Zur Vervollständigung der Ausgaben der Schrift des Jordanus Nemorarius: „Tractatus de numeris datis.“

Von R. Daublebsky von Sterneek in Wien.

(Mit 1 Facsimile.)

Das von Jordanus Nemorarius verfasste Werk „Tractatus de numeris datis“ ist bisher zweimal herausgegeben worden, u. zw. durch die Herren P. Treutlein und M. Curtze im 24., resp. 36. Jahrgange der Schlömilch'schen „Zeitschrift für Mathematik und Physik“. Die zur Herausgabe benützten Handschriften enthielten jedoch nicht das vollständige Werk; namentlich war der letzte Theil desselben darin gar nicht oder doch nur in unvollständiger und veränderter Form enthalten.

Da sich die k. k. Hofbibliothek in Wien im Besitze von vollständigen Handschriften des erwähnten Werkes befindet, nahm ich auf Anregung des Herrn Professors Dr. L. Gegenbauer eine Vergleichung des gedruckten Textes mit denselben vor, deren Ergebnisse im Folgenden mitgetheilt werden sollen. Die k. k. Hofbibliothek hat mir die betreffenden Handschriften freundlichst zur Benützung überlassen, und ich gestatte mir, an dieser Stelle meinen ergebensten Dank hiefür auszusprechen.

Die genannte Bibliothek besitzt drei Handschriften des „Tractatus de numeris datis“. Dieselben befinden sich in den drei Codices Nr. 4770, 5303 und 5277 und stammen bezüglich aus dem 14., 15. und 16. Jahrhunderte. Jeder dieser Codices enthält außerdem noch zahlreiche andere mathematische Schriften. Die beiden in Nr. 4770 und 5303 enthaltenen Handschriften des Jordan'schen Werkes sind vollständig; überdies geht aus einer Vergleichung derselben ziemlich deutlich hervor, dass die zweite eine Abschrift der ersten ist, da alle Schreibfehler der ersten sich auch in der zweiten finden. Die dritte Handschrift ist unvollständig und enthält nur die Sätze ohne Beweis mit je einem Beispiele zur Erläuterung. Infolge dieser Umstände kommt für uns nur die aus dem 14. Jahrhunderte stammende Handschrift in Betracht.

Dieselbe ist auf Papier geschrieben und füllt 30 Blätter des ca. 340 Blätter umfassenden Codex 4770. Auf dem Rücken des

schon ziemlich defecten Leder-Einbandes steht auf einem Papierschilde „102. Henr. Leonis liber manuscr.“ Was die Schreibweise und sonstige äußere Merkmale der Handschrift betrifft, verweise ich auf das beigelegte Facsimile einer Seite.

Eine Eintheilung des Werkes in vier Bücher und Bezeichnung der einzelnen Paragraphen durch Nummern, wie sie in der Ausgabe durch Herrn Curtze vorliegt, findet sich in der Handschrift nicht.¹⁾ Wir wollen diese Eintheilung aber dennoch beibehalten und uns in Folgenden auf dieselbe beziehen.

Ich verwende auch, wie Herr Curtze, die gewöhnliche Schreibweise des Lateinischen und vermehre die äußerst spärlichen Interpunctuationszeichen; auch habe ich mich bemüht, den oft entstellten und auf den ersten Anblick manchmal unverständlichen Text zu verbessern; es sind namentlich in den als Zahlzeichen verwendeten Buchstaben offenbar aus mangelndem Verständnisse des Abschreibers zahlreiche sinnstörende Irrthümer unterlaufen; oft ist auch eine Stelle übersprungen oder eine andere doppelt abgeschrieben worden. Wo diese Verbesserungen sich auf Kleinigkeiten beziehen und die richtige Lesart durch den Inhalt eindeutig bestimmt erscheint, erwähne ich dieselben gar nicht; nur bei wesentlicheren Änderungen deute ich durch Fußnoten den ursprünglichen Text der Handschrift an. War eine Einschaltung an irgend einer Stelle nöthig, so wurde sie in eckige Klammern gesetzt.

Ich lasse nun vor Allem die bisher gar nicht oder nur unvollständig veröffentlichte zweite Hälfte des vierten Buches folgen und beginne mit §. XV, in dessen Mitte die bisher benutzten Handschriften abbrechen.

XV. Si vero compositus ad illum datus et quadrata eorum simul ad quadratum, illa quoque ad ipsum data erunt.

Dispositio superior remanet praeter quadrata b et c sint f et g , atque ex f in se fiat h , et ex g in se fiat l . Erit[que h proportio e ad d et l proportio e ad d sicque hl datum erit]. Cumque fg datum erit et f et g datum. Itaque et b et c erit datum ad a .

Verbi gratia compositum sit triplum illi et compositum ex quadratis addat²⁾ super quadruplum³⁾ quadrati eius $\frac{5}{9}$. Quare 4 et $\frac{5}{9}$ duplentur et fient 9 et $\frac{1}{9}$, de quibus tollatur quadratum trium, hoc est 9, et remanebit nona, cuius radix est tertia, qua sublata de tribus et reliquo mediato proveniet unum et tertia; ergo unum est illi sesquitergium et alterum addit ipsum super duas tertias.

¹⁾ Im Codex Nr. 5277 findet sich die Eintheilung in 4 Bücher vor
²⁾ sit addent. ³⁾ quadratum.

XVI. Quod si differentia eorum ad ipsum fuerit data, quique ex uno in alterum producit, ad quadratum datus, uterque ad eum datus erit.

