INTORNO ALLE DERIVATE NORMALI DELLA FUNZIONE POTENZIALE DI
SUPERFICIE; NOTA DI G. MORERA.

L'artificio analitico semplicissimo col quale nella mia recente Nota « *Sulle derivate seconde della funzione potenziale di spazio* » (vedi *Il Nuovo Cimento* volume XXII) sono pervenuto a trovare condizioni generali per la esistenza di quelle derivate e le loro effettive espressioni mi ha condotto alla risoluzione dell'analogha questione circa le derivate normali della funzione potenziale di superficie. Pensando che questa mia nuova ricerca si connette naturalmente all'altra sopra ricordata e lusingandomi che, stante l'importanza e la difficoltà dell'argomento, la sua pubblicazione possa riuscire accetta ai matematici, mi permetto di esporla in questa breve Nota.

Per quanto a me consta le formule che qui trovo per le derivate normali della funzione potenziale di superficie, come quelle da me date nella Nota citata per le derivate seconde della funzione potenziale di spazio sono *nuove*, ma non ardirei sostenere in modo assoluto una simile affermazione, giacchè i bisogni dell'insegnamento hanno dato e danno troppo spesso occasione a matematici valenti di approfondire questi argomenti.

Esamineremo dapprima il caso di una distribuzione superficiale omogenea fatta con densità uno sopra un pezzo σ di superficie semplicemente connesso.

Indicando con $d\sigma$ l'elemento superficiale e con r la sua distanza dal punto potenziato P, avremo per espressione della funzione potenziale

$$V = \int \frac{d\sigma}{r}.$$

Sia P_0 un punto interno del pezzo di superficie agente σ e supponiamo che in P_0 la superficie ammetta non solo il piano tangente ma che in esso la curvatura sia continua, e cioè, che la curvatura normale di ogni linea della superficie uscente da P_0 sia finita e determinata in P_0 .

Indichiamo coi simboli n_0 e n'_0 le due normali a σ contrapposte in P_0 e con n e n' le due normali contrapposte sull'elemento mobile $d\sigma$, convenendo che n e n' sieno quelle due direzioni che succedono con continuità rispettivamente ad n_0 e ad n'_0 . Assunto il punto potenziato P sulla normale n_0 , avremo:

$$\frac{dV}{dn_0} = \int \frac{d}{dn_0} \frac{1}{r} d\sigma$$

od ancora identicamente:

$$\frac{dV}{dn_0} = \int \left(\frac{d}{dn_0} \frac{1}{r} + \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right) d\sigma - \int \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma.$$

L'ultimo integrale rappresenta l'angolo visuale sotto cui dal polo P è veduto il pezzo di superficie σ , quando per faccia positiva si assume quella rivolta dalla parte in cui corre la normale n . Adunque designato con $(\sigma)_r$ quest'angolo visuale la formula precedente si può scrivere:

$$\frac{dV}{dn_0} = -(\sigma)_r + \int \frac{\cos(rn_0) - \cos(rn)}{r^2} d\sigma,$$

nella quale scrittura intendiamo che la direzione r sia quella che da P corre verso l'elemento superficiale $d\sigma$.

Soffermiamoci alquanto ad esaminare l'ultimo integrale.

Detta u la proiezione ortogonale di r sul piano tangente a σ in P_0 , si ha: $u = r \sin (rn_0)$ e quindi:

$$(1) \int \frac{\cos (rn_0) - \cos (rn)}{r^2} d\sigma = \int \frac{\cos (rn_0) - \cos (rn)}{u} \sin^2 (rn_0) \frac{d\sigma}{u}.$$

Notiamo inoltre che si ha ovviamente:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\cos (rn_0) - \cos (rn)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(nn_0)}{u} \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \sin (rn_0),$$

e che, essendo continua la curvatura in P_0 , il limite di $\frac{(nn_0)}{u}$ è finito e determinato per ogni direzione uscente da P_0 . Il valore di $\lim \sin (rn_0)$ è evidentemente zero oppure uno secondochè P è distinto ovvero coincidente con P_0 .

