Sopra la teoria della inversione di un sistema di funzioni (*).

(del prof. R. LIPSCHITZ, a Bonn.)

Quando in un campo determinato G delle variabili reali $z_1, z_2, \dots, z_n$ è dato un sistema di funzioni $F_1, F_2, \dots, F_n$ reali e ad un sol valore, che hanno le derivate prime parziali, rapporto a queste variabili, finite e continue in tutto il campo, si può dimandare quali condizioni debbono essere soddisfatte affinchè inversamente ad ogni sistema di valori delle funzioni $F_1, F_2, \dots, F_n$ corrisponda un solo sistema di grandezze $z_1, z_2, \dots, z_n$. I concetti, per mezzo dei quali JACOBI ha fondato la teoria dei sistemi di funzioni di più variabili sopra la teoria algebrica dei determinanti, conducono alla prima condizione, che il valore del determinante funzionale del sistema di funzioni $F_1, F_2, \dots, F_n$ rapporto al sistema delle variabili $z_1, z_2, \dots, z_n$, in tutto il campo G abbia sempre lo stesso segno.

Per aggiungere a questa altre condizioni, in modo da avere un sistema di condizioni sufficienti perchè la esposta relazione necessariamente debba verificarsi, bisognava mettere in giuoco, con opportune transizioni, il concetto di RIEMANN della semplice connessione di una varietà.

Ora io svilupperò dapprima un sistema di condizioni che soddisfa alla questione, e poi darò un processo teorico per mezzo del quale possono esser rappresentate le grandezze $z_1, z_2, \dots, z_n$ che corrispondono univocamente a un dato sistema di valori delle funzioni $F_1, F_2, \dots, F_n$. Affinchè questi problemi siano sciolti anche nella supposizione che sia dato un sistema di funzioni $f_1, f_2, \dots, f_m$ delle variabili complesse $y_1, y_2, \dots, y_m$, conviene riguardare, secondo il metodo del sig. KRONECKER (**), le parti separate delle va-

(*) Dai *Nachrichten* della Società delle scienze e dell'Università di Gottinga (1770, n.° 22).

(**) *Sopra i sistemi di funzioni di più variabili*: Monatsbericht der Berliner Akademie, marzo 1869, pag. 177.

riabili complesse $y_1, y_2, \dots y_m$ come variabili reali $z_1, z_2, \dots z_{2m}$ e contemporaneamente le parti separate delle funzioni complesse $f_1, f_2, \dots f_m$ come funzioni reali $F_1, F_2, \dots F_{2m}$ di quelle $2m$ variabili reali; allora il metodo prescelto conduce allo scopo.

1.

Il campo G delle variabili reali $z_1, z_2, \dots z_n$ sia determinato dalla condizione che in esso certe funzioni di queste variabili a un sol valore non possano raggiungere, o rispettivamente non possano superare certi dati valori costanti, e soddisfacciano a questa condizione soltanto valori finiti delle singole variabili $z_1, z_2, \dots z_n$: e nel contorno K del campo G quelle funzioni siano rispettivamente uguali a quei dati valori. Se diamo a una funzione F_α della serie delle date funzioni $F_1, F_2, \dots F_n$ un valore ammissibile C_α , le disuguaglianze $F_\alpha - C_\alpha > 0$, ed $F_\alpha - C_\alpha < 0$ denoteranno due pezzi, nei quali il campo G è diviso dalla equazione $F_\alpha - C_\alpha = 0$. Nel sistema di equazioni:

$$F_1 = C_1, \quad F_2 = C_2, \dots \quad F_n = C_n \quad (1)$$

sono imposti a tutte le funzioni F_α valori costanti C_α .

Se da questo sistema di equazioni se ne toglie una coppia qualunque $F_k = C_k$ ed $F_l = C_l$, le rimanenti $n - 2$ equazioni tra le variabili $z_1, z_2, \dots z_n$ determinano una varietà del secondo ordine $M_{k,l}$. Il contorno della varietà $M_{k,l}$ sia una varietà di primo ordine chiusa, che appartiene al contorno K del campo G .

Ora una varietà del secondo ordine si dice semplicemente connessa, quando per mezzo di ogni varietà di primo ordine, che si estende semplicemente da un sistema di valori del suo contorno fino ad un altro sistema di valori dello stesso contorno, essa rimane divisa in due pezzi separati (*); ed io suppongo che la varietà $M_{k,l}$ sia semplicemente connessa. Suppongo quindi che nella medesima, tanto la equazione $F_k = C_k$, quanto la equazione $F_l = C_l$, ciascuna presa separatamente, rappresenti una varietà di primo or-

(*) RIEMANN: *Fondamenti di una teoria generale delle funzioni di una variabile complessa*: n° 6 (Annali di Matematica, serie 1^a, t. 2). Invece delle espressioni linee e superficie sono introdotte nel testo le espressioni: « varietà del primo e del secondo ordine. »

dine che si estende semplicemente da un sistema di valori della varietà che forma il contorno a un secondo sistema di valori della medesima, e che ambedue queste varietà del primo ordine o abbiano comune un numero finito di sistemi di valori aventi tra loro differenze finite, o coincidano in parti finite, ma che però non possiedano in comune un infinito numero di sistemi di valori discontinui. Ammetto inoltre che la varietà $M_{k,l}$ non possieda singolarità di alcuna specie; in seguito definiremo precisamente questa espressione. Allora, se per ogni sistema di valori nell'intero campo G il determinante funzionale

$$\Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial z_1} \frac{\partial F_2}{\partial z_2} \dots \frac{\partial F_n}{\partial z_n} = \Delta$$

è sempre una grandezza dello stesso segno, epperò non è mai zero, si può dimostrare che al dato sistema di equazioni (1) non può soddisfare più di un sistema di valori $z_1, z_2, \dots, z_n$.

