Neue Eigenschaften des Strahlencomplexes zweiten Grades.

Von

TH. REYE in Strassburg i. E.

In einer meiner analytisch-geometrischen Publicationen v. J. 1876 (in Crelle's Journal 82, S. 192) ergab sich beiläufig ein merkwürdiger Zusammenhang des quadratischen Strahlencomplexes mit gewissen quadratischen Mannigfaltigkeiten von ∞^8 mit dem Complexe covarianten Flächen zweiten Grades. Daraus aber lassen sich neue Eigenschaften des quadratischen Strahlencomplexes ableiten, die ich, angeregt durch den reichhaltigen dritten Theil von Sturm's Liniengeometrie, hier in Kürze zusammenstelle. Der Complex braucht nicht der allgemeine zweiten Grades zu sein; er kann einzelne und sogar unendlich viele Doppelstrahlen haben, und in einem sehr speciellen Falle aus den Tangenten eines Ellipsoides, Paraboloides oder Hyperboloides bestehen. Wir setzen aber voraus, dass die Kegel des Complexes nicht alle eine Fläche Φ^2 zweiter Classe stützen, d. h. nicht alle Poltetraedern von Φ^2 umschrieben sind, und dass seine ebenen Complexcurven nicht alle auf einer Fläche F^2 zweiter Ordnung ruhen, d. h. nicht alle Poltetraedern von F^2 eingeschrieben sind. Und insbesondere sollen weder die C.-Kegel alle durch einen Punkt gehen, noch die C.-Curven alle eine Ebene berühren. Dann gelten für den quadratischen Complex u. a. folgende Sätze:

Die Ebenen solcher Complexcurven, die auf einer beliebig gegebenen Fläche F^2 zweiter Ordnung ruhen, umhüllen eine Fläche Φ^2 zweiter Classe. Und umgekehrt: Die C.-Curven, deren Ebenen eine beliebige Fläche Φ^2 zweiter Classe berühren, ruhen auf einer Fläche F^2 zweiter Ordnung. Wenn die Fläche Φ^2 eine Flächenschaar beschreibt, so beschreibt die entsprechende Fläche F^2 einen Flächenbüschel, und umgekehrt; dieser F^2 -Büschel aber ist zu der Flächenschaar projectiv und enthält i. A. zwei Flächen F^2 , die ihre entsprechenden Flächen Φ^2 stützen, d. h. Poltetraedern der entsprechenden Φ^2 umschrieben sind. Ueberhaupt giebt es ∞^8 Flächen F^2 , die ihre entsprechenden Flächen Φ^2 stützen, und zwar bilden sie ein System zweiten Grades. Dieses quadratische F^2 -System achter Stufe aber enthält alle ∞^3 zweifachen

Ebenen des Raumes und die ∞^5 Ebenenpaare, aus deren Doppellinien der quadratische Complex besteht. Den Flächen des F^2 -Systemes entsprechen die Flächen Φ^2 einer anderen achtfach unendlichen Mannigfaltigkeit, eines quadratischen „ Φ^2 -Gewebes“. Dieses Gewebe enthält jede Fläche zweiter Classe, die auf ihrer entsprechenden F^2 ruht, und insbesondere jede ebene Complexcurve.

Die ∞^8 Flächen des quadratischen F^2 -Systemes stehen zu dem quadratischen Complexe in der invarianten Beziehung, dass unter ihren Poltetraedern je ∞^1 „Complextetraeder“ vorkommen, d. h. solche, deren Kanten aus Complexstrahlen bestehen. Die ∞^8 Flächen des quadratischen Φ^2 -Gewebes aber sind je ∞^1 Complextetraedern eingeschrieben und gleichfalls mit dem Complexe covariant.

Eine beliebige Fläche F^2 zweiter Ordnung ist bezüglich des quadratischen F^2 -Systemes ∞^8 anderen Flächen F_1^2 conjugirt, d. h. sie ist von ihnen harmonisch getrennt durch je zwei Flächen des Systemes, die mit ihr in einem F^2 -Büschel liegen. Ebenso ist eine beliebige Fläche Φ^2 zweiter Classe ∞^8 anderen Φ_1^2 , die eine lineare Mannigfaltigkeit bilden, conjugirt bezüglich des quadratischen Φ^2 -Gewebes. Sind nun F^2 und Φ^2 zwei homologe, durch den quadratischen Complex einander zugewiesene Flächen, so stützt F^2 alle diese Flächen Φ_1^2 , die der Φ^2 conjugirt sind bezüglich des quadratischen Φ^2 -Gewebes, und zugleich ruht Φ^2 auf allen den ∞^8 Flächen F_1^2 , die der F^2 conjugirt sind bezüglich des quadratischen F^2 -Systemes. Ich nenne F^2 die Polare von Φ^2 bezüglich des Φ^2 -Gewebes, und Φ^2 die Polare von F^2 bezüglich des quadratischen F^2 -Systemes. Von zwei bezüglich des Systemes conjugirten Flächen F^2 , F_1^2 stützt also jede die Polare der andern; ihre Polaren Φ^2 , Φ_1^2 aber sind bezüglich des quadratischen Φ^2 -Gewebes conjugirt, und jede von ihnen ruht auf der Polare der andern bezüglich des Gewebes. Sich selbst conjugirt sind nur die ∞^8 Flächen des quadratischen F^2 -Systemes bzw. Φ^2 -Gewebes.