Essendo la curvatura di σ continua in P_0 , esisterà una regione finita, più o meno ampia, circostante a P_0 , nella quale $(nn_0) < \frac{\pi}{2}$ e però in questa si potrà porre:

$$d\sigma = \frac{u du d\theta}{\cos (nn_0)}$$

dove u e θ indicano le coordinate polari nel piano tangente in P_0 alla superficie σ . Allora quella porzione dell'integrale (1) che riferisce alla regione anzidetta diviene:

$$\iint \frac{\cos (rn_0) - \cos (rn)}{u} \frac{\sin^2 (rn_0)}{\cos (nn_0)} du d\theta,$$

d'onde emerge che l'integrale (1) rimane finito, determinato e continuo anche quando il punto potenziato P si avvicina indefinitamente a P_0 , e che al limite assume il valore:

$$\Theta = \int \frac{\cos (r_0 n_0) - \cos (r_0 n)}{r_0^2} d\sigma,$$

nella quale espressione r_0 designa il raggio vettore che da P_0 va all'elemento $d\sigma$.

Detto Ω l'angolo visuale sotto cui dal polo P_0 è visto il pezzo di superficie agente σ , abbiamo:

$$\Omega = \int \frac{d \frac{1}{r_0}}{dn} d\sigma,$$

ed è presto visto come il valore limite di $(\sigma)_P$, quando P si avvicina indefinitamente a P_0 , possa esprimersi per mezzo di Ω . Supponiamo che σ non sia chiusa: allora coll'aggiunta di un opportuno pezzo di superficie σ' possiamo renderla chiusa dalla parte di P , cioè in modo che P cada nello spazio racchiuso da $\sigma + \sigma'$. Avremo allora: $(\sigma)_P + (\sigma')_P = 4\pi$, e però:

$$\lim_{PP_0=0} (\sigma)_P = 4\pi - (\sigma')_{P_0};$$

ma d'altra parte

$$(\sigma')_{P_0} + \Omega = 2\pi,$$

quindi:

$$\lim_{PP_0=0} (\sigma)_P = 2\pi + \Omega.$$

Lo stesso risultato si otterrebbe se σ fosse chiusa dalla parte della n'_0 o già di per sè o per l'aggiunta di un nuovo pezzo di superficie. Al limite avremo dunque:

$$\lim_{PP_0=0} \frac{dV}{dn_0} = -(2\pi + \Omega) + \Theta.$$

Analogamente assunto un punto potenziato P' sulla normale n'_0 e fattolo avvicinare indefinitamente a P_0 , avremo al limite:

$$\lim_{P'P_0=0} \frac{dV}{dn_0} = -(2\pi - \Omega) - \Theta.$$

Passiamo ora al caso generale di una distribuzione fatta con legge qualunque sul pezzo di superficie σ . Diciamo h la densità.

Circa la funzione h ricordiamo che per dimostrare le solite proprietà della funzione potenziale occorre solo ammettere che essa sia integrabile lungo ogni linea della superficie agente, anche ridotta ai suoi valori assoluti. Noi ammetteremo in oltre

che in P_0 la densità abbia un valore finito e determinato e che

$\frac{|h-h_0|}{r_0}$ sia integrabile a partire da P_0 lungo qualunque linea

uscendo da quel punto.

Questa condizione richiede, come ognuno sa, che h sia continua in P_0 , ma non richiede necessariamente l'esistenza delle derivate di h . Questa condizione sarebbe soddisfatta, per esempio, allorquando per tutti i punti di un intorno superficiale di P_0 , comunque piccolo purchè finito, fosse verificata la condizione:

$$|h-h_0| \leq c r_0^\mu$$

con μ positivo e non nullo e c positivo e finito.

