Bestimmung der grössten Untergruppen derjenigen projectiven Gruppe, welche eine Gleichung zweiten Grades in n Veränderlichen invariant lässt.

Von

HERMANN WERNER aus Hottelstedt bei Weimar.

Die nachstehende Arbeit erledigt ein interessantes Problem aus Lie's allgemeiner Theorie der Transformationsgruppen. Ehe wir dasselbe formuliren, wollen wir die wichtigsten von ihm eingeführten Begriffe und abgeleiteten Sätze, die im Folgenden benutzt werden, kurz zusammenstellen:

Eine Schaar von Transformationen:

$$x'_i = f_i(x_1 \dots x_n; a_1 \dots a_r) \quad (i=1, \dots, n)$$

in den Veränderlichen $x_1 \dots x_n$ bildet eine *endliche continuirliche Transformationsgruppe*, wenn zwei Transformationen der Schaar nach einander ausgeführt wieder eine Transformation der Schaar ergeben. Die Grössen $a_1 \dots a_r$ heissen die *Parameter* der Gruppe und eine Gruppe mit r *wesentlichen* Parametern heisst *r-gliedrig*.

Eine Transformation heisst *infinitesimal*, wenn sie die Form besitzt:

$$x'_i = x_i + \xi_i(x_1 \dots x_n) \delta t \quad (i=1, \dots, n),$$

wobei δt eine unendlich kleine Grösse bedeutet. Bezeichnet f eine beliebige Function von $x_1 \dots x_n$, so ergiebt die Ausführung dieser Transformation auf f die folgende Gleichung:

$$f(x'_1, \dots, x'_n) = f(x_1, \dots, x_n) + \left(\sum_1^n \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \delta t.$$

Lie führt daher

$$\sum_1^n \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = X(f)$$

als Symbol für die infinitesimale Transformation ein.

Mehrere, etwa r infinitesimale Transformationen

$$X_\alpha f = \sum_1^n \xi_{\alpha i} \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (\alpha = 1, \dots, r)$$

heissen von einander *unabhängig*, wenn es nicht möglich ist, r Constanten $c_1 \dots c_r$ so zu wählen, dass der Ausdruck

$$c_1 X_1 f + \dots + c_r X_r f$$

identisch verschwindet.

Ordnen sich die Transformationen einer r -gliedrigen Gruppe paarweise als inverse zusammen, so enthält die Gruppe die identische Transformation und r *unabhängige infinitesimale Transformationen*. Die endliche Transformation entsteht durch unendlichmalige Wiederholung der allgemeinen infinitesimalen Transformation.

Sind $X_1 f, \dots, X_r f$ r unabhängige infinitesimale Transformationen einer r -gliedrigen Gruppe, so bestehen zwischen den Xf Beziehungen von der Form:

$$\begin{aligned} (X_i, X_x) &= X_i (X_x(f)) - X_x (X_i(f)) \equiv \sum_1^n \{X_i(\xi_{jx}) - X_x(\xi_{ji})\} \frac{\partial f}{\partial x_j} \\ &= \sum_1^r c_{ixs} X_s f, \end{aligned}$$

wobei die c_{ixs} numerische Constanten bedeuten.

Umgekehrt bestehen zwischen r unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_1 f, \dots, X_r f$ die obigen Relationen, so erzeugen die Xf eine endliche continuirliche r -gliedrige Transformationsgruppe.

Hat man zwei r -gliedrige Gruppen $X_1 f, \dots, X_r f$ und $Y_1 f, \dots, Y_r f$, zu welchen ein und dasselbe System der c_{ixs} gehört:

$$(X_i, X_x) = \sum_1^r c_{ixs} X_s, \quad (Y_i, Y_x) = \sum_1^r c_{ixs} Y_s,$$

so nennt man die beiden Gruppen *gleichzusammengesetzt* oder *holoedrisch isomorph*.

Zwei m -gliedrige Untergruppen einer r -gliedrigen Gruppe heissen mit einander *gleichberechtigt*, wenn sie durch eine Transformation der r -gliedrigen Gruppe in einander übergeführt werden können.

Soll eine Gleichung $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$ eine infinitesimale Transformation

$$Xf = \sum_1^n \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

gestatten, so muss $X\varphi = 0$ eine blosser Folge von $\varphi = 0$ sein.

Nach Lie ist es bei Untersuchungen, die sich auf eine Gruppe beziehen, von besonderer Wichtigkeit, die *grössten* Untergruppen zu finden. Dieses Problem hat er für die allgemeine projective Gruppe in n Veränderlichen erledigt*). In seinem Seminar stellte mir Herr

*) Unter Lie's älteren Arbeiten über Transformationsgruppen möge hier besonders auf die folgenden verwiesen werden: Göttinger Nachr. December 1874;

Professor Lie dasselbe Problem für diejenige projective Gruppe im n -fach ausgedehnten Raume, welche eine Gleichung zweiten Grades mit nicht verschwindender Determinante invariant lässt. Dabei äusserte derselbe, dass die betreffenden Untergruppen sich wahrscheinlich definiren liessen als die grössten Untergruppen, welche eine gewisse ebene Mannigfaltigkeit resp. einen Punkt invariant lassen.

§ 1.

Vorbereitung zur Lösung des Problems.