Una dimostrazione di questo teorema si può dedurre dalla considerazione di una forma analitica, che ho già considerata in un'altra occasione (*). Alla funzione intera e omogenea di primo grado degli n differenziali dz_α

$$a_1 dz_1 + a_2 dz_2 + \dots + a_n dz_n \quad (2)$$

nella quale i coefficienti $a_1, a_2, \dots, a_n$ sono funzioni delle variabili $z_1, z_2, \dots, z_n$, reali, a un sol valore e differenziabili, date nel campo G , corrisponde la forma bilineare relativamente ad ambedue i sistemi di differenziali dz_α e dz_β

$$\Sigma_{\alpha, \beta} \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial z_\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial z_\alpha} \right) (dz_\alpha dz_\beta - dz_\beta dz_\alpha) \quad (3)$$

la quale per una sostituzione di altre variabili qualunque, invece delle variabili z_α , rimane covariante alla funzione omogenea (2); per α e β si debbono prendere tutte le coppie di numeri differenti della serie da 1 ad n . Una determinata applicazione di questa forma (3) serve al presente scopo, e dà contemporaneamente una dimostrazione del teorema che la espressione (2) è un differenziale esatto, quando la forma (3) è identicamente uguale a zero.

(*) *Ricerche intorno alle funzioni intere e omogenee di n differenziali*: Giornale di Crelle, t. 70, pag. 72. Monatsbericht der Berl. Ak. gennajo 1869, pag. 50.

Delle $\frac{n(n-1)}{2}$ varietà $M_{k,i}$ basta considerarne una sola, e questa sia $M_{n-1,n}$. Se poniamo in generale

$$dF_\alpha = F_{\alpha,1} dz_1 + F_{\alpha,2} dz_2 + \cdots + F_{\alpha,n} dz_n \quad (4)$$

alla varietà $M_{n-1,n}$ corrispondono le $n-2$ equazioni

$$\left. \begin{aligned} F_{1,1} dz_1 + F_{1,2} dz_2 + \dots + F_{1,n} dz_n &= 0 \\ F_{2,1} dz_1 + F_{2,2} dz_2 + \dots + F_{2,n} dz_n &= 0 \\ \cdot &\cdot \cdot \cdot \\ F_{n-2,1} dz_1 + F_{n-2,2} dz_2 + \dots + F_{n-2,n} dz_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Se α, β, γ sono numeri qualunque della serie da 1 ad n , e si pone

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial F_{n-1, \alpha} \partial F_{n, \beta}} = (\alpha, \beta) \quad (6)$$

è noto che si ha $(\alpha, \beta) + (\beta, \alpha) = 0$, e dalle (5) si deduce questa equazione fra tre diversi differenziali $dz_\alpha, dz_\beta, dz_\gamma$

$$(\beta, \gamma)dz_\alpha + (\gamma, \alpha)dz_\beta + (\alpha, \beta)dz_\gamma = 0. \quad (7)$$

Intorno alle condizioni da verificarsi perchè una delle grandezze (α, β) nella varietà $M_{n-1, n}$ possa annullarsi, si parlerà estesamente più sotto. Qui si ammetterà soltanto, che l'annullarsi delle (α, β) non possa accadere in alcuna parte di questa varietà, bensì sia possibile in una varietà di primo ordine che giaccia in $M_{n-1, n}$; e che per ogni sistema di valori appartenente alla varietà $M_{n-1, n}$, nel quale (α, β) è positivo o negativo, l'unità $\varepsilon_{\alpha, \beta}$ prenda il segno di (α, β) . La varietà $M_{n-1, n}$ è così fatta che, quando tra le variabili siansi scelte due qualunque z_γ, z_δ , le altre variabili z_α divengono tutte dipendenti da queste, dove ad ogni sistema di valori z_γ, z_δ possono evidentemente corrispondere più sistemi di valori delle variabili z_α .

Sostituiamo adunque nella forma (3) ad ogni differenziale dz_α, dz_β la espressione $\frac{dz_\beta}{dz_\gamma} dz_\gamma, \frac{dz_\alpha}{dz_\gamma} dz_\gamma$, e ad ogni differenziale dz_α, dz_β la espressione $\frac{dz_\alpha}{dz_\delta} dz_\delta, \frac{dz_\beta}{dz_\delta} dz_\delta$; moltiplichiamo la forma per la unità $\varepsilon_{\gamma, \delta}$ e integriamo sopra una parte T semplicemente connessa della varietà $M_{n-1, n}$, dove gli

aumenti dz_γ , dz_δ sono presi soltanto positivi; avremo la espressione

$$I = \iint \sum_{\alpha, \beta} \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial z_\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial z_\alpha} \right) \left(\frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\gamma} \frac{\partial z_\beta}{\partial z_\delta} - \frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\delta} \frac{\partial z_\beta}{\partial z_\gamma} \right) \varepsilon_{\gamma, \delta} dz_\gamma dz_\delta \quad (8)$$

della discussione della quale dobbiamo occuparci prima d'ogni altra cosa.

I determinanti $\frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\gamma} \frac{\partial z_\beta}{\partial z_\delta} - \frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\delta} \frac{\partial z_\beta}{\partial z_\gamma}$ possono esser rappresentati facilmente in modo esplicito, servendosi della equazione (7). Se uno dei numeri α , β è uguale ad uno dei numeri γ , δ , per es. se α è uguale a γ , il corrispondente determinante diverrà $\frac{\partial z_\beta}{\partial z_\delta}$ e la equazione

$$dz_\beta = -\frac{(\delta, \beta)}{(\gamma, \delta)} dz_\gamma - \frac{(\beta, \gamma)}{(\gamma, \delta)} dz_\delta$$

darà il risultato

$$\frac{\partial z_\beta}{\partial z_\delta} = \frac{(\gamma, \beta)}{(\gamma, \delta)}. \quad (9)$$

Con una ripetuta applicazione del medesimo, si ottiene per ogni coppia di numeri α , β

$$\frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\gamma} \frac{\partial z_\beta}{\partial z_\delta} - \frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\delta} \frac{\partial z_\beta}{\partial z_\gamma} = \frac{(\alpha, \beta)}{(\gamma, \delta)}. \quad (9^*)$$