Differentia b ad c sit z et cetera remaneant ut in dispositione antepaemissae. Sit item differentia f ad g x et ipsa erit proportio z ad a . Quia igitur ex $[f]$ in g fit h datum, differentia quoque eorum data, erunt ipsa data. Quare b ad a datum.

Verbi gratia differentia duorum sit tertio aequalis et, quod fit ex uno in alterum, sit quadrato eius sextuplum. Sumatur igitur 6 quater addito quadrato unius et fient 25. Cuius radix est 5, de quo dempto uno reliqui medietas erit duo. Quare unus ad eum duplus et reliquus erit triplus.

XVII. Cumque sit differentia ad eum data, si quadrata simul ad quadratum eius data fuerint, ipsa etiam ad illud data erunt.

Sit, ut prius, differentia b ad c z et differentia f ad g x quae erit proportio z [ad] a sicut¹⁾ in dispositione antepaemissae. Cumque hl , quod est quadratum f et g datum sit et differentia eorum data, erunt ipsa data.

Verbi gratia differentia sit illi dupla, quadrata vigies²⁾ contineant quadratum; duplum autem 20, hoc est 40, de quo sublato quadrato duarum relinquentur 36. Cuius radix 6, de quo demptis duobus residui medietas erit duo. Quare unum ei duplum et reliquum quadruplum.

XVIII. Si duo numeri ad tertium fuerint dati atque, qui ex ipsis provenerit, ad eundem datus, omnes eos esse datos conveniet.

Ut si ad a dati sint b et c et ex b in c fiat d datus ad a . Quadratus autem a sit e . Si ergo proportio b ad a ducatur in proportionem c ad a , proportio d ad e . Quae si dividat proportionem d ad a , exhibet proportio c ad a , quae ab ipso denominatur. Quare a datus.

Verbi gratia unus sit ei sesquialter et alter sesquitercius et productus ex eis contineat eum octuagiesquater. Unum igitur et tertia in unum et medietatem et fient duo, per quae dividantur 84 et exhibunt 42 et ipse est qui quaeritur.

XIX. Si quod fit ex latere in latus datum fuerit, compositum ex quadratis datus, quodlibet eorum datus erit.

Sint a et b latera et quadrata c , d . Quodque fit ex a in b sit e datus, cd dato. Et quia e medius est proportionaliter inter c , d , cum sit datus et compositus ex illis datus, erit quodlibet datum.

Verbi gratia. Unus in alium facit 35 et quadrata simul 74. Cuius quadratum 5476. Quadrato autem 35 quater ab eo detracto

¹⁾ et c ut. ²⁾ vigesies.

remanent 576¹⁾, cuius radix 24. Quo dempto de 74 reliqui dimidium erit 25, qui est minor quadratorum, reliquus 49, latera 5 et 7.

XX. Si vero producto ex lateribus dato fuerit quadratorum differentia data, singulum eorum datum erit.

Dispositio eadem superiori. Sitque g differentia c ad d datus. Et quia e proportionaliter inter c et d , erit c ad e sicut e ad d . Quare c fit primus et d quartus dati. Et e secundus et tertius data eorum differentia. Quare omnes eos esse datos consequitur. Vel aliter. Quia e datus sit, erit, quod fit ex c in d , datum, quod est quadratum e . Eorum ergo differentia data erunt et ipsa data.

Verbi gratia. Ex uno in aliud fiat 15, et differentia quadratorum 16. Itaque unum quadratum in aliud facit 225. Quo quater sumpto addatur quadratum 16 et fient 1156. Cuius radix 34, de quo sublatis 16 et reliquo mediato fient 9, minor quadratorum, reliquus 25, latera 3 et 5.

XXI. Si compositus ex lateribus et productus ex quadratis dati fuerint, omnes eos datos esse consequitur.

Si enim producti extrahatur radix, ipsa erit quod producitur ex lateribus. Cumque ipsum datum sit, compositumque ex ipsis datum, erunt et ipsa.

Verbi gratia compositum ex lateribus 9, productum ex quadratis 324, cuius radix 18 et ipse est productus ex lateribus. Cumque sit datus ex illis compositus secundum praemissam operationem erunt ipsa 3 et 6. Dempto enim 18 quater de quadrato 9 remanent 9, quod est quadratum differentiae eorundem.

XXII. Quod si differentia laterum simul productus ex quadratis datus fuerit, singuli ipsorum dati erunt.

Simili modo productus ex lateribus datus erit extracta radice producti ex quadratis. Cumque sit differentia eorum data, ipsa etiam data esse patet.

Verbi gratia productus est 100, cuius radix 10 [et differentia sit 3. Quae ducatur in se addito] quadruplo [10] et fient 49; huius radix 7, qui componitur ex lateribus; sic et ipsa erunt 2 et 5.

XXIII. Si et laterum et quadratorum fuerit differentia data, et haec et illa data esse necesse est.

Differentia enim quadratorum divisa proveniet compositum ex radicibus. Quod cum secundum hoc datum sit, et differentia eorum data, utrumque erit datum.

Verbi gratia differentia radicum est 3 et differentia quadratorum 51, quae in tres dividatur, exhibunt 17, qui componitur ex radicibus. Demptis ergo tribus et reliquo mediato fient 7 et ipse est minus laterum, maior vero 10.

