* sind erst neuerdings in den Kreis der Betrachtungen gezogen³⁾, und vor kurzem ist auch das Problem für *zahlreiche überdeckte Lamellen* einer Lösung zugeführt.⁴⁾ Die Resultate, die sich ergeben haben, sollen im folgenden durch eine bisher unberücksichtigt gebliebene Beziehung ergänzt werden.⁵⁾

1) G. Dettmar, Elektrotechn. Zeitschr. p. 23. 1906.

2) J. Fischer-Hinnen, Elektrotechn. Zeitschr. p. 850. 1898; derselbe, Die Wirkungsweise, Berechnung und Konstruktion der Gleichstrommaschinen. 5. Aufl. Zürich 1903; E. Arnold und G. Mie, Elektrotechn. Zeitschr. p. 97. 1899; E. Arnold, Die Gleichstrommaschine. 2. Aufl. Berlin 1906; P. Riebesell, Über den Kurzschluß der Spulen usw., Dissertation, Kiel 1905.

3) R. Pohl, Über magnetische Wirkungen der Kurzschlußströme, Stuttgart 1905; P. Riebesell, Zeitschr. für Math. u. Physik, 53. p. 337. 1908.

4) R. Rüdenberg, Theorie der Kommutation in Gleichstrommaschinen, Stuttgart 1907.

5) P. Riebesell, l. c. und Elektrotechn. Zeitschr. p. 491. 1906; C. Menges, Elektrotechn. Zeitschr. p. 1127. 1906.

§ 2. Die elektrischen Vorgänge in den Kurzschlußspulen.

Fig. 1.

Wird die in Fig. 1 dargestellte, fremderregte zweipolige Maschine mit glattem Ringanker den Betrachtungen zugrunde gelegt, so gibt Fig. 2 die Stromverteilung an.

Fig. 2.

x sei die Entfernung eines beliebigen Punktes des Kollektorumfanges von der auflaufenden Bürstenkante an gerechnet,
 t die Zeit vom Beginn des Kurzschlusses an,
 T die Dauer des Kurzschlusses in einer Spule,
 J der Ankerzweigstrom,
 i der Kurzschlußstrom,
 i_c der Strom in den Kollektorverbindungen,

b die Bürstenbreite,
 β die Lamellenbreite,
 l die Anker- bzw. Kollektorlänge,
 R_s der Widerstand einer Spule,
 R_v der Widerstand einer Kollektorverbindung,
 R_k der spezifische Übergangswiderstand zwischen Kollektor und Bürste.

Betrachten wir eine Spule *unter dem mittleren Teil* der Bürste, so ist:

$$(1) \quad i_c^{(x)} = i_x - i_{x+\beta} = -\Delta i.$$

Sind viele Spulen kurzgeschlossen, so sind β und Δi klein; dann ist:

$$(2) \quad i_c^{(x)} = -\beta \frac{di}{dx}.$$

Die Ohmschen Spannungsverluste in den einzelnen Teilen der betrachteten Spule sind:

$$-i_c^{(x-\beta)} \left(R_v + \frac{R_k}{l \cdot \beta} \right),$$

$$+ i_x \cdot R_s$$

und

$$+ i_c^{(x)} \left(R_v + \frac{R_k}{l \cdot \beta} \right).$$

Nun ist:

$$i_c^{(x-\beta)} - i_c^{(x)} = i_{x-\beta} - 2i_x + i_{x+\beta} = \Delta^2 i.$$

Wir werden hier also eigentlich auf ein *Problem der Differenzenrechnung* geführt.¹⁾ Für eine große Zahl der überdeckten Lamellen gilt jedoch:

$$(3) \quad \Delta^2 i = \beta^2 \frac{d^2 i}{dx^2}.$$

Haben alle Spulen gleichartige Lage, so ist:

$$\frac{di}{dx} = \frac{T}{b} \frac{di}{dt} = \frac{1}{b} \cdot \frac{di}{d\vartheta},$$

wenn $t/T = \vartheta$ gesetzt wird.

Dann ist der Spannungsverlust:

$$(4) \quad V_i = i \cdot R_s - R_b \cdot \frac{d^2 i}{d\vartheta^2},$$

wenn

$$\left(\frac{\beta}{b} \right)^2 \left(R_v + \frac{R_k}{l \cdot \beta} \right) = R_b$$

gesetzt wird.

1) R. Rüdénberg, l. c.