Diese letzten Sätze sind in der a. a. O. entwickelten Polarentheorie der quadratischen F^2 -Systeme und Φ^2 -Gewebe achter Stufe enthalten. Am gleichen Orte (Crelle 82, S. 192) habe ich die Gleichung unseres durch den quadratischen Complex bestimmten F^2 -Systemes aufgestellt und bewiesen, dass dieses System alle zweifachen Ebenen und die ∞^5 Ebenenpaare enthält, deren Doppellinien Complexstrahlen sind, und dass die Polare einer zweifachen Ebene mit deren Complexcurve zusammenfällt. Daraus aber und aus den invarianten Beziehungen, in denen apolare Flächen zweiten Grades zu einander stehen, ergeben sich alle unsere übrigen Sätze. Statt ihrer wollen wir aber lieber die folgenden zu ihnen reciproken Eigenschaften des quadratischen Complexes beweisen.

Die Mittelpunkte der Complexkegel, die eine beliebige Fläche Φ^2

zweiter Classe stützen, liegen auf einer Fläche F^2 zweiter Ordnung; und die Complexkegel, deren Mittelpunkte auf einer beliebigen F^2 liegen, stützen eine Φ^2 . Von den auf F^2 liegenden ∞^1 singulären Punkten zerfallen die C.-Kegel in je zwei Ebenen, die nach Φ^2 conjugirt sind. Diese Φ^2 ist keineswegs mit der Fläche identisch, die vorhin der Fläche F^2 entsprach. Beschreibt F^2 einen Flächenbüschel, so beschreibt die entsprechende Fläche Φ^2 eine zu dem Büschel projective Flächenschaar und kommt i. A. zweimal in solche Lage, dass sie auf ihrer entsprechenden F^2 ruht. Demnach bilden die Flächen Φ^2 , die auf ihren entsprechenden F^2 ruhen, wiederum ein quadratisches Φ^2 -Gewebe achter Stufe, und ihnen entsprechen die Flächen eines quadratischen F^2 -Systemes achter Stufe. Das quadratische Φ^2 -Gewebe enthält die ∞^8 zweifachen Punkte des Raumes und die ∞^5 Punktepaare, die auf je einem Strahle des Complexes liegen; das quadratische F^2 -System aber enthält alle Complexkegel und jede Fläche F^2 zweiter Ordnung, die ihre entsprechende Φ^2 stützt.

Von den vorhin besprochenen quadratischen Flächenmannigfaltigkeiten sind diese beiden verschieden, ihre ∞^8 Flächen aber sind wiederum mit dem quadratischen Complex covariant. Den Flächen des quadratischen F^2 -Systemes können nämlich je ∞^1 Complextetraeder eingeschrieben werden, und die Flächen des quadratischen Φ^2 -Gewebes haben je ∞^1 Complextetraeder zu Poltetraedern. Die nicht singulären Flächen dieses Φ^2 -Gewebes sind mit denen des vorhin besprochenen quadratischen F^2 -Systemes identisch, ausser ihnen enthält das Gewebe noch ∞^7 Curven zweiter Classe, ∞^5 Punktepaare und ∞^3 zweifache Punkte, das System dagegen ∞^7 Kegel zweiter Ordnung, ∞^5 Ebenenpaare und ∞^3 zweifache Ebenen.

Von den beiden einander entsprechenden Flächen F^2 , Φ^2 ist F^2 die Polare von Φ^2 bezüglich des quadratischen Φ^2 -Gewebes und Φ^2 die Polare von F^2 bezüglich des zugehörigen quadratischen F^2 -Systemes in demselben Sinne wie vorhin. Von zwei bezüglich des Gewebes conjugirten Flächen Φ^2 , Φ_1^2 ruht also jede auf der Polare der anderen, und ihre Polaren F^2 , F_1^2 sind conjugirt bezüglich des F^2 -Systemes. Sich selbst conjugirt sind wieder nur die ∞^8 Flächen des F^2 -Systemes und des Φ^2 -Gewebes, und nur diese Flächen sind zu ihren entsprechenden apolar.