XXIV. Si fuerint duo numeri, quorum quilibet ad quadratum alterius sit datus, uterque eorum datus erit.

Sint duo numeri a et b et a datus ad quadratum b , qui sit c , et b datus ad quadratum a , qui sit d . Sit igitur e proportio c ad a et g proportio d ad b . Quia igitur c in a facit c , erit e ad b sicut b ad a . Similiter, quia g in b facit d , erit b ad a sicut a ad g . Sunt igitur quatuor termini continue proportionales, quorum e et g dati; ergo proportionis, quae est c ad g radix cubica extrahatur, b datum. Similiterque a datum erit.

Verbi gratia quadratus unius continet reliquum quinquies et eius tertiam et illius quadratum alterum deciesocties continet. Ducatur ergo 18^1 in quadratum quinque et tertiae, qui est 28 et $\frac{4}{9}$ et fient 512; cuius latus cubicum est 8 et ipse est unus duorum, reliquus autem 12.

XXV. Numerum²⁾ multipliciter sumere possibile ex duobus compositum, ex quibus productum habeat ad eundem quamlibet proportionem datam.

Compositus ab et productum ex a in b sit c . Cuius proportio [ad] ab data, quae sit e . Sumantur igitur quilibet tres termini proportionales, qui sint f, g, h , maximus h . Differentiaque h ad f sit k atque sicut [h ad] k ita sit aliquis ad e et ipse sit l datus, addatque super $e m$. Quia l ad e sicut h ad k , erit l ad m sicut h ad f . Ergo sicut quadratus ad quadratum, quare l in m facit quadratum; facit igitur l in se n , atque in se tantum facit, quantum in m et in e . Sed in e facit d . Quare in m faciet superfluum n ad d , cuius radix sit t .³⁾ Si igitur l dividatur in duo, quorum differentia t , ipsa erit ut a et b . Alterum enim in alterum quater⁴⁾ faciet d , addit enim quadratum differentiae. Quod si alii tres sumerentur pro f, g, h , alius fieret l .

Verbi gratia. Quod fit ex uno dividendum in reliquum sit duplum compositi. Quod ergo fit ex uno in aliud quater, erit idem octuplum. Sunt igitur tres numeri proportionales 1, 2, 4. Estque differentia 4 ad unum [3, per quae dividatur productum ex 4 et 8, hoc est 32, et fient 10 et $\frac{2}{3}$, cuius differentia ad 8 est 2 et $\frac{2}{3}$. Ducatur ergo 10] et $\frac{2}{3}$ in 2 et $\frac{2}{3}$ et fient $28\frac{4}{9}$. Cuius radix est $5\frac{1}{3}$. Quo dempto de $10\frac{2}{3}$ reliqui medietas est 2 et $\frac{2}{3}$, quod erit unum dividendum et reliquum 8, in quae dividitur 10 et $\frac{2}{3}$, quia 8 in 2 et $\frac{2}{3}$ facit duplum 10 et duarum tertiarum ut proponeretur. Quod si termini proportionales 1, 3, 9, inveniatur numerus compositus 9 divisus in 6 et 3 ratione praemissa.

¹⁾ 18 et dimidium. ²⁾ Numerum datum. ³⁾ quod sit t . ⁴⁾ quantum.

XXVI. Si fuerint duo numeri, quorum quadrata pariter accepta fuerint ad compositum ex ipsis, quodque etiam ab ipsis continetur,¹⁾ datum ad idem, utrumque eorum datum esse consequitur.

Sint huiusmodi numeri a et b , quadrata eorum d et e , productum ex uno in aliud c . Cum sit ergo dc ad ab datum, et cum similiter erit et duplum c ad idem datum, quod sit f , quare et totus def datus ad ipsum. Sed ab in se facit def . Itaque datus. Atque c inter d et e est proportionalis datumque dc ad c , erit et d ad c datus. Sed d ad c sicut a ad b . Quare d ad c cum sit datus, erit et a et b datus.

Verbi gratia. Duo numeri sint, quorum quadrata continent compositum ex ipsis ter et eius quatuor septimas. Et, quod fit ex uno in reliquum, continet eum semel et eius quinque septimas. Ipsum ergo bis et duo quadrata continent eum septies. Hic igitur erit 7, duo quadrata 25, dividendia ergo 3 et 4.

XXVII. Si ad unum numerum duobus numeris datis utrique eorum datus numerus adiciatur, ut ex toto in totum proveniat numerus [datus], illum quoque datum esse ostendetur.

Ad a sint b et c dati, quibus adiciantur dati numeri d et e ; atque ex bd in cc fiat $fghl$, ita, ut ex b in c fiat f et ex b in e et c in d fit g , h , ex d vero in e fiat l . Quia igitur b et c ad a et g et h ad b et c , erunt g et h data ad a atque f datus ad quadratum a , qui sit z . Sed et l datus. Subtracto ab $fghl$ remanebit fgh datus, qui constat ex uno dato ad a radicem et alio dato ad z quadratum; datus ergo erit f , h , a .

Verbi gratia. Et tertiae et quartae radices addatur unum et ex toto in totum fiant 20. Tertia autem in quartam radice facit duodecimam quadrati et tertia in unum et quarta in unum faciunt tertiam et quartam radice²⁾ et unum in unum. Quo detracto a 20 remanent 19, quantum septem duodecimae radice et duodecima quadrati. Ergo 228 est quadratum et septem radices. Itaque trium et dimidii quadratum addatur ad³⁾ 128 et fient $240\frac{1}{4}$. Cuius radix est 15 et $\frac{1}{2}$. A quibus sublatis 3 et $\frac{1}{2}$ remanent 12 et ipse est radix.