La diretta sostituzione di questi valori trasforma la espressione I nel modo seguente

$$\left. \begin{aligned} I &= H, \\ H &= \iint \sum_{\alpha, \beta} \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial z_\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial z_\alpha} \right) (\alpha, \beta) \frac{\varepsilon_{\gamma, \delta}}{(\gamma, \delta)} dz_\gamma dz_\delta. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Se invece si scioglie I in una somma d'integrali, e nell'integrale

$$\iint \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial z_\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial z_\alpha} \right) \left(\frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\gamma} \frac{\partial z_\beta}{\partial z_\delta} - \frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\delta} \frac{\partial z_\beta}{\partial z_\gamma} \right) \varepsilon_{\gamma, \delta} dz_\gamma dz_\delta$$

s'introducono le variabili z_α , z_β come variabili indipendenti della integrazione, siccome per la (9*) il determinante della sostituzione ha il segno $\varepsilon_{\alpha, \beta} \varepsilon_{\gamma, \delta}$, così questo integrale diviene

$$\iint \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial z_\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial z_\alpha} \right) \varepsilon_{\alpha, \beta} dz_\alpha dz_\beta$$

e si ha la equazione

$$\left. \begin{aligned} I &= L, \\ L &= \sum_{\alpha, \beta} \iint \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial z_\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial z_\alpha} \right) \varepsilon_{\alpha, \beta} dz_\alpha dz_\beta. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Questa dimostra che il valore della espressione I è indipendente affatto dalla scelta delle variabili z_γ, z_δ .

Poichè dalla equazione $(\alpha, \beta) + (\beta, \alpha) = 0$ segue l'altra $\varepsilon_{\alpha, \beta} + \varepsilon_{\beta, \alpha} = 0$, si ha

$$\left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial z_\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial z_\alpha} \right) \varepsilon_{\alpha, \beta} = \frac{\partial a_\alpha}{\partial z_\beta} \varepsilon_{\alpha, \beta} + \frac{\partial a_\beta}{\partial z_\alpha} \varepsilon_{\beta, \alpha}$$

e quindi:

$$L = \sum_\alpha \iint \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial z_{\alpha+1}} \varepsilon_{\alpha, \alpha+1} dz_\alpha dz_{\alpha+1} + \frac{\partial a_\alpha}{\partial z_{\alpha+2}} \varepsilon_{\alpha, \alpha+2} dz_\alpha dz_{\alpha+2} + \dots + \frac{\partial a_\alpha}{\partial z_{\alpha+n-1}} \varepsilon_{\alpha, \alpha+n-1} dz_\alpha dz_{\alpha+n-1} \right) \quad (12)$$

dove si deve sottrarre il numero n da tutti gl'indici maggiori di n . La introduzione delle variabili indipendenti d'integrazione $z_\alpha, z_{\alpha+1}$ dà la equazione:

$$\left. \begin{aligned} &\iint \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial z_{\alpha+1}} \varepsilon_{\alpha, \alpha+1} dz_\alpha dz_{\alpha+1} + \dots + \frac{\partial a_\alpha}{\partial z_{\alpha+n-1}} \varepsilon_{\alpha, \alpha+n-1} dz_\alpha dz_{\alpha+n-1} \right) \\ &= \iint \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial z_{\alpha+1}} + \frac{\partial a_\alpha}{\partial z_{\alpha+2}} \frac{\partial z_{\alpha+2}}{\partial z_{\alpha+1}} + \dots + \frac{\partial a_\alpha}{\partial z_{\alpha+n-1}} \frac{\partial z_{\alpha+n-1}}{\partial z_{\alpha+1}} \right) \varepsilon_{\alpha, \alpha+1} dz_\alpha dz_{\alpha+1}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

e quindi

$$L = \sum_\alpha \iint \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial z_{\alpha+1}} + \frac{\partial a_\alpha}{\partial z_{\alpha+2}} \frac{\partial z_{\alpha+2}}{\partial z_{\alpha+1}} + \dots + \frac{\partial a_\alpha}{\partial z_{\alpha+n-1}} \frac{\partial z_{\alpha+n-1}}{\partial z_{\alpha+1}} \right) \varepsilon_{\alpha, \alpha+1} dz_\alpha dz_{\alpha+1}. \quad (14)$$

La espressione tra parentesi è la derivata completa della funzione a_α rapporto alla variabile $z_{\alpha+1}$, per un valore costante di z_α . Dunque, se nella integrazione da effettuarsi relativamente all'elemento $dz_\alpha dz_{\alpha+1}$ si dà un valore costante alla variabile z_α , si può eseguire immediatamente la integrazione indefinita rispetto alla variabile $z_{\alpha+1}$ in quell'intervallo della stessa, in cui la grandezza $\varepsilon_{\alpha, \alpha+1}$ rimane invariata. I valori delle funzioni ottenute colla integrazione indefinita si devono prendere negativi nei posti dove la variabile $z_{\alpha+1}$ entra nel campo della integrazione, e positivi nei posti dove

ne esce. Siccome le variabili in questa integrazione hanno soltanto incrementi positivi, così, purchè la variabile $z_{\alpha+1}$ si muova sempre verso l'interno del campo della integrazione, per ogni posto d'ingresso $dz_{\alpha+1}$ è una quantità positiva, e per ogni posto di egresso una quantità negativa. Ora bisogna esaminare accuratamente i limiti degl'intervalli per la variabile $z_{\alpha+1}$, i quali si trovano in parte sul contorno della varietà T , e in parte nelle varietà di primo ordine nelle quali la grandezza $(\alpha, \alpha+1)$ è uguale a zero.

