„Neue österreichische Sterbetafeln.“ Aus: Ergebnisse der Volkszählung vom 31. Dezember 1910 in Österreich. 4. Heft des ersten Bandes der „Neue Folge der österreichischen Statistik“, herausgegeben von der k. k. statistischen Zentralkommission, Wien 1917, mit dem Anhang: „Die Ausgleichung von Absterbeordnungen aus der Bevölkerungsstatistik“. Von Hofrat Dr. Ernst Blaschke, korr. Mitglied der statistischen Zentralkommission; Sonderabdruck aus dem Dezemberheft der statistischen Monatsschrift, XXI. Jahrgang, Brünn 1916.

Verfasser geht bei der Berechnung der neuen Sterblichkeitstafeln auch einen neuen Weg. Es ist bekannt, daß bei den verschiedenen Versuchen, die Sterblichkeitserfahrungen einer einfachen mathematischen Formel anzupassen, keiner seinen Zweck voll erfüllte. Der Gompertz-Makehamsche Ansatz, nach dem für die Zahl der Lebenden vom Alter x die vierparametrische Formel $l_x = k \cdot s^x g^{q^x}$ gelten soll, schmiegt sich nur innerhalb der Altersgrenze von $x=28$ bis $x=77$ den Beobachtungen ganz an und versagt für die jüngeren Alter von $x=15$ bis $x=28$, wie auch über das hohe Greisenalter hinaus von $x=78$ an. Ebensovienig erweist sich die Lexissche Formel, nach der die Zahl der Toten durch das Gaußsche Fehlergesetz dargestellt werden soll, als geeignet, den ganzen Komplex der statistischen Erfahrungen über die Sterblichkeit zusammenzufassen. Wie schon Lexis selbst hervorhebt, genügt sie nur für Zahlenwerte von x , die um das angenommene und der Berechnung zu Grunde liegende Normalalter eine kurze Strecke herumliegen, und trifft für weiter abstehende nicht mehr zu. Ihr Gültigkeitsbereich ist sogar ein geringerer als der der Gompertz-Makehamschen Formel. Er umfaßt nur 30–48% der Todesfälle. Ebenso ist aber auch ihre Verwendung eine beschränktere, indem sie nicht jene Vorteile gewährt, die sich an die erstere durch Vereinfachung mancher Versicherungsrechnungen knüpfen. Dies der Grund, weshalb bisher die meisten Sterblichkeitstafeln nur an die Gompertz-Makehamsche Formel angepaßt worden sind.

Doch die Idealform einer Sterbetafel gibt auch sie nicht. Was sie zur Darstellung bringt, ist nur der typische Verlauf der menschlichen Absterbeordnung, keineswegs aber deren feineren Nuancierungen und charakteristischen Einzelheiten in ihr, deren Aufdeckung und Untersuchung gerade vom wissenschaftlichen Interesse wäre. An diesem Punkte, dem Versuche, der Herstellung einer solchen Idealform für die Sterblichkeit, setzt die Tätigkeit des Verfassers ein. Seine Methode besteht, wie gleich hier erwähnt werden soll, in einer Kombination der beiden erwähnten mathematischen Formeln, nämlich in einer ersten Ausgleichung auf Grundlage der Gompertz-Makehamschen Formel und einer nachfolgenden der übrig bleibenden Abweichungen — nach der von Lexis.

Sie beginnt mit der unerläßlichen Aufarbeitung des statistischen Rohmaterials, das in den beiden großen Volkszählungen der Jahre 1900 und 1910 und sodann in den Geburten- und Sterberegistern der Jahre 1900 bis 1910, letztere noch übergreifend in das Jahr 1911, angesammelt ist und als erstes die sogenannte Rauh Tafel der Absterbeordnung (pag. 11) für österreichische männliche Personen nach den Beobachtungen der Jahre 1906—1911 gibt. Ihre Zahlenreihen widersprechen noch dem Gesetze der Stetigkeit und, um alles, was einzig dem Zufall seine Entstehung verdankt, aus ihnen auszuschneiden, wird sie nach den hiefür gebräuchlichen Methoden geglättet. So entsteht die zweite Tafel (pag. 13) „die unausgeglichene, (geglättete) Absterbeordnung“.

Erst von da ab ist das Verfahren nicht mehr ein rein mechanisches, sondern wird analytisch. Zuerst kommt eine Ausgleichung nach der Gompertz-Makehamschen Formel an die Reihe. (Tafel pag. 20.) Für die in ihr vorkommenden Konstanten s , g und q erhält Verf. die Werte —

Männer: $s = 0.99448674$ Frauen: $s = 0.992761..$ (0.995207)

$g = 0.99846953$ $q = 0.999753..$ (0.99658)