XXVIII. Quod si alteri datus numerus addatur, ut totus in reliquum ductus faciat numerum datum, et sic etiam idem datus erit.

Ut si b datus numerus addatur d , ut ex bd in c fiat ef numerus datus. Ex b vero in c fiat e , et ipse est datus ad z ; ex d vero in c fiat f , et ipse erit datus ad a . Quare numerus ad radicem datus cum numero ad quadratum dato facit numerum datum. Igitur a datus.

¹⁾ Hat hier offenbar den Sinn des Productes der beiden Zahlen. ²⁾ quadrati.
³⁾ bis.

Verbi gratia. Medietas radiceis addito uno in quartam facit 10. Sed medietas in quartam facit octavam quadrati et unum in quartam reddit quartam radiceis. Quare 10 est ut quarta radiceis et octava quadrati. Secundum ergo erit radix 8.

XXIX. Si a duobus numeris ad unum datis duo numeri dati auferantur, ut ex ductu reliqui in reliquum proveniat numerus datus, proveniet et ille nunc numerus datus.

Ad a numeri dati sint bc et de . Sint autem numeri dati c et e . Atque ex b in d proveniat g datus. Ex bc vero in e fiat h et de in c proveniat k . Item ex bc in de fiat l , ex c in e m . Sed quia h est ut b et c in e , sed b in e et b in d est ut b in de , erit gh tamquam m et de in b . Et quia de in b et in c est ut l , erit ghk ut lm . Sit igitur differentia g et m n , qui quoniam dati sunt, erit et n datus. Sed hk est datus [ad a] et l datus ad [quadratum a] et igitur vel hk cum n dato facit l vel nl erit ut kh , utrobique autem datus est a .

Verbi gratia. Esto unus numerus radici duplus, alter triplus; de triplo autem dematur 6 et a duplo 4 et residuum in residuum faciat 150. Sed duplum [in triplum] facit sextuplum quadrati ex 6 in 4 24. Interim autem triplum in 4 facit duodecuplum radiceis et 6 in duplum similiter duodecuplum. Itaque sextuplum quadrati et 24 sunt ut radix vigiesquater [et 150].¹⁾ Quare quadratum semel est ut radix quater et 21. Quadratum ergo dimidi 4 addatur ad 21 et erit 25, cuius radix 5, cui addatur dimidium de quatuor et fient 7 et ipse est radix.

XXX. Si vero ab altero detrahatur numerus datus, ut ex residuo in reliquum fiat numerus datus, sic quoque idem datus erit.

Sint ad a dati bc et d et ex b in d fiat e datus, posito quod c sit datus. Ex bc autem in d fiat ef et f ²⁾ fiet ex c in d . Atque ef datus est ad z et f datus ad a . Quia ergo numerus datus [ad] quadratum constat numero dato et numero ad radicem dato, erit radix data.

Verbi gratia unus est ei duplus et alter ei duae quintae, et duplo sublati 4 et residuo in alterum ducto fient 12. Si autem totus duplus in illum ducatur, fient quatuor quintae quadrati et quatuor in ipsum facit octo quintas radiceis. Igitur $\frac{4}{5}$ quadrati sunt ut $\frac{8}{5}$ radiceis et 12. Secundum operationem ergo praemissam erit radix 5, quadratum 25.

XXXI. Si fuerint duo numeri ad unum dati alterique datus numerus addatur et ab altero detracto numero

¹⁾ et quadratus sexies. ²⁾ sic.

dato, si postmodum ex se datum numerum fecerint, numerum illum datum esse conveniet.

Sint ad a b c et d dati et c datus, et e datus addatur d fiatque ex b in d e f datus atque ex b c in d e fiat g h , et ex b c in d fiat g et ex b c in e ¹⁾ fiat h ; cui²⁾ aequalis sit f l m , fietque l m ex d e in c . Estque l datus ad a et m simpliciter datus. Differentia autem l ad h sit t ³⁾ data ad a . Aut⁴⁾ ergo t ⁵⁾ cum f m dato est ut g , datus ad z ; aut f m datus est ut t ⁶⁾ datus ad a , et g , datus ad z . Quodcumque fuerit, a semper datus erit.

Verbi gratia unus ei sesquialter alter dimidium⁷⁾, de⁸⁾ maiore dematur unus⁹⁾, alteri addatur 3 et sic ex eis fiat 25. Sed sesquialterum in dimidium et tria facit 3 quartas quadrati et quadruplum radiceis cum dimidio. Item unum [in] dimidium et tria facit eadem. Quare 28 et dimidium sunt ut tres quartae quadrati et quadruplum radiceis cum dimidio. Quare 28 est quantum tres quartae quadrati et quadruplum radiceis. Itaque, quod superius in opere processit, erit radix 4.

XXXII. Si vero eisdem numeris dati numeri addantur vel detrahantur, ut post hoc proveniat numerus ad quadratum vel ad radicem datus, et radix et quadratus datus erit.

Si quidem addantur dati numeri, ut sit productum datum ad quadratum, detracto eo, quod fit ex uno in reliquum, remanebit numerus ad quadratum, constans ex numero dato et numero ad radicem dato. Si vero ad radicem, detracto eo, quod fit ex quolibet in numerum alii datum¹⁰⁾, remanebit numerus ad radicem datus, constans ex numero dato et numero ad quadratum. Datis autem numeris subtractis, si productum sit ad quadratum, secundum demonstrationem 39¹¹⁾ huius detracto eodem producto ab eo, quod fit ex uno in reliquum remanebit numerus ad radicem datus constans ex numero dato et numero ad quadratum dato. Si autem ad radicem, fiet similiter numerus totus ad radicem datus constans ex numero dato et numero ad quadratum dato.