Es ist bekannt, dass im n -fach ausgedehnten Raume, im R_n , jede Fläche zweiten Grades mit nicht verschwindender Determinante,

M_{n-1}^2 , durch $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$ projective Transformationen dieses R_n in sich übergeführt wird. *) Ist n eine gerade Zahl, so haben wir zwei

discrete Schaaren von $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$ projectiven Transformationen, von denen die eine Schaar für sich eine endliche continuirliche Gruppe bildet und von $\frac{n(n+1)}{2}$ unabhängigen infinitesimalen projectiven Transformationen erzeugt wird; die andere Schaar dagegen besteht aus allen projectiven Transformationen, welche die beiden Schaaren von grössten ebenen Mannigfaltigkeiten auf der M_{n-1}^2 mit einander vertauschen, und bildet keine Gruppe für sich allein. Ist n eine ungerade Zahl, so

haben wir nur eine Schaar von $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$ projectiven Transformationen, entsprechend dem Umstande, dass es nur eine Schaar von grössten ebenen Mannigfaltigkeiten auf der M_{n-1}^2 giebt, und diese eine Schaar bildet eine endliche continuirliche Gruppe, welche von $\frac{n(n+1)}{2}$ unabhängigen infinitesimalen projectiven Transformationen erzeugt wird.

Um nun die von $\frac{n(n+1)}{2}$ unabhängigen infinitesimalen projectiven Transformationen erzeugte Gruppe der F_2 im R_n zu untersuchen, ist es erforderlich, dieselbe in möglichst einfacher Form aufzustellen. Es

giebt $\infty^{\frac{n(n+3)}{2}}$ F_2 im R_n ; jeder derselben gehört eine Gruppe von in-

Archiv for Mathematik og Naturvidenskab 1876–79; Math. Ann. Bd. XVI, 1879. Eine systematische Darstellung dieser Untersuchungen findet sich in dem soeben erschienenen Werke: Sophus Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, Erster Abschnitt, unter Mitwirkung von Dr. Friedrich Engel bearbeitet, Leipzig 1888.

*) Cayley und Hermite haben bekanntlich die endlichen projectiven Transformationen einer Fläche zweiten Grades im n -fach ausgedehnten Raume auf sehr einfache Form gebracht. In dieser Arbeit werden wir durchgängig mit infinitesimalen Transformationen rechnen.

finitesimalen Transformationen zu. Da jede F_2 mit nicht verschwindender Determinante durch projective Transformation in jede andere übergeführt werden kann, so müssen alle diese Gruppen gleichzusammengesetzt sein. Wenn wir also gewisse Untergruppen der endlichen kontinuierlichen projectiven Gruppe einer einzigen solchen F_2 kennen, so können wir auch ohne Weiteres die entsprechenden Untergruppen der Gruppen von allen anderen F_2 mit nicht verschwindender Determinante aufstellen. Wir können also als F_2 die Kugel um den Koordinatenanfangspunkt:

$$(1) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

annehmen und die allgemeine infinitesimale projective Transformation bestimmen, welche diese Kugel in sich überführt.

Zu diesem Zwecke führen wir die allgemeine projective infinitesimale Transformation $(p_i \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i})$:

$$(2) \quad \sum_1^n a_i p_i + \sum_1^n \sum_1^n a_{i,x} x_i p_x + \sum_1^n b_i x_i \sum_1^n x_j p_j$$

auf (1) aus und erhalten:

$$2 \sum_1^n a_i x_i + 2 \sum_1^n \sum_1^n a_{i,x} x_i x_x + 2 \sum_1^n b_i x_i \sum_1^n x_j^2 = 0$$

oder wegen (1):

$$\sum_1^n a_i x_i + \sum_1^n \sum_1^n a_{i,x} x_i x_x + \sum_1^n b_i x_i = 0.$$

Diese Gleichung muss vermöge (1) identisch erfüllt werden, wenn (1) die Transformation (2) gestatten soll. Das ist aber nur möglich, wenn:

$$a_i + b_i = 0, \quad a_{i,x} + a_{x,i} = 0.$$

Demgemäss erhalten wir die folgenden $\frac{n(n+1)}{2}$ -gliedrige Gruppe:

$$(3) \quad \boxed{\begin{array}{l} x_i p_x - x_x p_i, \quad p_i - x_i \sum_1^n x_j p_j \\ (i, x = 1, \dots, n) \end{array}}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass diese infinitesimalen projectiven Transformationen wirklich eine Gruppe erzeugen und die Kugel (1) invariant lassen.

Es giebt nun verschiedene Wege, um das Problem, die grössten Untergruppen der Gruppe (3) zu bestimmen, zu lösen, und zwar

können wir entweder die Gruppe (3) selbst oder eine mit derselben gleich zusammengesetzte Gruppe untersuchen und dann die Resultate auf die Gruppe (3) übertragen.

Solche isomorphe Gruppen sind bekanntlich die allgemeine conforme Gruppe im R_{n-1} und die Gruppe aller Rotationen um einen Punkt im R_{n+1} .

Es zeigt sich, dass die Untersuchung der allgemeinen conformen Gruppe erst den Weg zur directen Untersuchung der Gruppe der F_2 vorzeichnet. Deshalb wollen wir uns zuerst mit der allgemeinen conformen Gruppe beschäftigen.