Il contorno della varietà T sia determinato in modo che nell'interno di T certe funzioni a un sol valore delle variabili $z_1, z_2, \dots, z_n$ possano ottenere soltanto valori positivi; quando si considerano successivamente le diverse parti del contorno, denoteremo sempre con Θ la funzione relativa. Allora, nel passaggio da un sistema di valori del contorno nell'interno della varietà T , il differenziale $d\Theta$ è una grandezza positiva. Aggiungendo al sistema delle equazioni (5) la equazione

$$d\Theta = \Theta_1 dz_1 + \Theta_2 dz_2 + \dots + \Theta_n dz_n \quad (15)$$

ed eliminando $n-2$ differenziali, si ha

$$R_{\alpha+1} dz_\alpha - R_\alpha dz_{\alpha+1} = (\alpha, \alpha+1) d\Theta. \quad (16)$$

Ora, siccome nella integrazione che si deve effettuare, il valore indefinito della variabile z_α rimane costante, e quindi $dz_\alpha = 0$, per il differenziale $dz_{\alpha+1}$ abbiamo

$$R_\alpha dz_{\alpha+1} = -(\alpha, \alpha+1) d\Theta \quad (17)$$

dove R_α non può essere uguale a zero. Se denotiamo il segno di questa grandezza con ε_α , il differenziale $dz_{\alpha+1}$ per un moto della variabile $z_{\alpha+1}$ diretto verso l'interno del campo della integrazione ha il segno $-\varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha, \alpha+1}$. Dunque per ciò che abbiamo detto, ogni posto d'ingresso è caratterizzato dalla equazione $\varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha, \alpha+1} = -1$, e ogni posto di egresso dalla equazione $\varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha, \alpha+1} = +1$, e la funzione $\varepsilon_{\alpha, \alpha+1} a_\alpha$ ottenuta dalla (14) colla integrazione indefinita rispetto alla variabile $z_{\alpha+1}$ acquista in ogni posto del contorno della varietà T il valore $\varepsilon_\alpha a_\alpha$.

Resta ora da stabilirsi come può annullarsi la grandezza $(\alpha, \alpha+1)$ nella varietà $M_{n-1, n}$ in una varietà del primo ordine. Fra il differenziale di una variabile dipendente z_γ e i differenziali delle due variabili indipendenti z_α e $z_{\alpha+1}$, si ha dalla (7) la equazione

$$(\alpha+1, \gamma) dz_\alpha + (\gamma, \alpha) dz_{\alpha+1} + (\alpha, \alpha+1) dz_\gamma = 0.$$

Siccome nella integrazione rapporto a $z_{\alpha+1}$, è il differenziale $dz_{\alpha}=0$, si ha la equazione

$$(\gamma, \alpha) dz_{\alpha+1} + (\alpha, \alpha+1) dz_{\gamma} = 0 \quad (18)$$

dalla quale dz_{γ} è pienamente determinato finchè la grandezza $(\alpha, \alpha+1)$ è differente da zero. Perciò, finchè questa condizione è soddisfatta, da ogni sistema di valori $(z_1, z_2, \dots, z_n)$, se z_{α} rimane costante e $z_{\alpha+1}$ si aumenta di $dz_{\alpha+1}$, si perviene ad un secondo sistema di valori pienamente determinato. Sopra abbiamo osservato, che quando la varietà $M_{n-1,n}$ è riferita alle variabili indipendenti $z_{\alpha}, z_{\alpha+1}$, ad ogni sistema di valori $z_{\alpha}, z_{\alpha+1}$ possono appartenere più sistemi di valori dell'altra variabile z_{γ} , e da ciò che ora abbiamo detto consegue che il coincidere di più di tali sistemi di valori può solo accadere là dove la grandezza $(\alpha, \alpha+1)$ si annulla. L'annullarsi in una parte della varietà $M_{n-1,n}$ è già stato escluso. Per le varietà di primo ordine, nelle quali $(\alpha, \alpha+1)$ si annulla, io ammetto che, se ad una tal varietà appartiene la combinazione di valori $z_{\alpha}, z_{\alpha+1}$, per un movimento diretto verso l'interno della varietà $M_{n-1,n}$ col valore di z_{α} tenuto costante, la variabile $z_{\alpha+1}$ possa ottenere soltanto un aumento $dz_{\alpha+1}$ di dato segno; che a questo movimento della variabile $z_{\alpha+1}$ corrisponda il passaggio da un determinato sistema di valori z_{γ} a due sistemi di valori z_{γ} differenti tra loro; che la grandezza $(\alpha, \alpha+1)$ sia positiva per uno di questi sistemi di valori, negativa per l'altro; e che la integrazione della espressione $\frac{dz_{\alpha+1}}{(\alpha, \alpha+1)}$ estesa da questo sistema di valori a un altro che abbia una differenza finita con esso, offra un significato preciso. Queste condizioni definiscono la espressione usata sopra, che la varietà $M_{n-1,n}$ non possa contenere nessuna specie di singolarità. Un semplice esempio pel prescritto comportarsi di una varietà del secondo ordine ci è dato, per $n=3$, da $F_1 = \frac{z_1^2}{b_1} + \frac{z_2^2}{b_2} + \frac{z_3^2}{b_3}$, dove b_1, b_2, b_3 sono costanti positive; la equazione $F_1 = C_1$ rappresenta allora la varietà $M_{2,3}$. Le esposte condizioni generali rimuovono il dubbio che può nascere, nella eseguita trasformazione di integrali doppi, dallo annullarsi delle grandezze (γ, δ) nel denominatore. Queste condizioni producono inoltre nella integrazione da eseguirsi nell'interno della varietà T rapporto alla variabile $z_{\alpha+1}$, mantenendo costante z_{α} , il seguente effetto. Ciascuna varietà di primo ordine contenuta in T , nella quale la grandezza $(\alpha, \alpha+1)$ si annulli, è il limite di due campi in uno dei quali $\varepsilon_{\alpha, \alpha+1} = 1$, e nell'altro

varietà T , a cui le equazioni (20) si riferiscono, il segno di R_α . Questa determinazione dà il senso in cui un sistema di valori percorre la relativa varietà chiusa di primo ordine, e coincide colla determinazione fornita dal principio di passaggio, sviluppato dal sig. KRONECKER (*). L'elemento dell'integrale semplice N è la forma lineare (2), l'elemento dell'integrale doppio è la forma bilineare (3) covariante alla forma (2), e la relazione (19) esprime l'eguaglianza dei due integrali.

2.