Verbi gratia. In primo unus sesquitercius, alter duplus, minori quoque duobus alii tribus additis ex ipsis cum proveniat numerus continens quadratum sexies, de quo, quod fit ex uno in alterum¹²⁾, dempto, remanet triplum quadrati et tertia tamquam octuplum radiceis et 6. Secundum hoc ergo radix erit 3 et quadratus 9.

XXXIII. Quod si alteri datus numerus addatur vel detrahatur deinde in reliquum ductus produxerit numerum quadrato vel radici datum, radix cum quadrato data erit.

¹⁾ se. ²⁾ nämlich dem gh . ³⁾ ter. ⁴⁾ Ante. ⁵⁾ ter. ⁶⁾ ter. ⁷⁾ medius
⁸⁾ alter. ⁹⁾ unde. ¹⁰⁾ soviel wie hinzugefügt. ¹¹⁾ 39 lässt sich hier schwer erklären; 29 würde vielleicht auf §. XXIX dieses Buches deuten; es zeigen sich also auch hier Spuren von Nummerierung. ¹²⁾ laterum.

Detraeto sive addito dato numero, si productus ad quadratum datus fuerit, quoniam numerus in alterum facit numerum ad eundem datum, quod fit ex dato numero in reliquum, erit eidem datus. Sed radici datus erit. Quare radix quadrato data. Addito vero numero dato si productus fuerit ad radicem datus, erit, quod fit ex uno in alterum, datus ad radicem, similiter etiam quadrato.¹⁾ Quare radix ad quadratum data et ob hoc data.

Verbi gratia. Unus sit sesquitertius radici, alter eius tertia et maiori addantur duo, ut productum ex composito in reliquum sint duae tertiae quadrati. Sed tertia in unum et in tertiam facit quatuor nonas quadrati. Ergo tertia in duo facit eius duas nonas residuas. Sed cum faciat duas tertias radicis, erunt duae tertiae radicis duae nonae quadrati. Radix ergo tertia quadrati, erit ergo radix ternarius.

XXXIV. Si vero dato numero uni addito et ab altero detracto postmodum fecerint numerum ad quadratum vel ad radicem datum, quadratus cum radice datus erit.

Si productus ad quadratum datus fuerit, cumque alter cum sibi addito in [de]tractum reliquo faciat numerum ad radicem datum et reliquum numerum datum; sed reliquus totus²⁾ in illum et additum ductus facit totum numerum ad quadratum datum et aliam ad radicem datam; minoribus detractis³⁾ [vel numerus] ad radicem [datus aequalis numero dato et numero] ad quadratum dato, vel numerus datus aequalis numero ad radicem dato et numero ad quadratum dato vel numerus ad quadratum⁴⁾ datus aequalis numero dato et numero ad radicem dato. Quodcumque fuerit, erit radix et quadratus datus. Si productus ad radicem fuerit datus, erit eadem ratione. Ducto toto in totum numerus coniunctus ad radicem datus. Datus [ad radicem] cum numero dato tamquam numerus ad radicem datus et numerus ad quadratum datus; demptis ergo minoribus⁵⁾ vel erit numerus datus aequalis numero ad quadratum dato cum numero ad radicem dato vel numerus ad quadratum datus tamquam numerus datus et numerus ad radicem datus. Et sic etiam radix data erit.

Verbi gratia. Sit unus numerus radici duplus, alter triplus et duplo⁶⁾ addatur 4 et reliquo detrahatur 6 et productus postea contineat [quadratum] ter et eius tertiam. Quia autem duplum in 6 facit [duo]decuplum radicis et 4 in 6 24, quia item triplum in duplum facit sextuplum quadrati et triplum in 4 duodecuplum, erit, ut sextuplum quadrati et duodecuplum radicis sit ut quadratum triplum et tertia et [duo]decuplum radicis et 24. Dempto igitur utrobique duodecuplo radicis itemque tribus et tertia ablatis de 6 remanet duplum et duae tertiae quadrati ut 24, quadratus vero 9. Radix autem 3 et procedit in ceteris operatio.

¹⁾ detracto. ²⁾ Hier ist eingeschaltet: in illum et additus totus. ³⁾ aequalis. ⁴⁾ radicem. ⁵⁾ omnibus. ⁶⁾ duo.

XXXV. Si numerus ad quadratum datus [in se] fecerit numerum ad radicem datum, radix eiusdem data erit.

Radix sit a , quadratus sit b , numerus ad eum datus c , qui in se ductus faciat g datum ad a . Sit autem d quadratus b . Erit igitur inter b et d numerus proportionaliter medius secundum proportionem b ad a et ipse sit c . Et quia a in se facit b , et a in b faciet c , et a in c faciet d , et g ad d datus est, erit et a ad d datus, quare c datus, qui est cubicus a . Cuius latere cubico extracto proveniet a datus.

Verbi gratia dimidium quadrati in se facit numerum, qui radicem quinquagiesquater continet. Sed dimidium in se facit quartam quadrati et quater 54 facit 216, igitur ducentorum sedecim latus cubicum extrahatur et provenient 6 et ipse erit radix quadrati, qui est 36.