Es ist bekannt, dass die continuirliche Gruppe von projectiven Transformationen, welche die Kugel im R_n invariant lässt, durch stereographische Projection in die, nicht projective, allgemeine conforme Gruppe des R_{n-1} übergeht. *)

Sei nämlich $x_n = -1$ die Gleichung des ebenen R_{n-1} , so ist die stereographische Projection gegeben durch:

$$x'_j = 2 \frac{x_j}{1 - x_n}, \quad \sum_1^{n-1} x_j'^2 = 4 \frac{1 + x_n}{1 - x_n}, \quad \sum_1^{n-1} x_j'^2 + 4 = \frac{8}{1 - x_n}.$$

Demnach ist:

$$\delta x'_j = 2 \frac{\delta x_j (1 - x_n) + x_j \delta x_n}{(1 - x_n)^2}$$

und es ergibt sich:

$$\left\{ \begin{aligned} x_i p_n - x_n p_i &\equiv x'_i p'_n - x'_n p'_i, \\ x_n p_i - x_i p_n &= p'_i - \frac{1}{4} \left\{ 2 x'_i \sum_1^{n-1} x'_j p'_j - \left(\sum_1^{n-1} x_j'^2 \right) p'_i \right\}, \\ p_i - x_i \sum_1^n x_j p_j &\equiv p'_i - \frac{1}{4} \left\{ 2 x'_i \sum_1^{n-1} x'_j p'_j - \left(\sum_1^{n-1} x_j'^2 \right) p'_i \right\}, \\ p_n - x_n \sum_1^n x_j p_j &\equiv \sum_1^{n-1} x'_j p'_j, \end{aligned} \right. \quad (i, n = 1, 2, \dots, n-1).$$

Die so erhaltene Gruppe können wir offenbar in der folgenden Form schreiben:

*) Vergl. Felix Klein „Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie“ Math. Ann. Bd. V (1871), cf. insbesondere den Satz pag. 267: „Der Gesamtheit der linearen Transformationen des R_n , welche die gegebene M_{n-1}^2 in sich überführen, entspricht im R_{n-1} ein Transformationencyklus, der sich aus dessen Bewegungen, den Aehnlichkeitstransformationen und den Transformationen durch reciproke Radien zusammensetzt.“

$$(4) \quad p_i, x_i p_x - x_x p_i, \sum_1^n x_j p_j, 2x_i \sum_1^n x_j p_j - \left(\sum_1^n x_j^2 \right) p_i, \\ (i, x = 1, 2, \dots, n)$$

Dies ist wirklich die *allgemeine conforme Gruppe* des R_n , wie wir zeigen wollen.

Die *allgemeine conforme Gruppe* oder die *Gruppe der reciproken Radien* wird gebildet aus allen *Translationen*, *Rotationen* und der *Aehnlichkeitstransformation* (im engeren Sinne), sowie aus denjenigen Transformationen, welche aus den Translationen durch Transformation der reciproken Radien hervorgehen und welche wir als *Circulationen durch Origo* bezeichnen wollen. Bei den letzteren bewegt sich nämlich jeder Punkt des R_n auf einem Kreise, welcher durch Origo geht, d. h. die Bahncurven einer Circulation sind Kreise durch Origo. In der That, die Bahncurven einer Translation sind alle geraden Linien, welche einer bestimmten geraden Linie durch Origo parallel laufen. Diese Bahncurven gehen durch Transformation der reciproken Radien in sich in Origo berührende Kreise über; unter diesen Kreisen ist die durch die betreffende Translation bestimmte gerade Linie durch Origo mitzurechnen. Also ist jede Circulation durch Origo durch eine bestimmte gerade Linie durch Origo festgelegt, ebenso wie jede Translation.

In der That werden die Translationen durch die p_i , die Rotationen durch die $x_i p_x - x_x p_i$ und die Aehnlichkeitstransformation durch $\sum_1^n x_j p_j$ repräsentirt, und es ist nur noch zu zeigen, dass die Circulationen durch die

$$2x_i \sum_1^n x_j p_j - \left(\sum_1^n x_j^2 \right) p_i$$

repräsentirt werden. Führen wir nun auf die p_i die Transformation der reciproken Radien $x'_x = \frac{x_x}{\sum_1^n x_j^2}$ aus, so ergibt sich:

$$\delta x'_x = \frac{\delta x_x \sum_1^n x_j^2 - 2x_x \sum_1^n x_j \delta x_j}{\left(\sum_1^n x_j^2 \right)^2},$$

also, da

$$\delta x_i = 1, \quad \delta x_x = 0 \quad (x \neq i);$$

$$\delta x'_i = \frac{1}{\sum_1^n x_j^2} - \frac{2x_i^2}{\left(\sum_1^n x_j^2\right)^2} = \sum_1^n x_j'^2 - 2x_i'^2,$$

$$\delta x'_x = -\frac{2x_i x_x}{\left(\sum_1^n x_j^2\right)^2} = -2x'_i x'_x,$$

so dass wirklich die Circulationen die Form haben:

$$2x_i \sum_1^n x_j p_j - \left(\sum_1^n x_j^2\right) p_i.$$

Wir führen der Kürze wegen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$P_i \equiv p_i, \quad R_{i,x} \equiv x_i p_x - x_x p_i, \quad S \equiv \sum_1^n x_j p_j,$$

$$C_i \equiv 2x_i \sum_1^n x_j p_j - \left(\sum_1^n x_j^2\right) p_i.$$

Setzen wir fest, dass $\varepsilon_{i,x} \equiv 0$ für $i \neq x$, dagegen $\varepsilon_{i,i} = 1$ sein soll, so erhalten wir durch paarweise Combination der infinitesimalen Transformationen;

$$P_i, R_{i,x}, S, C_i$$

die folgenden Relationen*):

$$(5) \quad \begin{cases} (P_i, P_x) = 0 \\ (P_i, R_{j,x}) = \varepsilon_{ij} P_x - \varepsilon_{ix} P_j \\ (P_i, S) = P_i \\ (P_i, C_x) = 2(R_{x,i} + \varepsilon_{i,x} S) \\ (R_{i,x}, S) = 0 \\ (R_{i,x}, R_{\mu,\nu}) = \varepsilon_{x,\mu} R_{i,\nu} - \varepsilon_{x,\nu} R_{i,\mu} - \varepsilon_{i,\mu} R_{x,\nu} + \varepsilon_{i,\nu} R_{x,\mu} \end{cases} \quad \begin{cases} (C_i, C_x) = 0 \\ (C_i, R_{j,x}) = \varepsilon_{ij} C_x - \varepsilon_{ix} C_j \\ (C_i, S) = -C_i \end{cases}$$