Um nun diese Eigenschaften des quadratischen Complexes zu begründen, gehen wir aus von folgenden Sätzen, die schon a. a. O. (Crelle 82, S. 193) bewiesen sind:

Durch den quadratischen Strahlencomplex ist ein quadratisches Φ^2 -Gewebe achter Stufe nebst dem zugehörigen quadratischen F^2 -System achter Stufe bestimmt. Das Φ^2 -Gewebe enthält alle zweifachen Punkte des Raumes und alle auf je

einem Complexstrahle liegenden Punktepaare, das F^2 -System aber enthält u. a. alle Kegel des Complexes. Jeder Complexkegel ist die Polare seines Mittelpunktes bezüglich des Φ^2 -Gewebes.*)

Wenn also eine Fläche Φ^2 zweiter Classe sich auf einen zweifachen Punkt reducirt, so geht ihre Polare F^2 bezüglich des quadratischen Φ^2 -Gewebes über in den Complexkegel dieses Punktes. Mit anderen Worten: Der zweifache Punkt ist allen auf seinem C.-Kegel ruhenden Flächen Φ_1^2 zweiter Classe conjugirt bezüglich des Φ^2 -Gewebes, und durch ihn gehen alle Polaren F_1^2 dieser Flächen Φ_1^2 . Die Polare F^2 einer beliebigen Φ^2 bezüglich des Gewebes enthält demnach die Mittelpunkte aller C.-Kegel, auf denen Φ^2 ruht, d. h. denen Poltetraeder von Φ^2 eingeschrieben werden können. Von dieser F^2 aber ist Φ^2 die Polare bezüglich des quadratischen F^2 -Systemes (Crelle 82, S. 184); und wenn Φ^2 eine Flächenschaar beschreibt, so beschreibt F^2 einen Flächenbüschel, der zu der Schaar projectiv ist (Crelle 82, S. 178). Die von uns aufgestellten Eigenschaften des quadratischen Complexes sind damit bewiesen bis auf seine invarianten

*) Das quadratische Φ^2 -Gewebe hat die Gleichung:

$$(1) \quad \sum C_{ik,lm} \begin{vmatrix} a_{il} & a_{im} \\ a_{kl} & a_{km} \end{vmatrix} = 0, \quad (i, k, l, m = 1, 2, 3, 4),$$

wenn der quadratische Strahlencomplex und eine beliebige Fläche Φ^2 zweiter Classe dargestellt werden durch:

$$(2) \quad \sum C_{ik,lm} \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_k & y_k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_l & y_l \\ x_m & y_m \end{vmatrix} = 0$$

und

$$(3) \quad \sum a_{ik} \xi_i \xi_k = 0.$$

Hierin bezeichnen $a_{ik} = a_{ki}$ und $C_{ik,lm} = C_{lm,ik} = -C_{ki,lm}$ Constante.

Die Fläche Φ^2 zerfällt in zwei Punkte x, y , wenn:

$$(4) \quad 2a_{ik} = x_i y_k + x_k y_i \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

ist; durch die Substitution (4) aber geht (1) in (2) über, und das Φ^2 -Gewebe enthält demnach alle auf je einem Complexstrahle liegenden Punktepaare und insbesondere alle zweifachen Punkte. Bezüglich des Gewebes (1) sind zwei Flächen zweiter Classe conjugirt, wenn ihre Coordinaten a_{ik} und b_{ik} der Gleichung:

$$(5) \quad \sum C_{ik,lm} \begin{vmatrix} a_{il} & b_{im} \\ a_{kl} & b_{km} \end{vmatrix} + \sum C_{ik,lm} \begin{vmatrix} b_{il} & a_{im} \\ b_{kl} & a_{km} \end{vmatrix} = 0$$

genügen. Reduciren sich die beiden Flächen auf zweifache Punkte x, y , so wird $a_{ik} = x_i x_k$ und $b_{ik} = y_i y_k$; die Gleichung (5) aber geht dann in (2) über, und die Polare des zweifachen Punktes x fällt folglich mit dessen Complexkegel zusammen.

Beziehungen zu den ∞^8 Flächen des F^2 -Systemes und des Φ^2 -Gewebes, auf die wir hernach zurückkommen werden.