Nachdem durch das Vorstehende die wesentlichste Vervollständigung der bisherigen Ausgaben durchgeführt ist, sei es gestattet, auf einige Abweichungen der Handschrift vom gedruckten Texte hinzuweisen, welche sich in den übrigen Theilen des Werkes finden. Da es sich hier nur um den mathematischen Inhalt der Schrift handelt, will ich nur die wesentlichsten dieser Abweichungen hervorheben, soweit dieselben eben inhaltlich neues bieten; auf kleinere, von diesem Standpunkte aus nebensächliche Unterschiede gehe ich nicht ein.

Vor Allem sei bemerkt, dass sich kleinere Abweichungen des Manuscriptes vom gedruckten Texte namentlich in der ersten Hälfte des ersten Buches häufig finden, später seltener werden und bald ganz aufhören; und zwar bestehen diese Abweichungen fast ausnahmslos darin, dass die Handschrift um einige Worte oder auch einige Sätze mehr enthält als der gedruckte Text. An den meisten dieser Stellen scheinen diese Erweiterungen des Textes dadurch entstanden zu sein, dass der Abschreiber Randbemerkungen des ihm vorliegenden Manuscriptes in den Text mit aufgenommen hat; darauf deutet auch der Inhalt dieser Zusätze, welche fast immer Citate von Sätzen aus Euclid's Elementen enthalten, welche mit dem gerade behandelten Satze im Zusammenhange stehen.

Es sollen in dieser Hinsicht die drei Paragraphen III, IV und V des 1. Buches im Folgenden mitgetheilt werden, welche die größten derartigen Einschaltungen aufweisen. Wenn man die Stelle betrachtet, um welche §. III erweitert ist, wird man sich bald darüber klar sein, dass dies in der That eine in den Text gerathene Randbemerkung ist. Die Änderungen der beiden folgenden Paragraphen IV und V stehen mit dieser im Zusammenhange. Es ist bemerkenswert, dass im §. V die Arithmetik des Jordanus nicht citirt wird. Ähnlich sind auch im §. VIII des 1. Buches die Worte „ex decima octava Arismetica“ weggelassen.

Die Paragraphen XIX und XX des 1. Buches sind, offenbar aus Irrthum, in einen einzigen zusammengezogen; es schließt sich

nämlich an den Ausspruch des Satzes XIX sogleich der Beweis des Satzes XX an. Die hiedurch fehlende Stelle wird auf der folgenden Seite mitten in einem der nächsten Paragraphen plötzlich nachgetragen, ohne dass dies irgendwie bezeichnet wäre.

Dies alles ist nicht wesentlich. Bemerkenswerter ist die Einschaltung eines längeren Absatzes zwischen den beiden Paragraphen XVI und XVII des 1. Buches, welcher sich auf das commutative Gesetz der Multiplication bezieht. Denselben erlaube ich mir ebenfalls mitzuteilen.

An Stelle der Paragraphen XXI, XXII und XXIII des 1. Buches, sowie an Stelle der Paragraphen XII, XIII und XIV des 2. Buches sind je drei von denselben verschiedene (allerdings inhaltlich sehr verwandte) Absätze eingesetzt. Auch diese sind im Folgenden wiedergegeben. §. XXVIII des 1. Buches fehlt, und ist an seiner Stelle der §. XXI in jener Form zu finden, wie er in der gedruckten Ausgabe vorliegt. §. IV des 2. Buches ist in der mir vorliegenden Handschrift ebenfalls ausgelassen. Die von Herrn Curtze in eckige Klammern gesetzte Schlussbemerkung am Ende des 2. Buches findet sich in dieser Handschrift nicht. Im 3. Buche und in der 1. Hälfte des 4. Buches, soweit eben die bisherigen Ausgaben reichen, habe ich keine wesentliche Abweichung des Manuscriptes vom gedruckten Texte bemerkt. Ich lasse nun die einzelnen eben erwähnten Stellen folgen.

Liber I.

III. Dato numero per duo diviso, si, quod ex ductu unius in alterum producitur, datum fuerit, et utrumque eorum datum esse necesse est.

Sit numerus abc divisus in ab et c atque ex ab in c fiat d datus. Itemque ex abc in se fiat e . Sumatur itaque quadruplum d , qui sit f . Quo dempto de c maneat g , et ipse erit quadratum differentiae ab ad c . (Quod enim minor patet ex 3 secundi Euclidis. Subtrahatur enim c minor portio ab ab , relinquitur ergo differentia ab ad c sitque am . Dividitur ergo numerus ab in duas partes in am et c et additur ei aequalis uni dividendium scilicet c , est enim b aequalis mc . Age ergo ex 8 secundi quadratum totius abc , hoc est numerus e , superficie quadruplum d , hoc est numerum f , quadrato am minori, qui est differentia ab ad c , hoc est numero g . Ex hoc etiam haberi potest per 4 secundi, quod duo quadrata ab et c pariter accepta valent duplum eius quod fit ex ductu ab in c , hoc est medietatem f et quadratum differentiae ab ad c , hoc est numerum g . Valet enim e , ut ostensum est, g et f , et valet idem e ex quinta secundi duo quadrata pariter accepta et medietatem f , hoc est quadratum differentiae et duplam superficiem. Subtracta scilicet medietate f hincinde, quae communis est.)¹⁾ Extrahatur ergo radix g et sit²⁾ am . Eritque am

¹⁾ Ich habe mir erlaubt, die eingeschaltete Stelle in Klammern zu setzen.

²⁾ Der Gebrauch des Wortes sit deutet darauf, dass das Zeichen am erst hier eingeführt wird, also das Voranstehende nicht zum Texte gehört.

differentia ab ad c . Cumque sit abc datum, erit et c et ab datum ex prima.