$q = 1.09263229$ $g = 1.1152935$ (1.08229)

denen eines nicht uninteressanten Vergleichs halber die analogen Werte dieser Konstanten beigesetzt sind, welche zur Ableitung der Sterbetafel der 23 deutschen Versicherungsgesellschaften dienten. — Sodann bildet Verf. die Differenzen der Zahlen der beiden Tafeln, der geglätteten und der nach der Gompertz-Makehamschen Formel ausgeglichenen. Diese zeigen noch keineswegs den Charakter rein zufälliger Abweichungen, im Gegenteil sie rufen mehr den Eindruck von solchen systematischer Natur hervor. Sie wechseln nämlich ihre Vorzeichen nur selten und nicht so oft, wie es den Gesetzen des Zufalls entsprechen sollte, nach denen die Zahl der Zeichenwechsel und -folgen nahezu die gleiche sein müßte, sie tragen vielmehr durch größere Strecken der Altersgrenzen x das gleiche Zeichen und bilden so zusammenhängende Formen, die sich wie Wülste der ausgeglichenen Sterbetafel überlagern. Eine Übersicht dieser Wülste enthält Tafel pag. 9* und pag. 21 des Anhanges. Sie sind es, denen Verf. von nun ab sein besonderes Studium zuwendet.

Zunächst behandelt er die Frage, inwieweit die in ihnen auftretenden Extremwerte, wie Maxima und Minima, Wendestellen reeller Natur sind, d. h. den durch die Erfahrung gegebenen Zahlen der Sterblichkeit organisch oder nur den Zufallsgesetzen gemäß anhaften. Diese Wülste zeigen sich als negative Auflagerungen in den Altersgrenzen 3—16 und 43—86, und als positive zwischen $x = 17—26$, dann $x = 28—43$ und endlich in den höchsten Alterszahlen $x = 81—99$. Sie sind sämtlich eingipflig mit Ausnahme des größten unter ihnen, des von $x = 43—86$ reichenden. In diesem scheinen drei Gipfelpunkte für $x = 57, 62$ und 73 vorhanden zu sein. Aber ein Vergleich derselben mit dem analogen aus der Volkssterbetafel für die Periode 1901—1906 folgenden Wulst zeigt, daß diese 3 Extrempunkte doch nur als zufällige Schwankungen zu bezeichnen sind und als solche behandelt sie auch Verf. in den folgenden Rechnungen.

Sodann kommt die Hauptfrage in Betracht, nämlich die Ausgleichung dieser Wülste. Hiezu verwendet er zwei Methoden, die graphische und wiederum eine analytische auf Grundlage des Gaußschen Fehlergesetzes, aber nach den allgemeineren Methoden der Kollektivmaßlehre, wie sie namentlich von Bruns aufgestellt wurden.

Die graphische Ausgleichung wurde von zwei Zeichnern unabhängig voneinander ausgeführt. Die Differenzen zwischen den beiden von ihnen erhaltenen Kurven teilt Verf., pag. 23–24, des Anhanges mit, ebenso ist im Anhang ein Abdruck einer der beiden Kurven gegeben. Die Differenzen selbst halten sich im allgemeinen zwischen engen Grenzen. Nur an einigen Stellen zwischen $x = 43$ –49, ferner $x = 79$ –84 steigen sie ein wenig an und erreichen bei $x = 45$ mit 30% und $x = 81$ mit ungefähr 20% ihre Maxima. Zwischen beiden wurde als Ausgleichswert das Mittel gewählt, das in den aus ihnen abgeleiteten Reihen der Verstorbenen und der Sterbenswahrscheinlichkeiten keinerlei neue Diskontinuitäten oder isolierte Schwankungen auftreten ließ, sondern überall die erforderliche Kontinuität der Reihen, sowie ihre Übereinstimmung mit den Beobachtungszahlen, namentlich an den ausgezeichneten Punkten, wie dem Minimum der Sterbenswahrscheinlichkeit für das Alter $x = 14$ den Wendestellen in den Altersklassen $x = 27$ und 95 und dem Maximum der Totenzahlen bei $x = 71$ aufwies.

An diese mechanische Ausgleichung, mit der sich Verf. nicht zufrieden gibt, schließt sich die zweite, rein analytische an, nach der Brunsschen Reihe. Nach einer kurzen und klaren Auseinandersetzung der Grundsätze dieses neuen Verfahrens werden für die in den Tafeln vorkommenden fünf Wülste der Altersklassen 3–16, 17–26, 28–42, 43–86 und 87–100 je eine dreigliedrige Brunssche Reihe abgeleitet. Die Konstanten derselben sind für die Männertafel pag. 34 mitgeteilt, für die Tafel der Frauen, bei der jedoch nur drei Wülste für $x = 2$ –24, 27–83 (diese wurde als zweigipflig und daher durch eine Reihe mit 4 Gliedern dargestellt) und 84–90 auftreten, pag. 10*. Hiemit erscheint die Schlußausgleichung erzielt. (Tafel pag. 36–37.) An sie schließt sich an die ausgeglichene Absterbeordnung, ferner eine Tafel der übrigbleibenden Fehler als Differenzen zwischen den Zahlen der Schlußtafel und der geglätteten. Verf. bemerkt zu ihr, daß die Summe der positiven und negativen Abweichungen mit 11588 und 15174 gegenüber der Zahl von einer Million ursprünglich Lebender als sehr klein zu bezeichnen ist, daß die ersten und zweiten Differenzen der Verstorbenen eine außerordentlich regelmäßig verlaufende Reihe geben, sich nirgends erhebliche Abweichungen zwischen den ausgeglichenen und den durch die ursprüngliche Rauftafel erhaltenen empirischen Zahlen zeigen und daher die Schlußausgleichung den Erfordernissen des Problems fast vollständig gerecht wird.