Wie construirt man nun aber mit Hülfe des quadratischen Complexes zu einer beliebigen Fläche Φ^2 zweiter Classe die entsprechende Fläche F^2 zweiter Ordnung? Der Beantwortung dieser Frage schicken wir einige Bemerkungen über apolare Flächen zweiten Grades voraus, die uns das Verständniss der betreffenden Constructionen erleichtern werden. Ist:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

die Gleichung einer veränderlichen Ebene ξ in homogenen Punktkoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 , so können wir eine Φ^2 und eine F^2 darstellen durch:

$$a_{11} \xi_1^2 + 2a_{12} \xi_1 \xi_2 + \dots + 2a_{34} \xi_3 \xi_4 + a_{44} \xi_4^2 = 0$$

und

$$a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + \dots + 2a_{34} x_3 x_4 + a_{44} x_4^2 = 0.$$

Diese beiden Flächen aber nenne ich apolar zu einander und sage, die Fläche F^2 zweiter Ordnung stützt oder trägt die Fläche Φ^2 zweiter Classe, und Φ^2 ruht oder stützt sich auf F^2 , wenn die Coefficienten ihrer Gleichungen der bilinearen Gleichung:

$$a_{11} a_{11} + 2a_{12} a_{12} + \dots + 2a_{34} a_{34} + a_{44} a_{44} = 0$$

genügen (vgl. Crelle 82, S. 1 und 64).

Zu einer Fläche F^2 oder Φ^2 zweiten Grades sind demnach ∞^8 Flächen Φ^2 resp. F^2 apolar, die eine lineare Mannigfaltigkeit bilden. Ein F^2 -Büschel enthält nur eine Fläche, die zu einer gegebenen Φ^2 apolar ist, falls nicht alle seine Flächen diese Φ^2 stützen. Ist ein F^2 -Büschel projectiv zu einer Φ^2 -Schaar, so enthält er i. A. zwei Flächen F^2 , die ihre homologen Flächen Φ^2 stützen. Eine Fläche F^2 trägt jeden zweifachen Punkt, der auf ihr liegt, und jedes Punktepaar, dessen Punkte conjugirt sind bezüglich der F^2 ; eine Fläche Φ^2 aber stützt sich auf jede sie berührende zweifache Ebene und auf jedes Ebenenpaar, dessen Ebenen nach Φ^2 conjugirt sind. Dieses alles folgt leicht aus der bilinearen Bedingungsgleichung.

Jede Fläche F^2 , die einem Poltetraeder einer Fläche Φ^2 umschrieben ist, stützt diese Φ^2 (vgl. Crelle 78, S. 345), und jede Φ^2 , die einem Poltetraeder einer F^2 eingeschrieben ist, ruht auf F^2 ; einer F^2 aber, die eine Φ^2 stützt, können dreifach unendlich viele Poltetraeder von Φ^2 eingeschrieben, und der Φ^2 können zugleich ∞^3 Poltetraeder von F^2 umgeschrieben werden. Ist Φ^2 eine Curve zweiter Classe, so können den zu ihr apolaren F^2 je ∞^1 Poldreiecke der Curve eingeschrieben werden, und die Curve stützt sich auf die in ihrer Ebene liegenden Schnittcurven dieser F^2 . Ist F^2 ein Kegel zweiter Ordnung, so können den zu F^2 apolaren Φ^2 je ∞^1 Poldreikante des Kegels um-

schrieben werden, und der Kegel ist zu den mit ihm concentrischen Tangentenkegeln dieser Φ^2 apolar.

Die Kegel des quadratischen Complexes, bezüglich deren zwei beliebige Punkte P, Q conjugirt sind, stützen das Punktpaar P, Q , und ihre Mittelpunkte liegen demnach auf einer durch P und Q gehenden Fläche zweiter Ordnung F^2 , wie schon Battaglini gefunden hat. Diese Polare F^2 des Punktpaares aber enthält die biquadratischen Schnittlinien von je zwei Complexkegeln, deren Mittelpunkte auf der Geraden PQ liegen und durch P und Q harmonisch getrennt sind; denn die C.-Kegel der Punkte dieser Schnittlinien trennen P von Q harmonisch. Ueberhaupt schneiden sich solche C.-Kegel, deren Mittelpunkte in einer geraden Involution einander zugeordnet sind, paarweise in Linien, deren Ort eine F^2 ist, mögen nun die Doppelpunkte P, Q der Involution reell oder imaginär sein. Damit ist von der Polare F^2 eines Punktpaares P, Q eine Construction gegeben.