Betrachten wir eine Spule, die gerade die Bürste *verläßt*, so ist der Spannungsverlust:

$$V_e = -i_c \left(R_v + \frac{R_k}{l \cdot \beta} \right) + R_s i + (J + i) \left(R_v + \frac{R_k}{l \cdot \beta \frac{T-t}{T}} \right).$$

Oder:

$$(5) \quad V_e = i \cdot R_s - \frac{i_c b^2 R_b}{\beta^2} + (J + i) \left[R_v + \frac{R_k}{l \cdot \beta (1 - \vartheta)} \right].$$

Für eine Spule, die gerade in den Kurzschluß *tritt*, gilt entsprechend:

$$V_a = i_c \left(R_v + \frac{R_k}{l \cdot \beta} \right) + R_s i - (J - i) \left(R_v + \frac{R_k}{l \cdot \beta \frac{t}{T}} \right).$$

Oder:

$$(6) \quad V_a = i \cdot R_s + \frac{i_c b^2 R_b}{\beta^2} - (J - i) \left(R_v + \frac{R_k}{l \cdot \beta \cdot \vartheta} \right).$$

§ 3. Die magnetischen Vorgänge in der Kommutierungszone.

Die kurzgeschlossenen Ankerspulen befinden sich in einem *räumlich und zeitlich* variablen Magnetfelde.

Ist N die Zahl der durch eine Windung gehenden Kraftlinien, so ist die induzierte elektromotorische Kraft:

$$(7) \quad E = - \frac{dN}{dt} \cdot 10^{-8}.$$

Die Änderung der Kraftlinienzahl ist aber teils eine zeitliche bei fester Spulenlage, teils durch die Bewegung der Spule verursacht. Demnach ist:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial N}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial N}{\partial t}$$

oder

$$(8) \quad \frac{dN}{dt} = v \cdot \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial t},$$

wenn v die Ankergeschwindigkeit bezeichnet.

Diese Gleichung zeigt uns, daß wir das in der Kommutierungszone vorhandene Feld in zwei Bestandteile zerlegen können, von denen der eine im Raum feststeht, während der andere sich gemeinsam mit dem Anker bewegt.¹⁾ Der erste

1) R. Rüdénberg, l. c.

Teil wird gebildet von dem Felde der Haupt- und Hilfspole, sowie dem Ankerfeld, einschließlich der Kurzschlußströme, der zweite Teil gibt die von der Bewegung unabhängige Schwankung der Induktion an; sie wird hervorgerufen durch diejenigen Linien, die die Drähte eng umschließen und die als Selbstinduktionslinien zu deuten sind. Der erste Teil gibt somit auch die elektromotorische Kraft an, die durch das eigentliche Schneiden der Kraftlinien infolge der Bewegung entsteht, während der zweite Teil die Änderung infolge der Variation von i bzw. J angibt.

Nennen wir die von den *Hauptpolen* erzeugte Feldintensität F und die infolge des *Ankerstromes*, ausschließlich der Kurzschlußströme, erzeugte Ankerintensität A , so ist die Zahl der Kraftlinien, die diese beiden Komponenten durch eine kurzgeschlossene Windung zur Zeit t hindurchsenden, nach Fig. 1¹⁾:

$$(9) \quad N_1 = f[F \cos(\varphi + 2\pi n t) + A \sin 2\pi n t],$$

wo $2f$ die Windungsfläche, φ den Bürstenverschiebungswinkel beim Beginn des Kurzschlusses (in Bogenmaß gemessen) und n die Umdrehungszahl des Ankers bezeichnet.

Daraus folgt:

$$(10) \quad E_1 = 2\pi n f[F \sin(\varphi + 2\pi n t) - A \cos 2\pi n t] \cdot 10^{-8}.$$

Hierzu kommt das Feld, das durch die Amperewindungen des *Kurzschlußstromes* i hervorgerufen wird.

Allgemein ist die Kurve der magnetisierenden Kraft die Integralkurve der räumlichen Verteilung der linearen Stromdichte. Also ist die Amperewindungszahl der Kurzschlußströme:

$$(11) \quad A W_k = \int_0^x j \, dx - \frac{1}{2} \int j \, dx^{(b)},$$

wo die lineare Stromdichte $j = i \cdot N_w / \pi D$ ist. Hierin bedeutet N_w die Drahtzahl und D den Ankerdurchmesser. Dann ist:

$$(12) \quad A W_k = \frac{b}{T} \cdot \frac{N_w}{\pi D} \left\{ \int_0^t i \, dt - \frac{1}{2} \int_0^T i \, dt \right\}.$$

1) P. Riebesell, l. c.

Aus den Amperewindungen ergibt sich die Induktion durch die Gleichung:

$$(13) \quad \text{Ind.} = \mu_1 \cdot A W_k,$$

wo μ_1 ein durch die Dimensionen und das Material der Polschuhe, des Ankereisens und des Luftabstandes bedingter Faktor ist, der als konstant betrachtet werden soll.

Nehmen wir an, daß das durch die Kurzschlußströme erzeugte Feld sich wie ein homogenes verhält, so ist die dadurch in einer Spule induzierte elektromotorische Kraft:

$$(14) \quad E_2 = \frac{\mu_1 \cdot w_1 \cdot N_w \cdot f \cdot v^2}{\pi D} \left\{ \int_0^t i dt - \frac{1}{2} \int_0^T i dt \right\} 10^{-8},$$

wenn w_1 die Anzahl der Windungen in jeder Spule bezeichnet.