Wir erkennen, dass diese Relationen sich nicht ändern, wenn wir $-C_i, R_{i,x}, -S, P_i$ mit bez. $P_i, R_{i,x}, S, -C_i$ vertauschen. Das ist nichts Auffälliges, denn durch Transformation der reciproken Radien geht ja P_i in $-C_i$, $R_{i,x}$ in $R_{i,x}$, S in $-S$ über: zwei

*) Die Formeln (5) finden sich in einer Abhandlung von Lie im norwegischen Archiv, Bd. 10, 1885, in welcher überhaupt Untersuchungen über die conforme Gruppe, wie auch über die Gruppe einer Fläche zweiten Grades im n -fach ausgedehnten Raume angestellt werden. Lie bezeichnet $R_{i,x}$ mit $S_{i,x}$ S mit U , C_i mit V_i .

Gruppen aber, die durch Transformation in einander übergehen, müssen gleichzusammengesetzt sein.

Im Folgenden betrachten wir Untergruppen, welche durch Vertauschung von $-C_i$, $R_{i,x}$, $-S$, P_i mit bez. P_i , $R_{i,x}$, S , $-C_i$ in einander übergehen, als gleichberechtigt, denn dieselben werden durch eine Transformation der Gruppe in einander übergeführt.

Die allgemeine conforme Gruppe enthält:

$$n + \frac{n(n-1)}{2} + 1 + n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = N$$

unabhängige infinitesimale Transformationen und zwar n unabhängige infinitesimale Transformationen 0^{ter} Ordnung (z. B. alle Translationen), $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ von 1^{ter} Ordnung (z. B. die Rotationen und die Aehnlichkeitstransformation) und n von 2^{ter} Ordnung (die Circulationen).

Aus den Relationen (5) ergibt sich nun ohne Weiteres, dass die P_i , $R_{i,x}$ und S eine $(N-n)$ -gliedrige Untergruppe, die Gruppe aller Aehnlichkeitstransformationen, erzeugen.

Wir wollen daher zuerst nach allen $(N-n)$ -gliedrigen Untergruppen der allgemeinen conformen Gruppe fragen. Es wird sich zeigen, dass wir damit zugleich alle Fälle erhalten, in denen es Untergruppen mit mehr als $N-n$ Parametern giebt.

Wir werden zunächst zeigen, dass wir immer annehmen können, dass gewisse Translationen $\sum_1^n a_i p_i$, die wir als gegeben annehmen, in den gesuchten $(N-n)$ -gliedrigen Untergruppen vorkommen.

Wir weisen nämlich nach, dass alle $(N-n)$ -gliedrigen Untergruppen, welche keine infinitesimale Translation enthalten, mit der Gruppe der P_i , $R_{i,x}$, S gleichberechtigt sind. *)

Nach dem bekannten Satze:

Enthält eine $(r-m)$ -gliedrige Untergruppe der r -gliedrigen Gruppe $X_1 f$, $X_2 f$, ..., $X_r f$ keine infinitesimale Transformation von der Form

$$e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + \dots + e_m X_m f,$$

so enthält sie $r-m$ unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form:

$$X_{m+j} f + \sum_1^m e_j X_j f \quad (j=1, 2, \dots, r-m)$$

enthält eine $(N-n)$ -gliedrige Untergruppe, in der keine infinitesimale

*) Wir verfahren dabei ganz analog wie Lie bei seiner Bestimmung der grössten Untergruppen der allgemeinen projectiven Gruppe.

Translation $\sum_1^n a_j p_j$ vorhanden ist, sicher eine infinitesimale Transformation von der Form:

$$\sum_1^n x_j p_j - \sum_1^n a_j p_j = \sum_1^n (x_j - a_j) p_j$$

und ebenso giebt es für jeden Werth von i und α eine infinitesimale Transformation von der Form:

$$(x_i - a_i) p_\alpha - (x_\alpha - a_\alpha) p_i + \sum_1^n b_{i,\alpha j} p_j.$$

Durch Combination dieser beiden infinitesimalen Transformationen ergibt sich aber:

$$- \sum_1^n b_{i,\alpha j} p_j$$

und da unsere Untergruppe keine infinitesimale Translation enthalten soll, so müssen alle $b_{i,\alpha j}$ verschwinden.