Ora faremo una doppia applicazione della relazione (19). Per la prima applicazione supporremo che la forma (3) si annulli identicamente, ossia che in tutto il campo G siano soddisfatte per la forma (2) le $\frac{n(n-1)}{2}$ condizioni d'integrabilità

$$\frac{\partial a_\alpha}{\partial z_\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial z_\alpha} = 0. \quad (22)$$

Siccome in conseguenza di ciò la espressione I è uguale a zero, dalla (19) avremo la equazione

$$N = \int (a_1 \varepsilon_1 dz_1 + a_2 \varepsilon_2 dz_2 + \dots + a_n \varepsilon_n dz_n) = 0. \quad (23)$$

Nel contorno della varietà T semplicemente connessa prendiamo un sistema fisso di valori $[z_1(0), z_2(0), \dots, z_n(0)]$ e un sistema di valori mobile $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ e chiamiamo S ed S' le due parti nelle quali è spezzato il contorno da questi due sistemi di valori. La parte S sia quella che cresce quando alle variabili $z_1, z_2, \dots, z_n$ del sistema mobile si danno gli aumenti $\varepsilon_1 dz_1, \varepsilon_2 dz_2, \dots, \varepsilon_n dz_n$. Allora l'equazione (23) mostra che l'integrale

$$\int (\varepsilon_1 a_1 dz_1 + \varepsilon_2 a_2 dz_2 + \dots + \varepsilon_n a_n dz_n) \quad (23^*)$$

esteso alla parte S e l'integrale

$$- \int (\varepsilon_1 a_1 dz_1 + \varepsilon_2 a_2 dz_2 + \dots + \varepsilon_n a_n dz_n) \quad (23^{**})$$

(*) Nella memoria citata, pag. 160.

esteso alla parte S' sono tra loro uguali. Se un sistema di valori $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ percorre la parte S dal sistema $[z_1(0), z_2(0), \dots, z_n(0)]$ sino al sistema $(z_1, z_2, \dots, z_n)$, ogni variabile ζ_α riceve l'aumento $\varepsilon_\alpha d\zeta_\alpha$; se un sistema di valori $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ percorre la parte S' dal sistema $[z_1(0), z_2(0), \dots, z_n(0)]$ sino al sistema $(z_1, z_2, \dots, z_n)$, ogni variabile ζ_α riceve l'aumento $-\varepsilon_\alpha d\zeta_\alpha$. Il valore $\mathfrak{E}$ dell'integrale (23*) è quindi indipendente dalla varietà del primo ordine sopra cui si estende l'integrale stesso dal sistema di valori $[z_1(0), z_2(0), \dots, z_n(0)]$ sino al sistema $(z_1, z_2, \dots, z_n)$, e $\mathfrak{E}$ è quindi una funzione delle variabili $z_1, z_2, \dots, z_n$, che si annulla quando per ogni valore di α sia $z_\alpha = z_\alpha(0)$. Se con $\varkappa$ s'intende una grandezza data, positiva, piccola quanto si vuole, e con η_α una frazione propria, positiva o negativa, si potrà a cagione della continuità della funzione a_α per ogni sistema di valori $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ dare a una variabile z_α un tale aumento ζ_α , non mutando le altre variabili, che si abbia

$$\mathfrak{E}(z_\alpha + \zeta_\alpha) - \mathfrak{E}(z_\alpha) = (a_\alpha + \eta_\alpha \varkappa) \zeta_\alpha. \quad (24)$$

Questa, passando al limite, ci dice che la derivata della funzione $\mathfrak{E}$ rapporto alla variabile z_α è uguale alla grandezza a_α , e mostra così, come doveva essere, la integrabilità della espressione (2) nella supposizione delle equazioni (22).

Se è data una funzione $\mathfrak{F}$ delle variabili $z_1, z_2, \dots, z_n$, la quale per il sistema di valori $z_\alpha = z_\alpha(0)$ diviene uguale a zero, e le cui derivate prese rispetto a z_α sono uguali rispettivamente alle quantità a_α , e se può darsi per ogni sistema di valori $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ del campo G a ciascuna variabile z_α un aumento ζ_α indipendente, quanto alla sua grandezza, da questo sistema di valori, il quale, essendo $\varkappa$ una grandezza positiva, data, piccola quanto si vuole, corrisponde alla equazione

$$\mathfrak{F}(z_\alpha + \zeta_\alpha) - \mathfrak{F}(z_\alpha) = (a_\alpha + \eta_\alpha \varkappa) \zeta_\alpha \quad (24^*)$$

si può dimostrare che questa funzione $\mathfrak{F}$ è identica colla funzione sopra definita $\mathfrak{E}$. Il mio amico e collega KORTUM verbalmente mi ha fatto avvertire, che la condizione (24*), necessaria per la dimostrazione, dev'essere espressa-

mente formulata, poichè la equazione $\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z_\alpha} = a_\alpha$ può sussistere benissimo,

senza che questa condizione sia soddisfatta. Questa riflessione è di natura molto affine a quelle fatte dal sig. HEINE nella memoria *Sopra le serie trigonometriche*, Giornale di Crelle-Borchardt, t. 71, pag. 353.

Per tutte le funzioni F_γ del dato sistema supporremo perciò che la equazione

$$F_\gamma(z_\alpha + \zeta_\alpha) - F_\gamma(z_\alpha) = \left(\frac{\partial F_\gamma}{\partial z_\alpha} + \eta_\alpha \kappa \right) \zeta_\alpha$$

possa essere soddisfatta nel modo dichiarato. Allora la espressione (23*), ammesso che sia

$$a_\alpha = \frac{\partial F_{n-1}}{\partial z_\alpha} \quad (25)$$

dà l'equazione

$$F_{n-1}(z_1, z_2, \dots, z_n) - F_{n-1}(z_1(0), z_2(0), \dots, z_n(0)) = \sum_\alpha \int \frac{\partial F_{n-1}}{\partial z_\alpha} \varepsilon_\alpha dz_\alpha. \quad (25^*)$$

La corrispondente supposizione vale anche per la effettuazione di ogni integrazione definita, e quindi anche per quella che si fa per ottenere la equazione (19).