Als ihr Hauptergebnis ist die Tatsache anzusehen, daß sich die Zahlen der männlichen Lebenden l_x einer Absterbeordnung durch die Gompertz-Makehamsche Formel

$$l_x = k \cdot s^x g^{q^x}$$

aber unter Hinzufügung von fünf einzelnen für die Altersklassen $x = 3$ –16, 17–26, 28–42, 43–86 und 87–100 geltenden dreigliedrigen Reihen insoweit darstellen lassen, daß durch diese mathematische Form keine der als typisch erachteten Eigenschaften ausgeglichen und damit zum Verschwinden gebracht trotzdem aber eine glatt verlaufende Tafel erzielt wurde. Zu diesem nicht genug hervorzuhebenden wissenschaftlichen Ergebnis kommt noch das praktische Bedürfnis hinzu, dem die Tafel zu dienen hat. Sie erfüllt, wie Verf. meint, alle Vorbedingungen für ihre Verwendung in der Versicherungsmathematik, sowohl

was die den Beobachtungen völlig entsprechende Bewertung der Versicherungsleistungen anlangt, als auch die mannigfachen praktischen Rechenvorteile, die sich an eine rein nach der Gomperz-Makehamschen Formel adjustierte Absterbeordnung knüpfen. Die Publikation der Tafeln, die eine Art Standardtafel repräsentieren, an denen es bisher in Österreich gefehlt hat, verdient eine besondere Würdigung und Verf., unter dessen Leitung die weitläufigen und umfassenden Rechnungen durchgeführt wurden, ist hiezu nur zu beglückwünschen.

Oppenheim.

Newton, Cotes, Gauß, Jacobi. Vier grundlegende Abhandlungen über Interpolation und genäherte Quadratur (1711, 1722, 1814, 1826). Übersetzt bezw. herausgegeben und mit einem erläuternden Anhang versehen von Prof. Dr. Arnold Kowaleski, Privatdozent der Philosophie in Königsberg in Pr. Mit 6 Textfiguren. Leipzig. Veit & Co., 1917. VI u. 103 pp. 8°.

Verf. will mit seinem Buche die Aufmerksamkeit seiner speziellen Fachkollegen auf die mathematischen Methoden der Interpolation aufmerksam machen. Er sagt, daß diese ein wertvolles Instrument zur Verbesserung des mathematischen Apparates der experimentellen Psychologie, leider aber und zum Nachteile der Wissenschaft in der bezüglichen Fachliteratur wenig oder gar nicht bekannt sind. Die von ihm übersetzten bezw. bloß neu herausgegebenen Abhandlungen sind die folgenden vier: 1. Die Differentialmethode von Newton aus dem Jahre 1711, wenn auch die Hauptsätze aus ihr sich schon in den 1687 erschienenen Principiis vorfinden, 2. die Abhandlung von Roger Cotes, de methodo differentiali Newtoniana aus dessen, von Robert Smith im Jahre 1722 herausgegebenen Opuscula mathematica, 3. die Abhandlung von Gauß: Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi aus den Göttinger Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften 1814 und endlich die Jacobische Arbeit aus dem ersten Bande des Crelleschen Journal für Mathematik „Über Gauß' neue Methode, die Werte der Integrale näherungsweise zu finden“.

Daß sowohl die Übersetzung wie auch die im Anhang hinzugefügten sachlichen und historischen Noten und Zusätze stets als zutreffende zu bezeichnen sind, dafür bürgt der Name des Bruders des Verf., des bekannten Mathematikers, der dem Verf., wie er selbst im Vorwort hervorhebt, sowohl bei der Korrektur als auch betreffs verschiedener fachmännischer Auskünfte seine Hilfe angedeihen ließ. Es dürfte damit das Buch nicht bloß in den Kreisen der Psychologen, für die es vorzugsweise bestimmt ist, sondern auch unter Mathematikern Verbreitung finden.

Oppenheim.

Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Von Serret-Scheffers. Erster Band: Differentialrechnung. 6. u. 7. Auflage. B. G. Teubner, 1915. 670 + XVIII Seiten.

Das bekannte Lehrbuch von Serret-Scheffers liegt nunmehr bereits in der sechsten und siebenten (Doppel-) Auflage vor, ein hinlänglicher Beweis für die Beliebtheit des Buches. Es ist vielleicht desto dringender notwendig, einmal offen darauf hinzuweisen, daß das Buch auch in seiner jetzigen Gestalt trotz