Wenn das Punktpaar P, Q auf einem Complexstrahle liegt, so geht seine Polare F^2 durch diesen Strahl, trägt also das Paar und ist in dem quadratischen F^2 -System achter Stufe enthalten; denn in diesem Falle bestehen jene auf ihr liegenden biquadratischen Linien aus dem Strahle PQ und je einer cubischen Raumcurve. Dass das quadratische Φ^2 -Gewebe 8. St. jedes auf einem Complexstrahle liegende Punktpaar enthält, folgt hieraus wiederum. Ist PQ ein singulärer Complexstrahl, so ist F^2 ein Kegel des F^2 -Systemes; denn alsdann berühren die durch PQ gehenden C.-Kegel sich und die zugehörige singuläre Ebene längs PQ , jene biquadratischen Schnittlinien zerfallen in die zweifache Gerade PQ und je einen Kegelschnitt, und ihr geometrischer Ort F^2 berührt die singuläre Ebene längs PQ . Das quadratische F^2 -System enthält demnach einen Bündel von ∞^2 Kegeln, die sich längs PQ berühren, und unter ihnen ∞^1 Ebenenpaare, die aus der singulären und je einer Ebene einer gewissen Geraden bestehen.

Ist Φ^2 eine beliebige Curve zweiter Classe, so liegen auf ihrer Polare F^2 die Mittelpunkte aller Complexkegel, denen Poldreiecke der Curve eingeschrieben werden können. Insbesondere liegen also auf F^2 die acht Schnittpunkte von je drei C.-Kegeln, deren Mittelpunkte ein Poldreieck von Φ^2 bilden. Wenn die drei nach Φ^2 conjugirten Mittelpunkte oder wenn zwei von ihnen ihre Lage ändern, so beschreiben die Schnittpunkte der drei C.-Kegel die Fläche F^2 bzw. eine biquadratische Raumcurve auf F^2 . Eine Construction dieser Polare F^2 ist damit gegeben*).

*) Die Mittelpunkte aller gleichseitigen Complexkegel liegen, beiläufig bemerkt, auf einer Fläche zweiter Ordnung, nämlich auf der Polare des unendlich fernen imaginären Kugelskreises.

Die Fläche F^2 enthält die Schnittpunkte von je zwei Complexstrahlen, die bezüglich der Curve Φ^2 conjugirt sind. Sie ist somit einem Poldreieck von Φ^2 umschrieben, wenn dessen drei Seiten aus Complexstrahlen bestehen. In diesem Falle also stützt F^2 die Curve Φ^2 und ist in dem quadratischen F^2 -System achter Stufe enthalten; Φ^2 aber ist eine singuläre Fläche des quadratischen Φ^2 -Gewebes. Zugleich stützt der Kegelschnitt Φ^2 die Complexcurve seiner Ebene, weil dieser Curve eines seiner Poldreiecke umschrieben ist, und weil ihm daher Poldreiecke der C.-Curve eingeschrieben werden können*). Das quadratische Φ^2 -Gewebe achter Stufe enthält also jeden Kegelschnitt, der irgend eine Complexcurve stützt, d. h. einem Poldreieck der C.-Curve umschrieben ist. Und jede nicht zerfallende Curve des Gewebes stützt die in ihrer Ebene liegende Complexcurve. Damit sind die ∞^7 singulären Flächen des quadratischen Φ^2 -Gewebes bestimmt, in jeder Ebene ∞^4 .

Ist Φ^2 eine Complexcurve, so liegt sie auf ihrer Polare F^2 , weil die C.-Kegel ihrer Punkte durch je eine ihrer Tangenten gehen und die Curve stützen. Von den ∞^3 Complexcurven sind nur die ∞^2 zerfallenden in dem quadratischen Φ^2 -Gewebe enthalten; ihre Polaren sind Kegel des quadratischen F^2 -Systemes.

Die Polare einer beliebigen Fläche Φ^2 zweiter Classe geht durch jeden Schnittpunkt von vier Complexkegeln, deren Mittelpunkte A, B, C, D ein Poltetraeder von Φ^2 bilden; denn der C.-Kegel eines solchen Schnittpunktes ist dem Poltetraeder umschrieben, stützt also die Fläche Φ^2 . Allerdings haben vier C.-Kegel i. A. keinen Punkt gemein; aber wir können das Poltetraeder $ABCD$ von Φ^2 so verändern, dass ihm ein C.-Kegel umschrieben werden kann. Wir lassen die nach Φ^2 conjugirten Eckpunkte A, B auf einer Geraden g_1 , die Eckpunkte B, D aber auf deren Polare g_2 je eine Involution conjugirter Punkte beschreiben. Dann beschreibt die Schnittlinie der C.-Kegel von A und B (resp. von C und D), wie vorhin bewiesen wurde, eine Fläche F_1^2 (resp. F_2^2) zweiter Ordnung, nämlich die Polare des Punktepaars, welches die Gerade g_1 (resp. g_2) mit Φ^2 gemein hat. Die Schnittpunkte von F_1^2 und F_2^2 aber sind die Mittelpunkte von C.-Kegeln, denen je ein Poltetraeder $ABCD$ von Φ^2 mit den Gegenkanten g_1, g_2 eingeschrieben ist. Folglich schneiden sich die Polaren der Punktepaare, welche irgend zwei nach Φ^2 polare Gerade mit der Fläche Φ^2 gemein haben, auf der Polare F^2 von Φ^2 . Eine Construction der Polare einer beliebigen Fläche zweiter Classe ist damit gegeben.