Setzen wir den „Selbstinduktionskoeffizienten zweiter Art“¹⁾:

$$(15) \quad Q = \frac{\mu_1 w_1 N_w f b^2}{\pi D} \cdot 10^{-8},$$

so ist:

$$(16) \quad E_2 = \frac{Q}{T} \int_0^\vartheta i d\vartheta - \frac{Q}{2T} \int_0^1 i d\vartheta.$$

Andererseits ist die Feldintensität:

$$F = \mu_2 w_2 \Im,$$

wo μ_2 ein Faktor ähnlich μ_1 , und $w_2 \Im$ die Erregeramperewindungen bezeichnen.

Ebenso ist:

$$A = \mu_3 (k - 2u) w_1 J,$$

wenn k Kollektorlamellen oder Spulen vorhanden sind, von denen u unter jeder Bürste sich im Kurzschluß befinden.

Dann ergibt sich, wenn

$$\begin{aligned} 2\pi f w_1 w_2 \mu_2 \cdot 10^{-8} &= S_1, \\ 2\pi f w_1^2 (k - 2u) \mu_3 \cdot 10^{-8} &= S_2 \end{aligned}$$

und $2\pi n T = a$ gesetzt wird:

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} E &= w_1 E_1 + E_2 = n S_1 \Im \sin(\varphi + a\vartheta) - n S_2 J \cos a\vartheta \\ &+ \frac{Q}{T} \int_0^\vartheta i d\vartheta - \frac{Q}{2T} \int_0^1 i d\vartheta. \end{aligned} \right.$$

1) R. Rüdénberg, l. c.

Dabei sind die Hilfspole nicht berücksichtigt; ihre Wirkung würde jedoch durch eine Änderung in S_2 leicht ausgedrückt werden können. Außerdem ist die Annahme gemacht, daß die momentanen Schwankungen des Ankerstromes J auf die magnetische Verkettung der Spulen keinen wesentlichen Einfluß ausüben.

§ 4. Die Kurzschlußgleichungen.

Durch die Anwendung der Kirchhoffschen Sätze auf die Stromverteilung der Fig. 2 ergeben sich folgende Gleichungen:

1. Die Anfangsgleichung.

$$(18) \quad \frac{L_s}{T} \frac{di}{d\vartheta} + i \cdot R_s - (J - i) \left(R_v + \frac{R_k}{l \cdot \beta \vartheta} \right) + i_c \frac{b^2}{\beta^2} R_b + E = 0.$$

Die Gültigkeitsdauer dieser Gleichung ist das Intervall

$$0 \leq \vartheta \leq \frac{\beta}{b};$$

die Anfangsbedingung ist: $\vartheta = 0$, $i = J$.

Daß diese Bedingung erfüllbar ist, obgleich $\vartheta = 0$ singulärer Punkt der Differentialgleichung ist, ergibt die nähere Diskussion, die $\vartheta = 0$, $i = J$ als sogenannten „Sattelpunkt“ feststellt.¹⁾

$L_s/T \cdot di/d\vartheta$ stellt in der Gleichung (18) denjenigen Teil der induzierten elektromotorischen Kraft dar, der in Gleichung (8) als durch die zeitliche Schwankung des Feldes hervorgerufen bezeichnet wurde.²⁾

In den alten Kommutationstheorien stellte L_s gewöhnlich den Selbstinduktionskoeffizienten der Spule dar, und man fügte noch ein ähnliches Glied für die gegenseitige Induktion der übrigen kurzgeschlossenen Stromkreise hinzu. Diese die übrigen Spulen durchsetzenden Kraftlinien haben wir aber schon bei der Berechnung des Selbstinduktionskoeffizienten zweiter Art Q berücksichtigt, ihre Wirkungsweise ist in E der Gleichung (17) enthalten, so daß L_s die reinen Selbstinduktionslinien bezeichnen soll.

1) Briot u. Bouquet, Journal de l'École Polytechnique, cah. 36; H. Poincaré, Journal de l'École Polytechnique, cah. 45; P. Riebesell, Elektrotechn. Zeitschr. p. 62. 1906.

2) Über die Berechnung von L_s vgl. R. Rüdenberg, l. c.

Ist aber E praktisch an einer Maschine durch Intensitätsmessung des Kommutationsfeldes bestimmt, so darf, wenn dieser Wert in die Differentialgleichung eingesetzt wird, die Wirkung der Selbstinduktion in derselben nicht mehr berücksichtigt werden, das Glied $L_s/T \cdot di/d\vartheta$ hat also zu fehlen.