Endlich muss die Untergruppe noch n infinitesimale Transformationen von der Form:

$$C_i + \sum_1^n c_{ij} p_j$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, von der Form:

$$(6) \quad 2(x_i - a_i) \cdot \sum_1^n (x_j - a_j) p_j - \left(\sum_1^n (x_j - a_j)^2 \right) p_i + \sum_1^n d_{ij} p_j$$

enthalten, denn es ist:

$$\begin{aligned} & 2(x_i - a_i) \sum_1^n (x_j - a_j) p_j - \left(\sum_1^n (x_j - a_j)^2 \right) p_i \\ &= \sum_1^n (2x_i x_j - 2a_i x_j - 2a_j x_i + 2a_i a_j) p_j - \left(\sum_1^n x_j^2 - 2a_j x_j + a_j^2 \right) p_i \\ &= \left\{ \begin{aligned} & 2x_i \sum_1^n x_j p_j - \left(\sum_1^n x_j^2 \right) p_i - 2a_i \sum_1^n (x_j - a_j) p_j \\ & + 2 \sum_1^n a_j \{ (x_j - a_j) p_i - (x_i - a_i) p_j \} \\ & + 2a_i \sum_1^n a_j p_j - \left(\sum_1^n a_j^2 \right) p_i. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Combiniren wir nun (6) mit $\sum_1^n (x_j - a_j) p_j$, so erhalten wir die infinitesimale Transformation:

$$2(x_i - a_i) \sum_1^n (x_j - a_j) p_j - \left(\sum_1^n (x_j - a_j)^2 \right) p_i - \sum_1^n d_{ij} p_j,$$

sodass wegen (6) folgt:

$$d_{ij} = 0.$$

Wir erhalten demnach die folgenden infinitesimalen Transformationen, welche eine $(N-n)$ -gliedrige Untergruppe erzeugen:

$$\left((x_i - a_i) p_x - (x_x - a_x) p_i, \sum_1^n (x_j - a_j) p_j, \right. \\ \left. 2(x_i - a_i) \sum_1^n (x_j - a_j) p_j - \left(\sum_1^n (x_j - a_j)^2 \right) p_i \right).$$

Durch paarweise Combination dieser infinitesimalen Transformationen überzeugt man sich leicht, dass dieselben auch wirklich eine Gruppe erzeugen. Diese Gruppe lässt den Punkt $x_j = a_j$ ($j=1, 2, \dots, n$) invariant. Für $a_j = 0$ erhalten wir die Gruppe der $R_{i,x}$, S , C_i , welche den Anfangspunkt in Ruhe lässt. Die erhaltenen Gruppen sind also mit der Gruppe der P_i , $R_{i,x}$, S gleichberechtigt, q. e. d.

Resultat: Jede $(N-n)$ -gliedrige Untergruppe der allgemeinen conformen Gruppe des R_n , in welcher keine infinitesimale Translation vorkommt, besteht aus allen infinitesimalen Transformationen der conformen Gruppe, welche einen im Endlichen gelegenen Punkt invariant lassen und ist daher mit der Gruppe aller Aehnlichkeitstransformationen gleichberechtigt.

Wir haben demnach nur noch alle Typen von $(N-n)$ -gliedrigen Untergruppen zu bestimmen, von denen wir gewisse darin enthaltene Translationen als bekannt voraussetzen.

Von vornherein können wir den Fall ausschliessen, dass alle Translationen vorkommen, denn dann wären entweder keine Circulationen durch Origo vorhanden, in welchem Falle wir die schon bekannte Gruppe aller Aehnlichkeitstransformationen erhielten, oder es könnten nicht alle Circulationen durch Origo vorkommen, weil dann auch alle $R_{i,x}$ und S vorkommen müssten. Die Untergruppen aber, welche gewisse Circulationen enthalten, sind in ihrer Gesamtheit offenbar gleichberechtigt mit der Gesamtheit der Untergruppen, welche gewisse Translationen enthalten.

In den zu suchenden Untergruppen können also $1, 2, \dots, n - 1$ unabhängige infinitesimale Translationen vorhanden sein und diese bilden immer eine Gruppe. Da die Bahncurven einer bestimmten Translation alle parallele gerade Linien sind, welche nach einem bestimmten Punkte der unendlich fernen ebenen M_{n-1} gerichtet sind, so können wir uns jede Translation durch einen Punkt im unendlich Fernen repräsentirt denken. Eine Gruppe von m unabhängigen infinitesimalen Translationen wird dann durch eine ebene M_{m-1} der unendlich fernen ebenen M_{n-1} repräsentirt.

Nun wissen wir aber, dass zwei Translationen innerhalb der Gruppe der Aehnlichkeitstransformationen im Allgemeinen nicht mit einander gleichberechtigt sind; denn wäre dies der Fall, so müsste, da jede Translation durch einen Punkt der unendlich fernen ebenen M_{n-1} bestimmt ist, jeder Punkt dieser M_{n-1} durch Rotation in jeden anderen Punkt derselben übergeführt werden können. Die Gruppe der Rotationen lässt aber die Nullkugel, Null- M_{n-2}^2 , invariant. Daher sind auch im Allgemeinen zwei m -gliedrige Gruppen von Translationen nicht mit einander gleichberechtigt.

In Folge dessen sind wir genöthigt, bei der Bestimmung der grössten Untergruppen der allgemeinen conformen Gruppe einen wesentlich anderen Weg einzuschlagen, als bei Lie's Bestimmung der grössten Untergruppen der allgemeinen projectiven Gruppe*). Bei der letzteren Gruppe stützt sich nämlich die Bestimmung der grössten Untergruppen auf den Satz, dass irgend zwei Translationen innerhalb der Gruppe gleichberechtigt sind.