Ist A der Pol einer Ebene α in Bezug auf Φ^2 , so schneiden sich

*) Vgl. Reye, Geometrie der Lage, 3. Aufl., I, S. 223.

der Complexkegel von A und die Polare des in α liegenden Kegelschnittes von Φ^2 in einer biquadratischen Raumcurve, die gleichfalls auf der Polare von Φ^2 liegt. Der Beweis ist dem eben geführten analog.

Ein Tetraeder, dessen sechs Kanten in dem quadratischen Complex enthalten sind, nannten wir vorhin ein „Complextetraeder“. Wenn eine Fläche Φ^2 zweiter Classe irgend ein Complextetraeder zum Poltetraeder hat, so ist sie in dem quadratischen Φ^2 -Gewebe, und ihre Polare F^2 ist in dem quadratischen F^2 -System achter Stufe enthalten; denn ihre Polare ist dem Poltetraeder umschrieben, stützt also die Fläche Φ^2 . Das quadratische Φ^2 -Gewebe enthält also die lineare Mannigfaltigkeit der ∞^3 Flächen zweiter Classe, die ein beliebiges Complextetraeder zum Poltetraeder haben, darunter dessen vier Eckpunkte als zweifache Punkte. Das quadratische F^2 -System enthält die ∞^3 dem Complextetraeder umschriebenen Polaren dieser Φ^2 ; diese Polaren aber bilden ein F^2 -Gebüsch, welches die C.-Kegel der vier Eckpunkte enthält und durch sie linear bestimmt ist.

Der quadratische Complex enthält die Kanten von ∞^6 Tetraedern. Um nämlich eines dieser Complextetraeder zu construiren, kann man einen Eckpunkt A ganz beliebig, den zweiten B beliebig auf dem C.-Kegel von A und den dritten C irgendwo auf der cubischen Raumcurve annehmen, in welcher die C.-Kegel von A und B sich abgesehen von der Geraden AB schneiden. Der Complexkegel von C hat mit dieser Raumcurve ausser A , B und C zwei Punkte D gemein, die mit A , B und C je ein C.-Tetraeder bilden.

Die ∞^6 Complextetraeder sind Poltetraeder von je ∞^3 Flächen zweiter Classe, die alle in dem quadratischen Φ^2 -Gewebe enthalten sind. Weil aber das Gewebe nicht aus ∞^9 , sondern nur aus ∞^8 Flächen besteht, so erhalten wir seine Flächen je ∞^1 -mal mittelst der Complextetraeder. Die Flächen des quadratischen Φ^2 -Gewebes haben demnach je ∞^1 Complextetraeder zu Poltetraedern, und die Flächen des quadratischen F^2 -Systemes sind je ∞^1 Complextetraedern umgeschrieben. Damit sind auch die invarianten Beziehungen des quadratischen Complexes zu diesen ∞^8 Flächen zweiten Grades bewiesen.

Von den Complextetraedern gelten u. a. folgende leicht zu beweisende Sätze. Ein beliebiger Punkt A ist Eckpunkt von ∞^3 Complextetraedern; in diesen liegen ihm die Berührungsebenen α einer Fläche zweiter Classe gegenüber, und zwar jede Ebene α in ∞^1 C.-Tetraedern, deren übrige Ebenen einen Kegel zweiter Classe umhüllen und deren übrige Eckpunkte in α auf einem Kegelschnitt liegen. Wenn der C.-Kegel von A in zwei Ebenen zerfällt, so reducirt sich die Fläche zweiter Classe auf zwei Punkte dieser Ebenen. Ein nicht durch A gehender Complexstrahl ist Kante von zwei der ∞^3 Complextetraeder;

er schneidet den C.-Kegel von A in zwei gemeinschaftlichen Eckpunkten dieser Tetraeder.