Soll überhaupt die Wirkung der Selbstinduktion durch das äußere Feld aufgehoben werden, soll also die sogenannte „Widerstandskommulation“ erreicht werden, so finden sich die Bürsten tatsächlich in der wahren neutralen Zone.¹⁾ In der Differentialgleichung müssen aber die einzelnen Komponenten der kommutierenden elektromotorischen Kraft berücksichtigt werden, und wenn gesagt wird, daß die Bürsten aus der neutralen Zone entfernt werden müssen, so ist damit entweder die ursprüngliche oder diejenige gedachte resultierende neutrale Zone gemeint, die durch Anker und Feldmagnete entsteht. Um aus den Differentialgleichungen die günstigen Bedingungen zu folgern, müssen die einzelnen Komponenten der elektromotorischen Kraft in ihrer Abhängigkeit von t , i und J berücksichtigt werden.

Zu der Gleichung (18) gelangt man aber auch, indem man die Selbst- und gegenseitige Induktion erster Art einführt und mit denjenigen Kraftlinien rechnet, die *durch* benachbarte Windungen *hindurchtreten*. Die Koeffizienten der gegenseitigen Induktion erster Art sind als mit der Spulenentfernung x linear abnehmende Funktionen aufzufassen, und diese Abnahme führt auf eine Induktion zweiter Art, zu der wir hier gelangt sind, indem wir diejenigen Kraftlinien berücksichtigt haben, die *zwischen* zwei benachbarten Windungen *hindurch* den *Anker verlassen* ²⁾

Die Wirkung der Kurzschlußströme läßt sich somit in der Differentialgleichung durch Koeffizienten erster und zweiter Art berücksichtigen. In (18) ist i_c als konstant anzusehen, der Wert ergibt sich aus $di/d\delta$, welches durch die folgende Mittelgleichung bestimmt ist.

2. Die Mittelgleichung.

$$(19) \quad -R_b \frac{d^2 i}{d\vartheta^2} + \frac{L_s}{T} \frac{di}{d\vartheta} + i \cdot R_s + E = 0.$$

1) C. Menges, Elektrotechn. Zeitschr. p. 1058. 1907.

2) R. Rüdenberg, l. c.

Diese Gleichung ist gültig für:

$$\frac{\beta}{b} \leq \vartheta \leq 1 - \frac{\beta}{b};$$

die Grenzbedingungen ergeben sich aus (18).

Setzen wir für E den Wert (17) ein und differenzieren, so wird (19) eine gewöhnliche Differentialgleichung dritter Ordnung, die durch Quadraturen lösbar ist.

3. Die Endgleichung.

$$(20) \quad \frac{L_s}{T} \frac{di}{d\vartheta} + i \cdot R_s + (J + i) \left[R_v + \frac{R_k}{l\beta(1-\vartheta)} \right] - \frac{i_c b^2 R_b}{\beta^2} + E = 0.$$

Sie gilt in dem Intervall

$$1 - \frac{\beta}{b} \leq \vartheta \leq 1,$$

die Anfangsbedingung ergibt sich aus (19).

Über i zur Zeit $\vartheta = 1$ ist von vornherein keine Aussage zu machen, da $\vartheta = 1$ als singulärer Punkt auftritt. Die nähere Diskussion zeigt, daß es ein sogenannter „Knotenpunkt“ ist, durch den sämtliche Integralkurven hindurchgehen, so daß immer $i = -J$ ist für $\vartheta = 1$.

§ 5. Die gesamtelektromotorische Kraft.

Die drei Kurzschlußgleichungen liefern den Kurzschlußstrom i als Funktion der Zeit t . Um zu ihrer Lösung zu kommen, hat man allgemein den Ankerstrom J als unabhängig von der Zeit angenommen, und die Folgerungen, die man aus den Lösungen zog, haben zum Teil der Praxis genügt, zum Teil widersprochen sie ihr jedoch geradezu.¹⁾ Der Grund dafür liegt darin, daß man eine wichtige Beziehung vernachlässigt hat, die man durch Anwendung des Kirchhoffschen Satzes auf den äußeren Stromkreis erhält. Bereits in meiner Dissertation habe ich darauf hingewiesen, daß man *neben den Kurzschlußgleichungen die Hauptgleichung* des Stromes berücksichtigen muß, wie sie aus Fig. 2 abzuleiten ist, und in der Zeitschr. für Math. u. Physik²⁾ sowie in der Elektrotechn. Zeitschr.³⁾ habe ich

1) P. Riebesell, Elektrotechn. Zeitschr. p. 303. 1906.

2) 55. p. 147. 1907.