Huius operatio constabit hoc modo. Sit decem divisus in duos numeros, atque ex ductu unius eorum in alium fiat 21. Cuius quadruplum, et ipsum est 84, tollatur de quadrato decem, hoc est 100, et remanent 16. Cuius radix extrahatur, qui erit 4, et ipse est differentia; ipsa tollatur de 10, reliquum est 6. Dimidietur, erit medietas 3 et ipse est minor portio et maior 7.

IV. Si numerus datus fuerit in duo divisus, quorum quadrata pariter accepta sint data, erit utrumque datum.

Sint duo quadrata pariter accepta a , sitque quadratum totalis propositi ac , maius enim est, ut praecostendimus. Cum ergo ac datum sit, et a datum, erit et c datum, quod per 4 secundi dupla est superficies. Cum ergo medietas eius data, et omnia per praemissam erunt data.

Opus huius est. Divisus quippe sit 10 in duo, quorum quadrata 58. Quo sublato de 100 remanebunt 42, et ipse auferatur de 58 et remanebunt 16; radix eius est 4 et ipse differentia portionum, quae fient 7 et 3, ut prius.

V. Si numerus in duo dividatur, quorum differentia data, atque ex ductu unius in alterum provenerit numerus datus, numerum quoque divisum esse datum conveniet.

Cum sit superficies data, et quadruplum superficiei sitque a . Cum sit differentia data, et quadratum differentiae datum sitque c , et addatur a et totus ac datus est, qui, ut in 3 praesentis ostensum est, quadratum est totalis prius non dati. Quare, cum est radix eius, habemus propositum.

Verbi gratia differentia portionum sit 6 et ex ipsis proveniat 16, cuius duplum 32, illius quoque duplum 64; huic addantur 36, scilicet quadratum 6, et fient 100, cuius radix extracta erit 10, numerus divisus in 8 et 2.

Der zwischen §. XVI und XVII des 1. Buches sich in der Handschrift vorfindende Abschnitt lautet:

Propositis quocumque numeris multiplicatio primi in secundum et producti in tertium et producti in quartum et cetera in infinitum est aequalis multiplicationi sic sumptae quocumque ordine variato.

Sint $abcd$ numeri, et ducatur a in b [et productum in c et productum in d], ultimo aequum est ultimo producto, si ducatur c in b et productum in a et productum in d . Age enim productum ex a in b sit e , multiplicatio numeri c in c r , et iterum r in d i . Et rursum multiplicatio numeri c in b sit t et numeri t in a k , et iterum k in d numerus l , dico quod i numerus aequalis est numero l . Age enim b multiplicatus est in duos numeros, qui sunt a et c , et producti sunt duo numeri e et t . Numeri ergo e

ad t proportio sicut a ad c per 18 septimi, multiplicatio ergo numeri e in c sicut multiplicatio t in a . Sed e multiplicatus in c produxit r , et t multiplicatus in a produxit k . Numerus ergo r aequalis est numero k . Et rursum numeri r et k in d multiplicati prodixerunt duos numeros i et l ; proportio ergo numeri primi ad numerum l est sicut numeri r ad k . Sed r aequalis est numero k . Et numerus ergo primus aequalis est numero l , quod oportebat ostendere. Rursum esto multiplicatio numeri d in c numerus m , numeri vero m in b n , numeri autem n in a r , dico quod secundus aequalis est utrisque i et l numeris. Primo modo demonstratio huius rei. Quod c multiplicatus in b produxit t , in d produxit m , numeri ergo t ad m proportio sicut numeri b ad d . Multiplicatio ergo numeri t in d aequalis est multiplicationi numeri m in b . Sed m multiplicatus in b produxit n . Et t ergo multiplicatus in d produxit n . Et t multiplicatus in a produxit k ; proportio autem numeri k ad n sicut proportio numeri a ad d . Multiplicatio ergo numeri k in d sicut multiplicatio numeri a in n . Sed k multiplicatus in d produxit l , numerus autem n in a produxit r ; aequales sunt l et r et aequales sunt i et l et r numeri, quod oportebat ostendere.

Die drei an Stelle der Paragraphe XXI, XXII und XXIII des 1. Buches in der Handschrift sich vorfindenden Abschnitte lauten:

Dato numero in duo diviso et altero dividendium per datum¹⁾ numerum multiplicato et reliquo per productum, si, quod provenerit, datum fuerit, et utrumque dividendium datum erit.

Sint dividendia a et b , atque a multiplicetur per c datum numerum et provenit d , atque d in b faciat e datum; quia ergo sic multiplicatio facta tantum facit, quantum si a in b et c in productum ducatur²⁾ tunc e dividatur per c et exhibit datum, quod fit ex a in b ; quare data etiam erunt a , b , quia ab datus est.

Verbi gratia diviso 10 ducatur 5 in alterum dividendium et reliquum in productum. et fiant 105. Hic totus dividatur per 5 et exhibunt 21, qui fiet ex una portione de decem ducta in reliquam; ut ergo consuetudo est, 21 quater tollatur de 100 et remanebunt 16, huius radix extracta est 4, quae est differentia dividendium, et ipsa sunt 7 et 3.

Si vero productum per reliquum dividendium dividatur et, quod exierit, datum, erunt singula data.

Itaque d dividatur per b et exeat e datum. Quia igitur a ad e sicut b ad c , erit, ut ab ad ac sicut a ad e . Itaque ab ducatur in e ³⁾ et dividatur per ec et exhibit a datum.