Zwei Translationen sind innerhalb der allgemeinen conformen Gruppe nur dann mit einander gleichberechtigt, *entweder*, wenn beide durch Punkte der unendlich fernen ebenen M_{n-1} , welche nicht auf der Null- M_{n-2}^2 liegen, *oder* beide durch Punkte, welche auf der Null- M_{n-2}^2 liegen, repräsentirt werden. Zum Beispiel wird p_1 repräsentirt durch einen Punkt, welcher nicht auf der Null- M_{n-2}^2 liegt, denn die Bahncurven von p_1 sind gegeben durch:

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{0} = \dots = \frac{dx_n}{0},$$

woraus sich durch Integration als Bahncurven ergeben:

$$x_2 = c_2, x_3 = c_3, \dots, x_n = c_n.$$

Andererseits wird $p_1 + ip_2$ repräsentirt durch einen Punkt, welcher auf der Null- M_{n-2}^2 liegt, denn die Bahncurven von $p_1 + ip_2$ sind gegeben durch:

*) Vergl. Math. Ann. Bd. XXV, Theorie der Transformationsgruppen, Leipzig 1888, pag. 569.

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{i} = \frac{dx_3}{0} = \dots = \frac{dx_n}{0}$$

oder durch:

$$x_1 + ix_2 = c, \quad x_3 = c_3, \dots, x_n = c_n$$

und das System von Gleichungen:

$$x_1 + ix_2 = 0, \quad x_3 = 0, \dots, x_n = 0$$

erfüllt wirklich die Gleichung:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0,$$

welche die Kegel- M_{n-2}^2 vom Anfangspunkt nach der Null- M_{n-2}^2 darstellt.

Denken wir uns jetzt m unabh. infinitesimale Translationen gegeben, so werden dieselben durch eine ebene M_{m-1} der unendlich fernen Ebenen M_{n-1} repräsentirt. Diese ebene M_m schneidet die Null- M_{n-2}^2 nach einer M_{m-2}^2 .

Wir erkennen ohne Weiteres, dass zwei m -gliedrige Gruppen von Translationen nur dann mit einander gleichberechtigt innerhalb der allgemeinen conformen Gruppe sein können, wenn die zugehörigen M_{m-2}^2 von derselben Species sind, d. h. wenn sie entweder beide allgemeine M_{m-2}^2 oder beide in gleicher Weise ausgeartete M_{m-2}^2 sind.

Daher ist es nöthig, auf die Ausführungen von Segre*) einzugehen. Nach Segre ist eine ebene M_{m-1} eine Tangential- M_{m-1} der Null- M_{n-2}^2 von der Species $a+1$, wenn die Schnitt- M_{m-2}^2 mit der Null- M_{n-2}^2 ($a+1$)-mal specialisirt ist, d. h. wenn dieselbe eine ebene M_a von Doppelpunkten besitzt. Insbesondere ist eine ebene M_{m-1} eine gewöhnliche Tangential- M_{m-1} , wenn die Schnitt- M_{m-2}^2 einmal specialisirt ist, d. h. einen einzigen Doppelpunkt besitzt.

Segre zeigt nun, wie man entscheidet, von welcher Species als Tangential- M_{m-1} einer F_2 eine vorgelegte ebene M_{m-1} ist, wenn die F_2 im R_{n-1} in n homogenen Coordinaten vorgelegt ist:

$$(7) \quad \varphi(x) \equiv \sum_1^n \sum_1^n a_{i,x} x_i x_x = 0.$$

Er nimmt an, die M_{m-1} sei durch m bekannte Punkte

$$x', x'', \dots, x^{(m)}$$

gegeben. Die Schnitt- M_{m-2}^2 hat dann, wenn wir mit

$$x_i \equiv \sum_1^m \lambda_j x_i^{(j)} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

einen allgemeinen Punkt der M_{m-1} bezeichnen, in den Variabeln λ die Gleichung:

*) Vergl. Corrado Segre „Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni“ nelle Memorie della R. Accad. delle Scienze di Torino, Serie seconda, t. 36, 1885, pag. 22–38.

$$\varphi(\lambda_1 x' + \lambda_2 x'' + \dots + \lambda_n x^{(n)}) = 0,$$

oder wenn wir einführen:

$$(7a) \quad \varphi(x^{(\alpha)}, x^{(\beta)}) \equiv \sum_1^n \sum_1^n a_{i,x} x_i^{(\alpha)} x_x^{(\beta)}$$

die Gleichung:

$$\sum_1^n \sum_1^n \{ \varphi(x^{(i)}, x^{(x)}) \cdot \lambda_i \lambda_x \} = 0.$$

Die Determinante dieser Schnitt- M_{n-2}^2 ist offenbar die folgende:

$$(8) \quad \begin{array}{cccc} \varphi(x', x'), & \varphi(x', x''), & \dots, & \varphi(x', x^{(n)}) \\ \varphi(x'', x'), & \varphi(x'', x''), & \dots, & \varphi(x'', x^{(n)}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi(x^{(n)}, x'), & \varphi(x^{(n)}, x''), & \dots, & \varphi(x^{(n)}, x^{(n)}) \end{array}$$

Wenn nun diese Determinante, sowie alle Unterdeterminanten bis zur Ordnung $m - a$ verschwinden, so ist dies die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die ebene M_{m-1} eine Tangential- M_{m-1} von den Species $a + 1$ der Fläche $\varphi(x) = 0$ darstellt.

Wir kehren jetzt zu unserer Aufgabe zurück. Wir setzen voraus, dass die zu suchenden $(N - n)$ -gliedrigen Untergruppen die folgenden $n - \nu - \mu$ unabhängigen infinitesimalen Translationen und nur diese enthalten (μ und ν seien beliebige ganze Zahlen, welche nur die Bedingung $n - \nu - \mu > 0$ zu erfüllen haben):

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{r+1} + i p_{r+2}, \quad p_{r+3} + i p_{r+4}, \quad \dots, \quad p_{r+2\mu-1} + i p_{r+2\mu}, \\ p_{r+2\mu+1}, \quad p_{r+2\mu+2}, \quad \dots, \quad p_n \end{array} \right\}.$$

Wir wollen zeigen, dass wir damit alle einzelnen Fälle behandeln.