3) Elektrotechn. Zeitschr. p. 491. 1906.

einige Folgerungen hieraus gezogen und weitere Resultate in Aussicht gestellt. Nach mir hat dann Herr Menges¹⁾ auf diese Gleichung hingewiesen, und aus ihr die Folgerung gezogen, daß sämtliche alten Theorien unrichtig sind. Herrn Menges sind meine Arbeiten, obgleich er mich als Anhänger der alten Theorien nennt, jedenfalls nicht im Original bekannt gewesen, sonst hätte er nicht sagen können, daß er „von ganz neuen Anschauungen des Vorganges ausgehe“. Immerhin haben seine Ausführungen dazu beigetragen, die Wichtigkeit der Hauptgleichung zu zeigen, wenn auch seine Schlußfolgerungen, wie weiter unten bewiesen wird, nicht richtig sind. Neuerdings ist von Herrn Rüdenberg eine Lösung des Problems angekündigt²⁾, doch ist bereits *vorher die Auflösung der simultanen Differentialgleichungen* von mir vorgenommen.³⁾

Um die Vorgänge im Ankerstromkreis beurteilen zu können, müssen wir zunächst die *gesamtelektromotorische Kraft*: E^* berechnen, die bei der Rotation des Ankers erzeugt wird. Die durch eine Windung zur Zeit t hindurchgehende Kraftlinienzahl ist nach (9) und (14):

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} N = & f[\mu_2 w_2 \mathfrak{S} \cos(\varphi + 2\pi n t) + \mu_3 (h - 2u) w_1 J \sin 2\pi n t] \\ & + \frac{E_3}{w_1 v} \cdot 10^8. \end{aligned} \right.$$

Die in einer Windung nach Schluß des Kurzschlusses bis zum Wiederbeginn desselben unter der anderen Bürste während der Umdrehung erzeugte mittlere elektromotorische Kraft ist nun:

$$e_1 = \frac{\frac{1}{2n} \int E dt}{\frac{T}{1} - T}.$$

Da aber $E = -dN/dt \cdot 10^{-8}$ war, so ergibt sich, wenn man berücksichtigt, daß $T = u/nk$:

1) C. Menges, Elektrotechn. Zeitschr. p. 1127. 1906.

2) R. Rüdenberg, Elektrotechn. Zeitschr. p. 1073. 1907.

3) P. Riebesell, Elektrotechn. Zeitschr. 1908, einer der nächsten Nummern.

$$e_1 = -\frac{2nf10^{-8}}{1-2nT} \left[\mu_2 w_2 \Im \left\{ \cos(\varphi + \pi) - \cos\left(\varphi + \frac{2\pi u}{k}\right) \right\} \right. \\ \left. - \mu_3 (k-2u) w_1 J \sin \frac{2\pi u}{k} + \frac{Q \cdot 10^8}{v w_1 T f} \int_0^{\frac{1}{2n}} i d\vartheta \right].$$

Da $(k/2 - u)w_1$ Windungen für die gesamte elektromotorische Kraft: E^* der Maschine in Betracht kommen, so ist:

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} E^* &= nk w_1 f \cdot 10^{-8} \left[\mu_2 w_2 \Im \left\{ \cos \varphi + \cos\left(\varphi + \frac{2\pi u}{k}\right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \mu_3 (k-2u) w_1 J \sin \frac{2\pi u}{k} - \frac{Q \cdot 10^8}{v \cdot w_1 T f} \int_0^{\frac{1}{2n}} i d\vartheta \right]. \end{aligned} \right.$$

§ 6. Die Hauptgleichung.

Nach dem Kirchhoffschen Satz ergibt sich aus Fig. 2, wenn der äußere Widerstand W_a und der gesamte Widerstand des betreffenden Ankerzweiges: $2R_v + R_s(k/2 - u) = W_i$ gesetzt wird:

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} E^* - \frac{L}{T} \frac{dJ}{d\vartheta} &= 2JW_a + JW_i + (J+i) \frac{R_k}{l\beta(1-\vartheta)} \\ &\quad + (J-i) \frac{R_k}{l\beta\vartheta}. \end{aligned} \right.$$

Hierbei bedeutet L den Selbstinduktionskoeffizienten im Anker und in der äußeren Leitung. Da von den drei Kurzschlußgleichungen zu einer gegebenen Zeit immer nur eine gültig ist, so haben wir zwei *simultane Differentialgleichungen* für i und J zu berücksichtigen. Es ist daher nicht richtig, J von vornherein als *konstant* anzunehmen.¹⁾ Da es hauptsächlich auf den Beginn und den Schluß der Kurzschlußzeit ankommt, können wir die drei Gleichungen (18), (19) und (20) durch eine ersetzen, nämlich diejenige, welche für *eine* überdeckte Lamelle, d. h. für $b = \beta$ gültig ist. In ihr sind nämlich die einzelnen Probleme vereint enthalten, und die exakte Lösung der drei Gleichungen bietet keine größere Schwierigkeiten, es würden

1) W. Siebert, Elektrotechn. Zeitschr. p. 523. 1906; K. Waldmann, Elektrotechn. Zeitschr. p. 491. 1906; P. Riebesell, Elektrotechn. Zeitschr. p. 491. 1906.