La seconda applicazione della equazione (19) si ottiene prendendo per le funzioni a_α

$$a_\alpha = \frac{\partial F_{n-1}}{\partial z_\alpha} F_n. \quad (26)$$

In conseguenza di questa determinazione, si ha

$$\frac{\partial a_\alpha}{\partial z_\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial z_\alpha} = \frac{\partial F_{n-1}}{\partial z_\alpha} \frac{\partial F_n}{\partial z_\beta} - \frac{\partial F_{n-1}}{\partial z_\beta} \frac{\partial F_n}{\partial z_\alpha} \quad (26^*)$$

e la somma che bisogna prendere nella (10) rispetto agl'indici α e β diviene uguale al determinante funzionale del sistema $F_1, F_2, \dots, F_n$

$$\sum_{\alpha, \beta} \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial z_\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial z_\alpha} \right) (\alpha, \beta) = \Delta. \quad (27)$$

Sostituendo questa espressione nell'integrale H , e la espressione (26) nell'integrale N , le (10) e (19) danno la equazione

$$\iint \Delta \frac{\varepsilon_{\gamma, \delta}}{(\gamma, \delta)} dz_\gamma dz_\delta = \int F_n \sum_\alpha \frac{\partial F_{n-1}}{\partial z_\alpha} \varepsilon_\alpha dz_\alpha. \quad (28)$$

La deduzione della equazione (19) richiede, come abbiamo precedentemente osservato, la supposizione che allora abbiamo fatto. Poichè ora si applica la sostituzione (26), dovranno soddisfare a questa supposizione tanto le derivate prime quanto le seconde delle funzioni F_γ .

La equazione (28) nel caso $n=2$ si riduce alla

$$\iint \left(\frac{\partial F_1}{\partial z_1} \frac{\partial F_2}{\partial z_2} - \frac{\partial F_1}{\partial z_2} \frac{\partial F_2}{\partial z_1} \right) dz_1 dz_2 = \int F_2 \left(\frac{\partial F_1}{\partial z_1} \varepsilon_1 dz_1 + \frac{\partial F_2}{\partial z_2} \varepsilon_2 dz_2 \right) \quad (29)$$

stabilita da RIEMANN nella memoria: *Sopra le superficie di area minima entro un dato contorno*, pag. 12. Un assiduo studio di questa equazione mi ha condotto alla dimostrazione del teorema sopra enunciato, che adesso passo ad esporre.

3.

Supponiamo che esistano due sistemi di valori differenti tra loro $[z_1(0), z_2(0), \dots, z_n(0)]$, ossia $W(0)$, e $[z_1(1), z_2(1), \dots, z_n(1)]$, ossia $W(1)$, che soddisfacciano alle n equazioni (1)

$$F_1 = C_1, F_2 = C_2, \dots, F_n = C_n.$$

Consideriamo ora una qualunque della varietà $M_{k,l}$ e questa sia sempre la varietà $M_{n-1,n}$. Secondo la fatta supposizione, sia essa semplicemente connessa, e nella medesima tanto la equazione $F_{n-1} = C_{n-1}$, quanto la equazione $F_n = C_n$ rappresentino varietà di primo ordine, che da un sistema di valori della varietà formante il contorno si estendano semplicemente sino a un altro sistema di valori dello stesso contorno. Quindi $M_{n-1,n}$ rimarrà divisa, tanto dalla varietà di primo ordine $F_{n-1} = C_{n-1}$, quanto dalla varietà di primo ordine $F_n = C_n$, in due varietà semplicemente connesse (*), le quali sono caratterizzate rispettivamente dalle disuguaglianze $F_{n-1} - C_{n-1} > 0$, $F_{n-1} - C_{n-1} < 0$ ed $F_n - C_n > 0$, $F_n - C_n < 0$. I sistemi di valori $W(0)$ e $W(1)$ appartengono ciascuno ad ambedue le varietà $F_{n-1} = C_{n-1}$ ed $F_n = C_n$, ed in ambedue il passaggio dal sistema di valori $W(0)$ al sistema di valori $W(1)$ è possibile in un sol modo. Per la supposizione fatta, le varietà $F_{n-1} = C_{n-1}$ ed $F_n = C_n$ hanno in comune nella varietà $M_{n-1,n}$ o un numero finito di sistemi di valori differenti tra loro, o esse coincidono completamente in parti finite. Bisogna considerare separatamente questi due casi possibili.

Nel primo caso, sia W il primo sistema di valori nel quale le varietà di primo ordine $F_{n-1} = C_{n-1}$ ed $F_n = C_n$ s'incontrano muovendosi, nel modo che

(*) RIEMANN: *Fondamenti*, ecc. n.º 6.

abbiamo detto, a partire da $W(0)$. Denotiamo con S la parte della varietà $F_{n-1} = C_{n-1}$ che si estende da $W(0)$ a W , e con S' la parte della varietà $F_n = C_n$ che si estende da $W(0)$ a W . Allora S ed S' formeranno il contorno di una parte finita, semplicemente connessa, della varietà $M_{n-1,n}$ e riferiamo a questa parte T la equazione (28). In questa equazione l'integrale $\int_{F_n} \sum_{\alpha} \frac{\partial F_{n-1}}{\partial z_{\alpha}} \varepsilon_{\alpha} dz_{\alpha}$ è composto di due parti, la prima delle quali è estesa ad S , la seconda ad S' . Il primo integrale esteso ad S ha il valore zero, perchè, secondo la definizione, per ogni sistema di valori di S l'aggregato $\sum_{\alpha} \frac{\partial F_{n-1}}{\partial z_{\alpha}} \varepsilon_{\alpha} dz_{\alpha}$ si annulla. Nel secondo integrale esteso ad S' la funzione F_n ha il valore costante C_n , quindi

$$\int_{F_n} \sum_{\alpha} \frac{\partial F_{n-1}}{\partial z_{\alpha}} \varepsilon_{\alpha} dz_{\alpha} = C_n \int \sum_{\alpha} \frac{\partial F_{n-1}}{\partial z_{\alpha}} \varepsilon_{\alpha} dz_{\alpha}.$$

L'integrale $\int \sum_{\alpha} \frac{\partial F_{n-1}}{\partial z_{\alpha}} \varepsilon_{\alpha} dz_{\alpha}$ è, a cagione della (25*), uguale alla differenza dei valori della funzione F_{n-1} per i valori W e $W(0)$ epperò, nelle vigenti relazioni, uguale a zero. Dunque si annulla anche il secondo integrale e quindi anche tutto il valore del primo membro della (28). Per conseguenza, colle supposizioni fatte, si ha la equazione

$$\iint \Delta \frac{\varepsilon_{\gamma, \delta} dz_{\gamma} dz_{\delta}}{(\gamma, \delta)} = 0. \quad (30)$$