Eine beliebige Ebene α ist Seitenfläche von ∞^3 Complextetraedern; in diesen liegen der Ebene die Punkte A einer Fläche zweiter Ordnung gegenüber, und zwar jeder Punkt A in ∞^1 Tetraedern, deren übrige Eckpunkte wieder in α auf einem Kegelschnitt liegen, u. s. w. Ein Complexstrahl, der nicht in α liegt, ist Kante von zwei der ∞^3 Tetraeder. Die Mittelpunkte der Complexkegel, denen Tangentendreiecke einer gegebenen Complexcurve eingeschrieben werden können, liegen auf einer Fläche zweiter Ordnung. Diese Fläche zerfällt in zwei Ebenen, wenn die C.-Curve sich auf zwei Punkte reducirt.

Ein beliebiger Complexstrahl k ist Kante von ∞^3 Complextetraedern; in diesen liegen der Kante k die Strahlen k_1 einer Congruenz zweiter Ordnung und zweiter Classe gegenüber, und zwar jeder Strahl k_1 in ∞^1 Tetraedern, deren übrige Kanten auf einer Fläche vierten Grades, und deren Eckpunkte auf k und k_1 in zwei Involutionen liegen. Die Congruenz besteht aus den gemeinschaftlichen Strahlen des quadratischen und eines linearen Complexes. Ein beliebiger Punkt ist Eckpunkt, und eine beliebige Ebene ist Fläche von zwei der ∞^3 Complextetraeder. Ein mit k incidenter C.-Strahl l ist Kante von ∞^1 der C.-Tetraeder; in diesen liegen der Kante k (oder l) die Strahlen einer Regelfläche vierten Grades gegenüber, die l (resp. k) zur Doppelpunktsgerade hat; ferner liegen dem Endpunkte kl die Ebenen eines biquadratischen Ebenenbüschels, und der Ebene kl die Punkte einer biquadratischen Raumcurve gegenüber. In dieser Raumcurve schneiden sich der C.-Kegel des Punktes kl und die zu der Ebene kl gehörige Fläche zweiter Ordnung.

Die Complexkegel der Punkte von k schneiden sich bekanntlich in dem Complexstrahle k und in vier Punkten A ; von einem beliebigen dieser Punkte A zerfällt aber der C.-Kegel in zwei Ebenen, von denen die eine α durch k , die andere β nicht durch k geht. Jeder Punkt P von β nun bildet mit A und den beiden Punkten, die sein C.-Kegel mit k gemein hat, ein Complextetraeder, worin k und AP zwei Gegenkanten sind. Und wenn P in β einen Strahl des Büschels A durchläuft, so beschreiben die übrigen vier Kanten des C.-Tetraeders die Ebene Ak und eine cubische Regelfläche. Die quadratische Congruenz der Strahlen k_1 , die dem C.-Strahle k in je ∞^1 Complextetraedern gegenüberliegen, enthält demnach vier Strahlenbüschel (A, β) erster Ordnung.

Die vier singulären Punkte A bilden ein Tetraeder, dessen Ebenen wir mit α bezeichnen. Eine beliebige der vier Ebenen α schneidet k in einem Punkte Q , dessen C.-Kegel drei Strahlen QA mit α gemein hat und folglich in α und eine durch k gehende Ebene α zerfällt.

Die Complexcurve in α aber reducirt sich auf Q und einen anderen Punkt B , durch den von drei Büscheln (A, β) Strahlen gehen. Der C.-Kegel von B zerfällt deshalb in α und eine andere Ebene, deren Schnittpunkt mit k wir P nennen. Dann bilden B , P und Q mit jedem Punkte R , den der C.-Kegel von P mit α gemein hat, ein C.-Tetraeder, worin k und BR zwei Gegenkanten sind. Die quadratische Congruenz der Strahlen k_1 enthält also auch vier Strahlenbüschel (B, α) erster Ordnung.

Nicht nur liegen die vier Ebenen α den vier Punkten A in einem Tetraeder gegenüber, sondern ebenso die Ebenen β den Punkten B in einem zweiten Tetraeder. Diese beiden Tetraeder aber sind, wie aus dem Vorhergehenden sich ergibt, einander um- und zugleich eingeschrieben. Die acht Strahlenbüschel (A, β) und (B, α) liegen in dem linearen Complex, der mit dem quadratischen die Congruenz der Strahlen k_1 gemein hat; und fünf ihrer Strahlen bestimmen ihn.

Wenn k ein singulärer Complexstrahl ist, so berühren sich in ihm die C.-Kegel aller seiner Punkte. Diese Kegel durchdringen sich deshalb zu zweien in Kegelschnitten, deren Ebenen alle durch eine Gerade l gehen. Die Complexstrahlen k_1 aber, die dem singulären Strahle k in je ∞^1 Complextetraedern gegenüberliegen, schneiden alle die Gerade l , und ihre quadratische Congruenz ist demnach in dem speciellen Complex der mit l incidenten Strahlen enthalten.