sich nur die Resultate wesentlich unübersichtlicher gestalten. Sehen wir vorläufig von der magnetischen Rückwirkung der Kurzschlußströme ab und entwickeln wir E in (17) nach Potenzen von t , so können wir in erster Annäherung

$$E = P_1 + P_2 t$$

setzen. Dann erhalten wir die *Kurzschlußdifferentialgleichung* in der altbekannten Form:

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d i}{d \vartheta} + i \left(\tau' + \frac{\tau}{\vartheta} + \frac{\tau}{1-\vartheta} \right) + J \left(\frac{\tau}{1-\vartheta} - \frac{\tau}{\vartheta} \right) \\ + P_1 \frac{T}{L_s} + P_2 \frac{T^2}{L_s} \vartheta = 0, \end{aligned} \right.$$

wo

$$\tau = \frac{R_k \cdot T}{l \cdot b \cdot L_s} \quad \text{und} \quad \tau' = \frac{R_s \cdot T}{L_s}.$$

Dazu kommt als *Hauptgleichung*:

$$(25) \quad \frac{d J}{d \vartheta} + J \left(\lambda' + \frac{\lambda}{\vartheta} + \frac{\lambda}{1-\vartheta} \right) + i \left(\frac{\lambda}{1-\vartheta} - \frac{\lambda}{\vartheta} \right) - E^* \frac{T}{L} = 0,$$

wo

$$\lambda' = (2 W_a + W_i) \frac{T}{L} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{R_k \cdot T}{l \cdot b \cdot L}.$$

Dabei sei die Abhängigkeit der Größen E^* , P_1 und P_2 von i und J unberücksichtigt gelassen.

Diese beiden Gleichungen legt auch Hr. Menges seinen Ausführungen zugrunde, nur fehlt bei ihm das erste Glied der Gleichung (25), d. h. er vernachlässigt die Selbstinduktion im Anker- und im äußeren Stromkreis. Das ist aber durchaus unzulässig; denn wenn im Kurzschlußstromkreis, der sich nur über wenige Spulen erstreckt, die Wirkung der Selbstinduktion berücksichtigt wird, so muß um so mehr L in den übrigen Ankerspulen und in der Außenleitung in Rechnung gezogen werden. Bei symmetrischen Maschinen kam die gegenseitige Induktion, die im übrigen nur eine dämpfende Wirkung ausüben würde¹⁾, vernachlässigt werden.

§ 7. Die ablaufende Bürstenkante.

Die Ursachen der Funkenbildung führte man früher allein darauf zurück, daß infolge der Selbstinduktion der Strom i

1) G. Benischke, Elektrotechnik u. Maschinenbau 1906. Heft 47.

zur Zeit T noch nicht zu $-J$ kommutiert wäre, und daher am Schluß der Kurzschlußperiode eine Unterbrechung des Stromes stattfände. Die Diskussion von (24) zeigt jedoch, daß zur Zeit $t = T$ die Stromstärke i immer gleich $-J$ ist, die Funken daher nur durch die große Spannungsdifferenz erzeugt werden können. Die Potentialdifferenz an der ablaufenden Lamelle ist nun $R_k(J + i)/l \cdot b(1 - \vartheta)$, also für $x = 1$:

$$- \frac{R_k}{l \cdot b} \left(\frac{di}{d\vartheta} \right)_{\vartheta=1},$$

d. h. proportional $(di/d\vartheta)_{\vartheta=1}$.

Nun ergibt sich durch Auflösung von (24), daß i darstellbar ist in der Form:

$$i = \mathfrak{P}(1 - \vartheta) + C \cdot e^{-\tau \vartheta} \left(\frac{\vartheta}{1 - \vartheta} \right)^{-\tau},$$

wo $\mathfrak{P}(1 - \vartheta)$ eine Potenzreihe von $1 - \vartheta$ ist. Daraus folgt, daß

$$\left(\frac{di}{d\vartheta} \right)_{\vartheta=1} = \infty$$

wird, für $\tau \leq 1$, so daß

$$\tau > 1$$

als *unerläßliche Bedingung für Funkenfreiheit* auftritt. Betrachten wir jetzt aber (25), ohne das erste Glied zu berücksichtigen, so sehen wir, daß dort die Potentialdifferenz

$$\left[\frac{(J + i)\lambda}{1 - \vartheta} \right]_{\vartheta=1}$$

niemals unendlich werden kann. Dies ist der Widerspruch, den Hr. Menges den alten Theorien vorwirft.