¹⁾ alterum. ²⁾ dividatur. ³⁾ se.

Verbi gratia [10 per duo diviso et] altero per 5 multiplicato et producto per alterum diviso exeat 7 et $\frac{1}{2}$. Itaque 10 ducatur in 5, et fient 50, qui dividatur [per] 12 et $\frac{1}{2}$ et exhibunt 4, qui erit una portio.

Quod si altero dividendium per datum numerum diviso, quod exierit, per reliquum dividatur, quodque tandem provenerit, datum fuerit, ipsa etiam data erunt.

Per c datum numerum dividatur a et exeat d , qui dividatur per b et proveniat e . Quia igitur b in e facit d et d in c facit a . Si c ducitur in e et fiat f , erit f datum atque b in f facit a atque b et a datum.

Verbi gratia diviso 10 in duo alterum per 5 et, quod provenerit, diviso per reliquum et proveniat quinta, quae multiplicatur per 5 et fiet unum, quod erit pars unius portionum ducta in reliquam, cui addatur unum et erunt duo, per quae dividantur 10 et exhibunt 5, quod erit unum dividendium.

An Stelle der Paragraphe XII, XIII und XIV des 2. Buches enthält die vorliegende Handschrift die drei folgenden Abschnitte:

Si a duobus numeris invicem datis duo dati numeri detrahantur, ut sint reliqui dati ad se, et toti numeri dati erunt.

Sint numeri ad se invicem dati ab , cd , atque a et c sunt dati. Sit itaque e ad a sicut d ad b , differentiaque e ad c sit g . Eritque totus ed ad ab datus, quare et ad¹⁾ cd . Itaque et g ad cd est data. Et quia g data erit, et cd et ab datus.

Verbi gratia sit maior duplus minori et a maiore 4 et a minore detrahantur 6, ut sit residuum quadruplum residuo. Sitque numerus quadruplus 6, hoc est 24, qui addatur residuo maioris, ut sit totus quadruplus minori et maiori duplus. Quare differentia, quae est 20, est ei aequalis, et ipse erit 20 et alter 10.

Datis duobus numeris ad invicem si ab altero numerus datus et aliquis numerus ad ipsum datus detrahantur, ut sint reducti ad se dati, erunt et toti numeri dati.

Si enim ad suum detractum, datus erit et residuum. Quare et ad residuum alterius. Et quia ad totum, erit similiter et ad eius detractum, quod est datum; quare et ipse datus atque reliquus.

Verbi gratia numerus ad alium sesquialter et a maiori 4 et ab alio 4 et $\frac{1}{8}$ ²⁾ detrahantur, ut sit residuus residuo duplus. Quia

¹⁾ ab . ²⁾ nämlich $\frac{1}{8}$ des kleineren.

igitur detractum minoris est¹⁾ eius tres octavae, erit residuum eius $\frac{5}{8}$, quod cum sit dimidium residui maioris erit residuum illud tamquam totum minus et eius quarta, detracta ergo maioris, hoc est 4, erit eius altera quarta. Ipsum ergo erit 16 et altera 24.

Si fuerint duo numeri ad se dati et ab altero auferatur datus numerus, residuique quotolibet pars reliquo addita totum quid fecerit datum, uterque eorum datus erit.

Sint duo numeri ab et c et sit a datus. Et quarta pars b addita c faciat d ²⁾ datum et d quadrupletur et fiat $e.f$ et $[f]$ quadruplum c atque e aequalis b . Aequalis autem a , qui sit h , addatur e , eritque he aequalis ab . Et quia ab ad c est datus, erit et he ad eius quadruplum, hoc est f ; totius ergo hef ad he proportio data. Cumque sit hef datus, erit he atque ab datus.

Verbi gratia. Sit unus ad alium sesquiquartus et detracto ab eo 4 reliqui medietas ei addita 11; dupletur ergo 11 et fiant 22, cui addatur 4 et erunt 26. Quia ergo duplum et sesquiquarta³⁾ est continens alium [bis] et eius $\frac{3}{5}$, ille ergo erit 10 et alius 8.

Zum Schlusse möchte ich bemerken, dass ich vor kurzem während eines Aufenthaltes in Mailand den Pergamentcodex der Biblioteca Ambrosiana mit der Signatur D. 186. N. p. p. inf. (14. Jhdt.) einsah, welcher ebenfalls eine Handschrift des „Tractatus de numeris datis“ enthält. Dieselbe ist jedoch unvollständig und enthält nur das 1. Buch und die ersten 9 Paragraphen des 2. Buches. Dieser Theil stimmt mit der Curtze'schen Ausgabe, nur die Paragraphen XXI, XXII und XXIII des 1. Buches sind auch hier durch jene drei Abschnitte ersetzt, welche die Wiener Handschrift an dieser Stelle enthält. §. XXVIII des 1. Buches ist wieder durch §. XXI der gedruckten Ausgabe ersetzt. Die kleinen Einschaltungen im Anfange des Werkes, welche die Wiener Handschrift zeigt, finden sich in der Mailänder Handschrift nicht vor; dieselbe scheint dem Originale insofern ziemlich nahe zu stehen, als sie fast keine Schreibfehler aufweist. Da sie aber ebenfalls unvollständig ist, dürften die beiden im Besitze der k. k. Hofbibliothek in Wien befindlichen Handschriften überhaupt die einzigen sein, welche das vollständige Werk enthalten.

¹⁾ et. ²⁾ totum. ³⁾ sesquioctava.