Diese Formel ergibt die Gleichgewichtsconfiguration der magnetisch-polarisirten Flüssigkeit übereinstimmend mit der Erfahrung, denn sie erfordert eine positive Steighöhe für paramagnetische und eine negative für diamagnetische Flüssigkeiten.

Sie stimmt, wenn man die Bezeichnungen, die die Gleichungen (5) und (6) einführen, berücksichtigt, vollkommen überein mit jener, welche Quincke¹⁾ zur Berechnung der Magnetisirungszahl aus seinen Versuchen verwendet hat. Sie sowohl, wie die vorgängige Formel (4) sind identisch mit jener, welche auf ganz anderem Wege von Kirchhoff²⁾ hergeleitet worden ist.

XII. *Nachtrag zur Totalreflexion von Krystallen; von E. Ketteler.*

Wenn der letzte Aufsatz³⁾ zunächst und in erster Linie zu zeigen suchte, dass die Totalreflexion an einem Krystalle, dessen Hauptschnitt auf der Einfallsebene senkrecht steht, einen in theoretischer Hinsicht bemerkenswerthen Grenzfall bildet, so lehrte er zugleich andererseits Grenzwinkel, Polarisationsazimuth und Neigungswinkel der Grenzlinie als drei zusammengehörige Grössen kennen, deren gleichzeitige Ermittlung auch zur praktischen Erschöpfung des Falles erwünscht sein dürfte.

Um indess eine derartige Untersuchung über die Ebenen der Symmetrieachsen hinaus ausdehnen zu können, soll der gegenwärtige Nachtrag den Zusammenhang der drei erwähnten Grössen für beliebig orientirte spiegelnde Flächen entwickeln, dabei jedoch der Einfachheit wegen sich auf einaxige Krystalle beschränken.

1) S. Quincke, l. c. p. 370. Formel (5).

2) S. Kirchhoff, Wied. Ann. 25. p. 606. Formel (6). 1885.

3) Ketteler, Wied. Ann. 28. p. 230. 1886.

Schlagen wir zu dem Ende das wohl am kürzesten zum Ziele führende trigonometrische Verfahren ein, so sei in nebenstehender Figur XOY die spiegelnde Krystallfläche, OZ das Einfallslot und XOZ die Einfallsebene. Einem unter dem Einfallswinkel e' einfallenden Strahl EO entspreche der in der Trennungsfläche liegende gebrochene (extraordinäre) Strahl OS und die zugehörige, in der Einfallsebene gelegene Normale ON . Ist demnach $ZOS = r_s = 90^\circ$, so werde $ZON = r_n = r$ gesetzt. Strahl und Normale bilden miteinander den Winkel $SON = \delta$.

In der Ebene von Strahl und Normale liegt die optische Axe OA ; dieselbe bilde mit dem Lothe OZ den Winkel $AOZ = \mu$, und die Ebene OAZ sei gegen die Einfallsebene OZN um den Azimuthwinkel χ' geneigt. Endlich heisse der Winkel NOA zwischen Normale und optischer Axe χ , und bilde die OA , ON und OS enthaltende Ebene des sogenannten Hauptschnittes mit der Einfallsebene OZX den Flächenwinkel θ .

Im Folgenden betrachten wir μ und χ' als die gegebenen Attribute der spiegelnden Fläche und der Lage der Einfallsebene.

Denkt man sich jetzt um den Einfallspunkt O mit dem Radius 1 eine Kugelfläche beschrieben, so entstehen unter anderen die sphärischen Dreiecke AZN und ZNS .

Mittelst des ersteren ergeben sich die Beziehungen:

$$(1) \quad \cos \chi = \cos r \cos \mu + \sin r \sin \mu \cos \chi'$$

$$(2) \quad \cos \mu = \cos r \cos \chi + \sin r \sin \chi \cos \theta,$$

und aus dem zweiten folgt analog:

$$(3) \quad \cos r_s = \cos r \cos \delta - \sin r \sin \delta \cos \theta = 0.$$

Hierzu fügen wir die beiden aus der Theorie der Doppelbrechung bekannten Gleichungen:

$$(4) \quad \omega^2 = \omega_1^2 - (\omega_1^2 - \omega_2^2) \cos^2 \chi$$

$$(5) \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega^2} \sin \chi \cos \chi,$$

in welchen ω die variable Normalgeschwindigkeit und ω_1, ω_2 die beiden Hauptgeschwindigkeiten sind.

Bringt man Gleichung (3) auf die Form:

$$(6) \quad \cos \theta = \operatorname{ctg} r \operatorname{ctg} \delta,$$

setzt diesen Werth in Gleichung (2), sodass dieselbe übergeht in:

$$\cos \mu = \cos r (\cos \chi + \sin \chi \operatorname{ctg} \delta).$$

und substituirt hierin den Betrag von δ aus Gleichung (5), so erhält man bei Zuziehung von Gleichung (4):

$$(7) \quad \cos \chi = \frac{\omega_1^2 \cos r}{(\omega_1^2 - \omega_2^2) \cos \mu}.$$

Führt man diesen Ausdruck schliesslich in Gleichung (1), so ergibt deren Auflösung nach r :

$$(8) \quad \operatorname{tg} r = \frac{\omega_1^2 - (\omega_1^2 - \omega_2^2) \cos^2 \mu}{(\omega_1^2 - \omega_2^2) \sin \mu \cos \mu \cos \chi'}.$$

Demnach sind r und folgeweise auch χ, δ und θ als Functionen von μ und χ' bekannt.