Nun gilt aber der Grenzübergang auf $(di/d\vartheta)_{\vartheta=1}$ in (24) und (25) nur, wenn J konstant ist, bei Berücksichtigung der Variabilität von J ist die Potentialdifferenz proportional:

$$\left[\frac{d(J + i)}{d\vartheta} \right]_{\vartheta=1}.$$

Lassen wir zunächst L unberücksichtigt, so haben wir folgende zwei Gleichungen aufzulösen:

$$(26) \quad \begin{cases} \frac{di}{d\vartheta} + i \left(\tau' + \frac{\tau}{\vartheta} - \frac{\tau}{1 - \vartheta} \right) + J \left(\frac{\tau}{1 - \vartheta} - \frac{\tau}{\vartheta} \right) \\ \quad + P_1 \frac{T}{L_s} + P_2 \frac{T^2}{L_s} \vartheta = 0 \end{cases}$$

und

$$(27) \quad J \left(\lambda' + \frac{\lambda}{\vartheta} + \frac{\lambda}{1 - \vartheta} \right) + i \left(\frac{\lambda}{1 - \vartheta} - \frac{\lambda}{\vartheta} \right) - E^* \frac{T}{L} = 0.$$

Für den Fall der unendlich großen Potentialdifferenz ist der Grenzübergang zu $dJ/d\vartheta$ und $di/d\vartheta$ direkt in den Gleichungen (26) und (27) nicht gestattet, auch ist es nicht ohne weiteres ersichtlich, ob

$$\left(\frac{dJ}{d\vartheta} + \frac{di}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=1}$$

nicht unendlich werden kann. Eliminieren wir aber J in (26) durch (27), so erhalten wir eine Gleichung von der Form:

$$(28) \quad \frac{di}{d\vartheta} + i \left(\tau' + \frac{B}{\vartheta - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'} + \frac{1}{4}}} + \frac{C}{\vartheta - \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'} + \frac{1}{4}}} \right) + D = 0.$$

$\vartheta = 0$ und $\vartheta = 1$ sind hier keine singulären Punkte mehr, d. h. ein Unendlichwerden der Spannung ist ausgeschlossen; denn J verhält sich wie i regulär. Die singulären Stellen

$$\vartheta = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'} + \frac{1}{4}}$$

liegen außerhalb der Kurzschlußzeit, kommen also für uns nicht in Betracht. Somit führt auch die strenge Rechnung scheinbar zu dem Ergebnis des Hrn. Menges. Jedoch ist die Gleichung (27) nur so lange gültig, als $(J + i)\lambda/1 - \vartheta$, d. h. die Spannung, endlich bleibt; also haben wir von vornherein das Unendlichwerden ausgeschlossen. Das ist offenbar unzulässig; es ist daher von der vollständigen Gleichung (25) auszugehen.

§ 8. Die simultanen Differentialgleichungen.

Die beiden Gleichungen (24) und (25) zeigen durch ihre gleiche Gestalt an, daß sich i und J während der Kurzschlußzeit ganz ähnlich verhalten werden. Die Integration ist nach der d'Alembert-Ampèreschen Methode ausführbar. Die Resultate lassen sich jedoch durch eine *qualitative Diskussion* der Differentialgleichungen *für den Schluß der Kurzschlußzeit* wesentlich vereinfachen. So geht (24) über in:

$$\frac{di}{d\vartheta} - (J - i) \frac{\tau'}{2} + \frac{(J + i)\tau}{1 - \vartheta} - \frac{(J - i)\tau}{\vartheta} + P_1 \frac{T}{L_s} + P_2 \frac{T^2}{L_s} \vartheta = 0$$

und (25) in:

$$\frac{dJ}{d\vartheta} + (J - i) \frac{\lambda'}{2} + \frac{(J + i)\lambda}{1 - \vartheta} + \frac{(J - i)\lambda}{\vartheta} - E^* \frac{T}{L} = 0.$$

Durch Addition ergibt sich:

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d(J+i)}{d\vartheta} + (J-i) \cdot \frac{\lambda' - \tau'}{2} + (J+i) \cdot \frac{\lambda + \tau}{1 - \vartheta} + (J-i) \cdot \frac{\lambda - \tau}{\vartheta} \\ + P_1 \frac{T}{L_s} + P_2 \frac{T^2}{L_s} \vartheta - E^* \frac{T}{L} = 0 \end{aligned} \right.$$

und durch Subtraktion:

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d(J-i)}{d\vartheta} + (J-i) \frac{\lambda' + \tau'}{2} + (J+i) \cdot \frac{\lambda - \tau}{1 - \vartheta} + (J-i) \cdot \frac{\lambda + \tau}{\vartheta} \\ - E^* \frac{T}{L} - P_1 \frac{T}{L_s} - P_2 \frac{T^2}{L_s} \vartheta = 0. \end{aligned} \right.$$

Bereits aus diesen Gleichungen geht hervor, daß $\vartheta = 1$ für i und J ein Knotenpunkt ist. Die Lösung nach der d'Alembertschen Methode führt auf ganz ähnliche Gleichungen wie die alte Kurzschlußdifferentialgleichung, d. h. $J+i$ ist, wie ja auch schon aus (29) hervorgeht, in folgender Form darstellbar:

$$(31) \quad J + i = \mathfrak{B}(1 - \vartheta) + C \cdot \left(\frac{\vartheta}{1 - \vartheta} \right)^{-(\tau + \lambda)}.$$

§ 9. Die günstigen Bedingungen.