Fin qui non ci siamo serviti di alcuna supposizione speciale rispetto al determinante funzionale Δ . Ma si deve ammettere che Δ in tutto il campo G , e quindi anche in tutta la varietà T , non muti mai segno. Ora poichè nel precedente integrale l'elemento $\frac{\varepsilon_{\gamma, \delta}}{(\gamma, \delta)} dz_{\gamma} dz_{\delta}$ è sempre positivo, e la grandezza Δ sempre positiva o sempre negativa, il valore dell'integrale non può annullarsi, e la equazione (30) contiene una contraddizione. Dunque l'ipotesi che le equazioni (1) siano soddisfatte da ambedue i sistemi di valori $W(0)$ e $W(1)$, è incompatibile colla supposizione che in $M_{n-1,n}$ le varietà di primo ordine $F_{n-1} = C_{n-1}$ ed $F_n = C_n$ abbiano in comune un numero finito di sistemi di valori finiti, differenti tra loro.

Il secondo caso che deve considerarsi quanto ai sistemi di valori $W(0)$, $W(1)$, è quello in cui le varietà di primo ordine $F_{n-1} = C_{n-1}$ ed $F_n = C_n$

lore $F_n = X_n(0)$ soddisfacciano alle equazioni $z_\alpha = z_\alpha(0)$. Allora il sistema di valori $[z_1(1), z_2(1), \dots, z_n(1)]$ che soddisfa alle equazioni (33) è quello che corrisponde al valore $F_n = X_n$.

Il problema così espresso è contenuto nel problema generale: date in un certo campo delle variabili reali $x, y^1, y^2, \dots, y^n$ le n funzioni $f^\alpha(x, y^1, y^2, \dots, y^n)$ a un sol valore, reali, finite e continue, integrare il sistema di equazioni differenziali

$$\frac{dy^\alpha}{dx} = f^\alpha(x, y^1, y^2, \dots, y^n)$$

in modo che le n funzioni $y^1, y^2, \dots, y^n$ variino con continuità mentre la variabile indipendente x percorre un certo cammino finito, e per il valore $x = x_0$ contenuto in questo cammino prendano valori dati $y^\alpha = y_0^\alpha$. In una ricerca che io ho intrapresa in connessione col presente lavoro, ma che ho pubblicata indipendentemente (*) si deduce, sotto certe condizioni di continuità, per mezzo di un processo graduato, un sistema di funzioni $y^1, y^2, \dots, y^n$ che soddisfa alle poste condizioni colla precisione che si vuole. Sia poi $\tilde{y} = \tilde{Y}$ una tale soluzione; si spezzi l'intervallo della variabile esteso da x_0 a $x_0 + A$ interpolando nell'ordine della loro grandezza i valori $x_1, x_2, \dots, x_{p-1}$; denoti ε_a una frazione propria, positiva o negativa, λ una data grandezza positiva, piccola quanto si vuole; il numero a vada da 1 a $p-1$; il sistema di valori $\tilde{y} = \tilde{Y}_a$ appartenga al valore $x = x_a$, e si abbia la serie di equazioni

$$\tilde{Y}_{a+1} - \tilde{Y}_a = [f^\alpha(x_a, \tilde{Y}_a^1, \tilde{Y}_a^2, \dots, \tilde{Y}_a^n) + \varepsilon_a \lambda](x_{a+1} - x_a).$$

Allora in quel lavoro è dimostrato che il sistema $\tilde{Y}$ è identico col sistema y^α menzionato di sopra. Coerentemente alle osservazioni fatte sopra per le equazioni (24) e (24*), io formulo il verificarsi della precedente serie di equazioni espressamente come una condizione. Nella integrazione dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie, che si considerano nei lavori da me pubblicati, è supposto che questa condizione è soddisfatta.

(*) *Disamina della possibilità d'integrare completamente un sistema dato di equazioni differenziali ordinarie*: Annali di Matematica, serie 2^a, t. 2, pag. 288.

Questo dà il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\frac{dz_\alpha}{dF_{n-1}} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial F_{n-1, \alpha}} \quad (38)$$

dove le grandezze z_α variano con continuità quando la variabile indipendente F_{n-1} va dal valore $X_{n-1}(0)$ al valore X_{n-1} , e per il valore $F_{n-1} = X_{n-1}(0)$ devono soddisfare alle equazioni $z_\alpha = z_\alpha(0)$. Della integrazione del sistema (38) vale tutto ciò che si è detto della integrazione del sistema (35), e il sistema cercato $[z_1(2), z_2(2), \dots, z_n(2)]$ che corrisponde al valore $F_{n-1} = X_{n-1}$, può, sotto le relative condizioni, riguardarsi come conosciuto.

È chiaro che si può ripetere il processo indicato e pervenire a una determinazione del sistema $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ che soddisfa alle equazioni (31), colla successiva integrazione di n sistemi di equazioni differenziali ordinarie che hanno la forma (35). Qui ha però significato essenziale la circostanza, che se in queste integrazioni si muta l'ordine delle funzioni F_α , muta anche il processo di tutte le operazioni per le quali si ottiene il risultato definitivo. Quindi non è in alcun modo evidente che le determinazioni che si ottengono con i differenti processi conducano allo stesso risultato. Ma poichè la ricerca fatta nel primo articolo dà il modo di conoscere le condizioni sufficienti perchè il sistema (31) determini in modo unico le grandezze z_α , la supposizione di quelle condizioni dà diritto ad asserire che, per mezzo del processo esposto, le grandezze $z_1, z_2, \dots, z_n$ vengono rappresentate nella loro unica dipendenza dai valori $X_1, X_2, \dots, X_n$; nel che consisteva appunto lo scopo di questo processo.

5.