Die Translationen (9) werden durch eine ebene $M_{n-\nu-\mu-1}$ der unendlich fernen ebenen M_{n-1} repräsentirt, welche bestimmt wird durch:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \dots, \quad x_\nu = 0, \quad x_{r+1} + i x_{r+2} = 0, \\ x_{r+3} + i x_{r+4} = 0, \quad \dots, \quad x_{r+2\mu-1} + i x_{r+2\mu} = 0. \end{array} \right\}$$

Z. B. wird $p_{r+1} + i p_{r+2}$ repräsentirt durch einen Punkt x' der erwähnten ebenen $M_{n-\nu-\mu-1}$, welcher bestimmt ist durch:

$$(11) \quad x'_1 = 0, \dots, x'_\nu = 0, \quad x'_{r+1} + i x'_{r+2} = 0, \quad x'_{r+3} = 0, \dots, x'_n = 0.$$

Ferner ist:

$$(12) \quad \varphi(x) \equiv x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0$$

die Gleichung, welche die Null- M_{n-2}^2 (als Schnitt der unendlich fernen Ebene mit $\varphi(x) = 0$) repräsentirt. Diese Gleichung ist homogen in $x_1, \dots, x_n$. Es ist also z. B. wegen (11):

$$\varphi(x, x') = x_{r+1} + i x_{r+2}.$$

Man erkennt leicht, dass sich in unserem Falle die Determinante (8) auf die folgende reducirt:

$$(13) \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_{\nu+2\mu+1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & x_{\nu+2\mu+2}^2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & x_n^2 \end{vmatrix}.$$

In dieser Determinante verschwinden alle Unterdeterminanten bis zur Ordnung $n - \nu - 2\mu + 1$, während nicht alle von der Ordnung $n - \nu - 2\mu$ verschwinden. Es ist also:

$$m = n - \nu - \mu; \quad m - a = n - \nu - 2\mu + 1;$$

folglich ergibt sich:

$$a = \mu - 1,$$

d. h.:

Die Translationen (9) werden durch eine ebene $M_{n-\nu-\mu-1}$ der unendlich fernen ebenen M_{n-1} repräsentirt, welche eine Tangential- $M_{n-\nu-\mu-1}$ von der Species μ der Null- M_{n-2}^2 ist, d. h. die ebene $M_{n-\nu-\mu-1}$ hat eine ebene $M_{\mu-1}$ mit der Null- M_{n-2}^2 gemein.

Dieses Resultat zeigt uns, dass wir unter der Voraussetzung (9) wirklich alle Fälle behandeln, denn μ kann höchstens gleich $\frac{n}{2}$ oder gleich $\frac{n-1}{2}$ sein, jenachdem n gerade oder ungerade, und wirklich sind die ebenen

$$M_{\frac{n-2}{2}} \text{ resp. } M_{\frac{n-3}{2}}$$

die grössten ebenen Mannigfaltigkeiten auf der Null- M_{n-2}^2 . Die Ausdrücke (9) geben uns also immer an, welche Fälle vorkommen können, z. B. zeigen sie uns ohne Weiteres, welches die grössten linearen Mannigfaltigkeiten auf der Null- M_{n-2}^2 im R_6 resp. auf irgend einer F_2 im R_3 sind. Nämlich: $p_1 + ip_2$, $p_3 + ip_4$, $p_5 + ip_6$ sagt uns, dass μ höchstens gleich 3 ist, dass also die gewöhnlichen Ebenen die grössten ebenen Mannigfaltigkeiten sind.

Wir haben bisher stillschweigend angenommen, dass zwei ebene $M_{n-\nu-\mu-1}$, welche die Null- M_{n-2}^2 nach $M_{n-\nu-\mu-2}^2$ von derselben Species μ schneiden, innerhalb der allgemeinen conformen Gruppe immer gleichberechtigte Gruppen von Translationen repräsentiren. Wäre dies nicht der Fall, so würden wir unter der Voraussetzung (9) nicht alle

Typen von $(N - n)$ -gliedrigen Untergruppen der conformen Gruppe erhalten.

Um nun nachzuweisen, dass dies wirklich der Fall, verfahren wir in folgender Weise:

1) Wir suchen die Anzahl σ von unabhängigen infinitesimalen

Rotationen $\sum_1^n \sum_1^n a_{i,x} R_{i,x}$, welche eine unendlich ferne ebene $M_{n-v-\mu-1}$ in Ruhe lassen. Dann geht die ebene $M_{n-v-\mu-1}$ bei Ausführung aller $\infty^{\frac{n(n-1)}{2}}$ Rotationen in $\infty^{\frac{n(n-1)}{2}-\sigma}$ oder sagen wir lieber in ∞^s verschiedene ebene $M_{n-v-\mu-1}$ über, deren Inbegriff gegenüber allen Rotationen invariant bleibt.

2) Andererseits suchen wir die Anzahl ∞^s der ebenen $M_{n-v-\mu-1}$ von derselben Species μ , welche im Unendlichen liegen.

Ergibt sich dann $s_1 = s_2$, so ist der Nachweis geführt.

1) Im ersteren Theile der Untersuchung können wir die ebene $M_{n-v-\mu-1}$ des Unendlichen durch die ebene $M_{n-v-\mu}$ ersetzen, welche durch erstere und durch den Koordinatenanfangspunkt geht, denn irgend eine Rotation lässt entweder beide invariant oder beide nicht invariant. Die Gleichungen der ebenen $M_{n-v-\mu}$ seien:

$$(14) \quad x_\lambda = 0, \quad x_{v+2j-1} + i x_{v+2j} = 0,$$

wo $\lambda = 1, 2, \dots, v, j = 1, 2, \dots, \mu$.