Schreiben wir noch abkürzungsweise:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} r &= p \cos \chi', \\ p &= \frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2) \sin \mu \cos \mu}{\omega_1^2 - (\omega_1^2 - \omega_2^2) \cos^2 \mu}, \end{aligned}$$

so folgt:

$$\begin{aligned} \sin^2 r &= \frac{1}{1 + p^2 \cos^2 \chi'}, \\ \cos^2 r &= \frac{p^2 \cos^2 \chi'}{1 + p^2 \cos^2 \chi'}. \end{aligned}$$

Dies vorausgesetzt, gestaltet sich die Berechnung der drei, hier vorzugsweise interessirenden Grössen folgendermassen:

1. Für den Grenzwinkel e' gilt die Beziehung:

$$\frac{\sin^2 e'}{v^2} = \frac{\sin^2 r}{\omega^2},$$

unter v die Lichtgeschwindigkeit im umgebenden Medium verstanden. Man erhält so:

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 e'}{v^2} &= \frac{\sin^2 r}{\omega_1^2 - (\omega_1^2 - \omega_2^2) \cos^2 \chi} = \frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2) \cos^2 \mu \sin^2 r}{\omega_1^2 (\omega_1^2 - \omega_2^2) \cos^2 \mu - \omega_1^4 \cos^2 r} \\ &= \frac{1}{\omega_1^2} \frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2) \cos^2 \mu}{(\omega_1^2 - \omega_2^2) \cos^2 \mu - p^2 \cos^2 \chi' [\omega_1^2 - (\omega_1^2 - \omega_2^2) \cos^2 \chi']} \\ &= \frac{1}{\omega_1^2} \frac{\omega_1^2 - (\omega_1^2 - \omega_2^2) \cos^2 \mu}{\omega_1^2 - (\omega_1^2 - \omega_2^2) (\cos^2 \mu + \sin^2 \mu \cos^2 \chi')} . \end{aligned}$$

Es ist dies der in der früheren Abhandlung erwähnte, zuerst von Hrn. Liebisch abgeleitete Ausdruck. Versteht man wieder unter N den absoluten Index des umgebenden Mediums und unter n, n_1, n_2 die Indices des Krystalles, so hat man sonach:

$$(I) \quad \sin^2 e' = \frac{n_1^2}{N^2} \frac{n_2^2 - (n_2^2 - n_1^2) \cos^2 \mu}{n_2^2 - (n_2^2 - n_1^2) (\cos^2 \mu + \sin^2 \mu \cos^2 \chi')} .$$

2. Zur Berechnung des zugehörigen Schwingungsazimuthes dienen successive folgende Ausdrücke.

Zunächst schreibt sich Ausdruck (8):

$$(a) \quad \operatorname{ctg} r = \frac{(n_2^2 - n_1^2) \sin \mu \cos \mu}{n_2^2 - (n_2^2 - n_1^2) \cos^2 \mu} \cos \chi' ,$$

sodann Ausdruck (7):

$$(b) \quad \cos \chi = \frac{n_2^2 \cos r}{(n_2^2 - n_1^2) \cos \mu} ,$$

ferner Ausdrücke (5) und (4):

$$(c) \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{(n_2^2 - n_1^2) \sin \chi \cos \chi}{n_2^2 - (n_2^2 - n_1^2) \cos^2 \chi}$$

und schliesslich Ausdruck (6):

$$(d) \quad \cos \theta_d = \operatorname{ctg} r \operatorname{ctg} \delta .$$

Die so gewonnenen Werthe für r, δ, θ_d nebst e' befriedigen die bereits im früheren Aufsatz (p. 234) abgeleitete Gleichung:

$$(II) \quad \operatorname{tg} \theta_r = \frac{\sin(r - e') \sin \theta_d}{\sin(r - e') \cos(r + e') \cos \theta_d - \operatorname{tg} \delta \sin^2 r} = - \operatorname{ctg} R$$

für das Schwingungssazimuth θ_r des reflectirten Lichtes.

3. Was den Neigungswinkel der Grenzlinie (S) betrifft, so schreibt sich zunächst Gl. (I) auch so:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 e'} &= \frac{N^2}{n_1^2} - \frac{N^2}{n_1^2} \frac{(n_2^2 - n_1^2) \sin^2 \mu}{n_2^2 - (n_2^2 - n_1^2) \cos^2 \mu} \cos^2 \chi' \\ &= \frac{N^2}{n_1^2} \sin^2 \chi' + \frac{N^2}{n_2^2 - (n_2^2 - n_1^2) \cos^2 \mu} \cos^2 \chi'. \end{aligned}$$

Oder kürzer:

$$(I_b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sin^2 e'} = \frac{N^2}{n_1^2} \sin^2 \chi' + \frac{N^2}{n_2^2} \cos^2 \chi', \\ n_2'^2 = n_2^2 - (n_2^2 - n_1^2) \cos^2 \mu. \end{array} \right.$$

Vermöge dieser mit Gl. (I) des früheren Aufsatzes (p. 241) übereinstimmenden Form gelten ohne weiteres auch die dortigen Beziehungen (9) und (II), nämlich:

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\left(\frac{N^2}{n_1^2} - 1\right) - \left(\frac{N^2}{n_2'^2} - 1\right)}{\left(\frac{N^2}{n_1^2} - 1\right) \sin^2 \chi' + \left(\frac{N^2}{n_2'^2} - 1\right) \cos^2 \chi'} \sin \chi' \cos \chi', \\ \operatorname{tg} S = \operatorname{tg} \varepsilon \cos e'. \end{array} \right.$$

Während indess zufolge den früheren Gleichungen (IV) auf p. 243¹⁾ für die Specialbedingungen $r = \theta_d = 90^\circ$ die beiden Winkel R und S identisch wurden, dürfte für den jetzigen allgemeinen Fall die verwickeltere Form des Ausdrucks für R diese Gleichheit unwahrscheinlich machen.

1) Vgl. die Berichtigungen dieses Bandes.