Ora applichiamo le considerazioni esposte ad un sistema di funzioni complesse. Sia il numero fin qui denotato con n uguale a un numero pari $2m$, sia i uguale alla unità imaginaria $\sqrt{-1}$, gl'indici $p, q, \dots$ trascorran la serie dei numeri da 1 ad m , e tanto due funzioni F_α quanto due variabili z_β siano combinate per mezzo delle equazioni

$$f_p = F_p + iF_{m+p}, \quad y_q = z_q + iz_{m+q}. \quad (39)$$

Affinchè una espressione f_p sia una funzione complessa delle m variabili complesse y_q , è necessario e sufficiente che tra i differenziali

$$df_p = dF_p + idF_{m+p}, \quad dy_q = dz_q + idz_{m+q} \quad (39^*)$$

si abbia la equazione

$$df_p = \sum_q f_{p,q} dy_q \quad (40)$$

dove le $f_{p,q}$ denotano espressioni complesse, finite, dipendenti dalle variabili $z_1, z_2, \dots, z_n$. Se questa relazione si confronta colla relazione che ha luogo in generale

$$\left. \begin{aligned} df_p &= dF_p + i dF_{m+p} = \\ &= \sum_q \left(\frac{\partial F_p}{\partial z_q} + i \frac{\partial F_{m+p}}{\partial z_q} \right) dz_q + \sum_q \left(\frac{\partial F_p}{\partial z_{m+q}} + i \frac{\partial F_{m+p}}{\partial z_{m+q}} \right) dz_{m+q} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

si ha il sistema di relazioni

$$f_{p,q} = \frac{\partial F_p}{\partial z_q} + i \frac{\partial F_{m+p}}{\partial z_q} = -i \left(\frac{\partial F_p}{\partial z_{m+q}} + i \frac{\partial F_{m+p}}{\partial z_{m+q}} \right) \quad (42)$$

che reciprocamente ha per conseguenza l'equazione (40).

Supporremo che per ciascuna delle espressioni f_q abbia luogo la relativa equazione (40), ossia che le espressioni f_q formino un sistema di funzioni delle variabili complesse $y_1, y_2, \dots, y_m$. Ora la soluzione algebrica delle m equazioni (40) dia il sistema di determinazioni

$$dy_q = \sum_p y_{q,p} df_p. \quad (43)$$

Se qui è permesso di riguardare le grandezze reali $z_1, z_2, \dots, z_{2m}$ come funzioni dei valori reali $F_1, F_2, \dots, F_{2m}$, le espressioni $y_{q,p}$ divengono funzioni dei valori $F_1, F_2, \dots, F_{2m}$, e le equazioni (43) esprimono il fatto, che le grandezze y_q sono funzioni complesse delle grandezze complesse f_p . Quindi, tostochè per mezzo delle condizioni sviluppate nei primi articoli, le grandezze reali $z_1, z_2, \dots, z_{2m}$ sono funzioni a un sol valore dei valori reali $f_1, f_2, \dots, f_{2m}$, si è in diritto d'invertire questa relazione per il sistema di funzioni $f_1, f_2, \dots, f_{2m}$ delle variabili complesse $y_1, y_2, \dots, y_{2m}$, e di considerare le grandezze $y_1, y_2, \dots, y_m$ come funzioni complesse a un sol valore delle variabili complesse $f_1, f_2, \dots, f_m$.

Per formare in questo caso il determinante funzionale Δ delle funzioni reali $F_1, F_2, \dots, F_{2m}$ rapporto alle variabili reali $z_1, z_2, \dots, z_{2m}$, denotiamo con $f'_p, y'_q, f'_{p,q}$ le espressioni rispettivamente coniugate ad $f_p, y_q, f_{p,q}$. Dalla (39*) si hanno allora le equazioni

$$df'_p = dF_p - i dF_{m+p}, \quad dy'_q = dz_q - i dz_{m+q} \quad (44)$$

e dalla (40) le equazioni

$$df'_p = \sum_q df'_{p,q} dy'_q. \quad (45)$$

Ora tra i differenziali introdotti sussistono tre sistemi di $2m$ equazioni lineari; per mezzo del primo si esprimono dF_p , dF_{m+p} per df_p , df'_p , per mezzo del secondo df_p , df'_p per dy_q , dy'_q , per mezzo del terzo dy_q , dy'_q per dz_q , dz_{m+q} . Ciascuno di questi sistemi di equazioni lineari ha un proprio determinante, e per teoremi noti si ha che il determinante funzionale cercato Δ è uguale al prodotto di questi tre determinanti. Denotiamo con $|f_{p,q}|$ il determinante dell'equazioni (40), con $|f'_{p,q}|$ quello dell'equazioni (45), sarà facile a vedersi che per i tre menzionati sistemi di $2m$ equazioni i determinanti del primo e del terzo hanno valori reciproci, mentre il determinante del secondo è uguale al prodotto $|f_{p,q}| \cdot |f'_{p,q}|$. Dunque il prodotto dei tre determinanti è uguale al secondo di essi, e per il determinante funzionale Δ si ha la espressione

$$\Delta = |f_{p,q}| \cdot |f'_{p,q}|. \quad (46)$$

Separando nel determinante $|f_{p,q}|$ le parti reale e imaginaria, essendo $|f'_{p,q}|$ coniugato ad $|f_{p,q}|$, si ha

$$|f_{p,q}| = A + Bi, \quad |f'_{p,q}| = A - Bi \quad (47)$$

e quindi:

$$\Delta = A^2 + B^2. \quad (48)$$

Dunque il determinante funzionale Δ è la somma di due quadrati, e perciò essenzialmente positivo, come ha osservato anche il signor KRONECKER (*).

Se le grandezze $z_1, z_2, \dots, z_{2m}$, in virtù delle condizioni sopra esposte, debbono essere funzioni a un sol valore delle variabili $F_1, F_2, \dots, F_{2m}$, nel campo G il determinante funzionale Δ deve avere da per tutto lo stesso segno. Nel caso presente Δ non può divenir mai negativo, e può annullarsi soltanto quando le parti reali A e B contemporaneamente si annullano. Dunque nel campo G non possono essere contenuti quei sistemi di valori per i quali avvien questo accidente. La totalità dei relativi sistemi di valori non può mai formare altro che una varietà $(2m-2)^{\text{upla}}$. Nel caso $2m=2$, questi sistemi di valori debbono essere, come è noto, valori singolari.

Bonn, 6 ottobre, 1870.

(*) Nel luogo citato, pag. 177.