Ammesse le proprietà indicate per la funzione h e che la superficie agente sia di una curvatura continua in P_0 è presto dimostrato che le derivate normali $\frac{dV}{dn_0}$, $\frac{dV}{dn'_0}$ convergono verso limiti determinati e finiti quando i punti P, P' si accostano indefinitamente a P_0 .

Infatti si ha:

$$V = \int \frac{h d\sigma}{r}; \quad \frac{dV}{dn_0} = \int h \frac{d}{dn_0} \frac{1}{r} d\sigma = h_0 \int \frac{d}{dn_0} \frac{1}{r} d\sigma + \int (h-h_0) \frac{d}{dn_0} \frac{1}{r} d\sigma.$$

Ora quando P si accosta indefinitamente a P_0 il primo integrale tende verso un limite, che già abbiamo trovato. Il 2° integrale può essere scritto nella forma:

$$\int \frac{h-h_0}{r_0} \frac{r_0}{r} \frac{u}{r} \cos(rn_0) \frac{d\sigma}{u},$$

e di qui si vede subito, ricorrendo alla stessa trasformazione che abbiamo utilizzata per studiare l'integrale (1), che questo integrale si mantiene determinato, finito e continuo ed al limite assume il valore:

$$\int (h-h_0) \frac{d}{dn_0} \frac{1}{r_0} d\sigma,$$

Si ha adunque senz'altro:

$$\lim_{P \cdot P_0 = 0} \frac{dV}{dn_0} = -h_0 (2\pi + \Omega - \Theta) + \int (h - h_0) \frac{d \frac{1}{r_0}}{dn_0} d\sigma,$$

ed in modo perfettamente analogo:

$$\lim_{P' \cdot P_0 = 0} \frac{dV}{dn'_0} = -h_0 (2\pi - \Omega + \Theta) + \int (h - h_0) \frac{d \frac{1}{r'_0}}{dn'_0} d\sigma.$$

Diciamo F_0 la componente normale della forza (ripulsiva) esercitata dalla superficie agente sull'unità di massa collocata in P_0 , stimata positivamente nel verso n_0 ; avremo:

$$\begin{aligned} F_0 &= - \int h \frac{d \frac{1}{r_0}}{dn_0} d\sigma = -h_0 \int \frac{d \frac{1}{r_0}}{dn_0} d\sigma - \int (h - h_0) \frac{d \frac{1}{r_0}}{dn_0} d\sigma \\ &= -h_0 \left\{ \int \left(\frac{d \frac{1}{r_0}}{dn} + \frac{d \frac{1}{r_0}}{dn_0} \right) d\sigma - \int \frac{d \frac{1}{r_0}}{dn} d\sigma \right\} - \int (h - h_0) \frac{d \frac{1}{r_0}}{dn_0} d\sigma, \end{aligned}$$

ossia, introducendo le segnature Ω e Θ :

$$F_0 = h_0 (\Omega - \Theta) - \int (h - h_0) \frac{d \frac{1}{r_0}}{dn_0} d\sigma.$$

Confrontando i valori limiti delle derivate normali con quello di F_0 si concludono le note relazioni:

$$\lim \frac{dV}{dn_0} = -2\pi h_0 - F_0$$

$$\lim \frac{dV}{dn'_0} = -2\pi h_0 + F_0$$

che di regola si dimostrano con considerazioni poco rigorose ¹⁾.

Notiamo inoltre che se le condizioni ammesse in P_0 per la funzione h e per la natura geometrica della superficie agente sono soddisfatte in tutti i punti di una regione superficiale finita, siccome gli integrali che figurano nelle nostre formule sono tutti propri, si conclude facilmente che i valori limiti delle derivate normali sono continui dappertutto nell'interno di quella regione.

1) Vedi p. es. Riemann, *Schwere, Elektrizität und Magnetismus*, pag. 46-57.