Wenn insbesondere der quadratische Complex aus den Tangenten einer Fläche G^2 zweiten Grades besteht, so sind alle seine Strahlen singulär, die Gegenkanten seiner ∞^6 Complextetraeder berühren G^2 und sind zugleich conjugirt in Bezug auf G^2 , und von zwei Gegenkanten k, k_1 schneidet jede die Polare der anderen bezüglich G^2 . Von den Tangentenkegeln der Fläche G^2 zweiten Grades gelten u. a. die folgenden Sätze, denen andere über die Kegelschnitte der Fläche reciprok gegenüberstehen.

Die Mittelpunkte solcher Tangentenkegel von G^2 , denen Poltetraeder einer gegebenen Fläche Φ^2 zweiter Classe eingeschrieben werden können, liegen auf einer Fläche F^2 zweiter Ordnung. Wenn Φ^2 eine Flächenschaar beschreibt, so beschreibt F^2 einen Flächenbüschel, und umgekehrt; der Büschel ist zu der Schaar projectiv. Es giebt ∞^8 Flächen Φ^2 , die auf ihren entsprechenden Flächen F^2 ruhen, jede von ihnen hat ∞^1 Poltetraeder, deren Kanten die Fläche G^2 berühren. Diese ∞^8 mit G^2 covarianten Flächen zweiter Classe bilden ein quadratisches Φ^2 -Gewebe, das auch die ∞^5 auf je einer Tangente von G^2 liegenden Punktpaare enthält. Andere singuläre Flächen des Gewebes reduciren sich auf die ∞^7 Kegelschnitte, denen Poldreiecke von G^2 eingeschrieben werden können.

Die biquadratische Schnittlinie von zwei Tangentenkegeln der

Fläche G^2 beschreibt eine Fläche F^2 zweiter Ordnung, wenn die Mittelpunkte der Kegel eine gerade Involution beschreiben. Die beiden Doppelpunkte der Involution liegen auf F^2 , ihr gerader Träger aber nur dann, wenn er die Fläche G^2 berührt. In diesem besonderen Falle ist F^2 ein Kegel.

Die acht Schnittpunkte von drei Tangentenkegeln der Fläche G^2 beschreiben eine Fläche zweiter Ordnung, wenn die Mittelpunkte der Kegel sich so bewegen, dass sie in jeder ihrer Lagen ein Poldreieck eines gegebenen reellen oder imaginären Kegelschnittes bilden.

Von den Kegeln eines beliebigen quadratischen Complexes seien zum Schlusse noch folgende Sätze hervorgehoben. Die ∞^3 Complexkegel bilden ein F^2 -System dritter Stufe achten Grades, weil drei beliebige Flächen Φ^2 zweiter Classe i. A. auf acht Complexkegeln ruhen; die entsprechenden drei Flächen F^2 zweiter Ordnung schneiden sich in den associirten acht Mittelpunkten dieser Kegel. Ebenso bilden die ∞^3 ebenen Complexcurven ein Φ^2 -Gewebe dritter Stufe achten Grades. — Die ∞^2 C.-Kegel, deren Mittelpunkte auf einer F^2 liegen, bilden ein F^2 -System zweiter Stufe achten Grades, das in einem linearen F^2 -System achter Stufe enthalten ist; denn sie stützen eine Φ^2 , und zwei beliebige andere Φ^2 ruhen i. A. auf acht von ihnen, deren Mittelpunkte associirt sind. — Die ∞^1 C.-Kegel, in deren Mittelpunkten zwei F^2 sich schneiden, bilden ein F^2 -System erster Stufe achten Grades, das in einem linearen System siebenter Stufe enthalten ist.

Die ∞^2 C.-Kegel, deren Mittelpunkte in einer beliebigen Ebene η liegen, bilden ein F^2 -System zweiter Stufe vierten Grades und sind in einem linearen System fünfter Stufe enthalten. Sie stützen nämlich ein lineares Φ^2 -Gewebe dritter Stufe, dessen Flächen den ∞^3 aus η und je einer anderen Ebene bestehenden F^2 entsprechen, und zwei beliebige andere Φ^2 ruhen i. A. auf vier von ihnen. Die Flächen des linearen F^2 -Systemes fünfter Stufe entsprechen den Kegelschnitten, Punktpaaren und zweifachen Punkten der Ebene η . — Wenn der Mittelpunkt eines C.-Kegels irgend einen Kegelschnitt oder eine Gerade beschreibt, so beschreibt der C.-Kegel ein F^2 -System vierten resp. zweiten Grades, das in einem linearen F^2 -System vierter resp. zweiter Stufe enthalten ist.

Strassburg i. E., 1. März 1897.