Aus (31) folgt, daß

$$\left[\frac{d(J+i)}{d\vartheta} \right]_{\vartheta=1},$$

d. h. die Spannung an der ablaufenden Bürstenkante unendlich groß wird, wenn:

$$\tau + \lambda \leq 1$$

ist. Wir sind somit zu einem wesentlich anderen Resultat gelangt als die alten Kommutationstheorien, und der Widerspruch, der bisher bezüglich der Bedingung $\tau > 1$ zwischen Theorie und Praxis bestand, scheint gelöst. Denn unserer *unerläßlichen Bedingung*:

$$(32) \quad \tau + \lambda > 1 \quad \text{oder} \quad \frac{R_k \cdot T}{l \cdot b} \cdot \frac{L + L_s}{L \cdot L_s} > 1$$

kann sehr wohl in den Fällen genügt werden, wo die alte Bedingung nicht erfüllt war.

Der *günstigste Verlauf* wird offenbar eintreten, wenn

$$\left(\frac{dJ}{d\vartheta} \right)_{\vartheta=1} \quad \text{und} \quad \left(\frac{di}{d\vartheta} \right)_{\vartheta=1} = 0$$

sind, d. h. wenn:

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} J(2\tau + \tau') = P_1 \frac{T}{L_s} + P_2 \frac{T^2}{L_s} \\ \text{und} \\ J(2\lambda + \lambda') = E^* \frac{T}{L}. \end{array} \right.$$

Durch genaue Bestimmung von P_1 , P_2 und E^* aus (17) und (22) sind hieraus leicht die Bedingungen für den Bürstenverschiebungswinkel φ abzuleiten, oder, falls dieser von Leerlauf bis Vollast konstant sein soll, die Bedingungen für die Dimensionierung der Feldmagnete, der Hilfspole oder des Ankers.

Bisher haben wir angenommen, daß der *Übergangswiderstand* R_k konstant sei. Er ist aber¹⁾ abhängig von der *Stromdichte* unter der Bürste, von dem Auflagedruck und der Tourenzahl, abgesehen von dem Material der Bürsten und des Kollektors.

Um wenigstens den Haupteinfluß der Stromdichte zu berücksichtigen, können wir setzen:

$$R_k = \frac{\delta}{s_n} + \varepsilon,$$

wo s_n die Übergangsstromdichte, δ und ε Konstante sind. Sind δ und $\varepsilon > 0$, so tritt in (24) ε an Stelle von $R_k/l.b$, während sich sonst nichts Wesentliches ändert. Ist aber, wie dies vorkommen kann, $\varepsilon < 0$, so ändern die Differentialgleichungen ihre Eigenschaften dahin, daß die Punkte $\vartheta = 0$ und $\vartheta = 1$ sich in ihrer Bedeutung für die Kurzschlußstromkurve vertauschen. Dann ist $\vartheta = 1$ kein Knotenpunkt mehr, und die Funken können, ganz ähnlich wie nach der alten Anschauung, durch zu starkes Anwachsen der Stromstärke hervorgerufen werden. Für den Übergangsfall $\varepsilon = 0$ verschwinden die singulären Punkte $\vartheta = 0$ und $\vartheta = 1$, i und J ergeben sich als ganze transzendente Funktionen. Dann müßte als günstige Bedingung $i_{\vartheta=1} = -J$ hinzugefügt werden.

§ 10. Zusammenfassung.

Die Differentialgleichungen des Kurzschlußstromes werden für den Fall, daß *eine große Zahl von Lamellen* von der Bürste

1) M. Kahn, Der Übergangswiderstand von Kohlebürsten, Stuttgart 1902; G. Dettmar, Elektrotechn. Zeitschr. 1900; L. Blanc, Ann. de Chim. et Phys. (8) 5. et 6. 1904.

überdeckt wird, in allgemeiner Form aufgestellt. Das in der Kommutierungszone vorhandene Feld wird näher untersucht, der *magnetische Einfluß* der Haupt- und Hilfspole, des Ankerfeldes sowie der Kurzschlußströme wird berechnet und eine angenäherte Formel für die *kommutierende elektromotorische Kraft* aufgestellt. Sodann wird die *gesamtelektromotorische Kraft* der Maschine ermittelt und die „*Hauptgleichung*“ aufgestellt. Die Lösung der simultanen Differentialgleichungen (24) und (25) führt zu *wesentlich anderen Resultaten*, als die alte Kommutationstheorie festgestellt hatte. Der *Widerspruch*, der bisher zwischen Theorie und Praxis in bezug auf die günstigen Bedingungen ($R_1 T/L > 1$) bestand, wird durch die neuen Ergebnisse gelöst. Der Ankerstrom J und der Kurzschlußstrom i werden *beide* in ihrer Abhängigkeit von der Zeit untersucht.

Berlin, 19. Dezember 1907.

(Eingegangen 20. Dezember 1907.)