Führen wir nun auf diese Gleichungen die allgemeine infinitesimale Rotation:

$$(15) \quad \sum_1^n \sum_1^n a_{i,x} (x_i p_x - x_x p_i) \quad (\text{wo } a_{i,x} = -a_{x,i})$$

aus, so erhalten wir die folgenden beiden Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_1^n \sum_1^n a_{i,x} \left(x_i \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_x} - x_x \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_i} \right) = 0, \\ \sum_1^n \sum_1^n a_{i,x} \left(x_i \frac{\partial (x_{v+2j-1} + i x_{v+2j})}{\partial x_x} - x_x \frac{\partial (x_{v+2j-1} + i x_{v+2j})}{\partial x_i} \right) = 0 \end{array} \right\}$$

oder:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_1^n a_{i,\lambda} x_i - \sum_1^n a_{\lambda,x} x_x = 0, \\ \sum_1^n (a_{i,v+2j-1} + i a_{i,v+2j}) x_i - \sum_1^n (a_{v+2j-1,x} + i a_{v+2j,x}) x_x = 0 \end{array} \right\}$$

oder:

$$\sum_1^n a_{i,\lambda} x_i = 0, \quad \sum_1^n (a_{i,v+2j-1} + i a_{i,v+2j}) x_i = 0.$$

Soll (14) die Transformation (15) gestatten, so müssen daher die folgenden Bedingungen erfüllt werden ($\rho = \nu + 2\mu + 1$, $\nu + 2\mu + 2, \dots, n$):

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{ll} a_{1,\rho} = 0 & \text{an Zahl: } \nu(n - \nu - 2\mu) \\ a_{\nu+2j-1,\rho} + i a_{\nu+2j,\rho} = 0 & \text{resp.: } \mu(n - \nu - 2\mu) \\ a_{1,\nu+2j-1} + i a_{1,\nu+2j} = 0 & \text{resp.: } \nu \cdot \mu \\ a_{\nu+2j_1,\nu+2j_2-1} + i a_{\nu+2j_1,\nu+2j_2} = i(a_{\nu+2j_1-1,\nu+2j_2-1} + i a_{\nu+2j_1-1,\nu+2j_2}) & \text{resp.: } \frac{\mu(\mu-1)}{2} \text{ unabhängige} \end{array} \right.$$

Relationen, die von den Parametern $a_{i,\mu}$ erfüllt werden müssen.

Daher ergibt sich:

$$\begin{aligned} s_1 &= \nu(n - \nu - 2\mu) + \mu(n - \nu - 2\mu) + \nu \cdot \mu + \frac{\mu(\mu-1)}{2} \\ &= (\mu + \nu)(n - \nu - \mu) - \frac{\mu(\mu+1)}{2}. \end{aligned}$$

2) Im R_n giebt es $\infty^{(m+1)(n-m)}$ ebene M_m , also in der unendlich fernen ebenen M_{n-1} $\infty^{(m+1)(n-m-1)}$ ebene M_m . Eine ebene $M_{\mu-1}$ schneidet die Null- M_{n-2}^2 nach einer $M_{\mu-2}^2$, welche durch $\frac{(\mu-1)(\mu+2)}{2}$

Punkte bestimmt ist. Soll die $M_{\mu-1}$ auf der Null- M_{n-2}^2 liegen, so muss die $M_{\mu-1}$ noch einen weiteren Punkt der Null- M_{n-2}^2 , welcher nicht auf der Null- $M_{\mu-2}^2$ liegt, enthalten. Damit also eine ebene $M_{\mu-1}$ auf der Null- M_{n-2}^2 liegt, müssen $\frac{(\mu-1)(\mu+2)}{2} + 1 = \frac{\mu(\mu+1)}{2}$

Bedingungen erfüllt werden. Daher giebt es $\infty^{(n+1)(n-m-1) - \frac{\mu(\mu+1)}{2}}$ ebene M_m von der Species μ in Bezug auf die Null- M_{n-2}^2 (*). Wir erhalten also: $\infty^2 = \infty^{(n-\nu-\mu)(\nu+\mu) - \frac{\mu(\mu+1)}{2}}$ ebene $M_{n-\nu-\mu-1}$ in der unendlich fernen ebenen M_{n-1} . Mithin ist wirklich, $s_1 = c_2$, q. e. d.

Man könnte nun den Einwand erheben, dass es eine Anzahl von *discreten* continuirlichen Schaaren von ebenen $M_{n-\nu-\mu-1}$ auf der Null- M_{n-2}^2 geben könnte und dass in Folge dessen der verlangte Beweis nicht erbracht wäre. Es ist aber bekannt, dass nur die grössten ebenen Mannigfaltigkeiten auf der Null- M_{n-2}^2 im R_n , wo n eine gerade Zahl, also die ebenen $M_{\mu-1}$, zwei discrete Schaaren bilden. Es ist leicht einzusehen, dass die diesen beiden discreten Schaaren entsprechenden Untergruppen nicht wesentlich von einander verschieden sind.

Wir wollen nur noch darauf hinweisen, dass wir durch den obigen Beweis zugleich bewiesen haben, dass zwei ebene Tangential-Mannigfaltigkeiten von derselben Species in Bezug auf eine F_2 im R_n immer

*) Vergl. Segre l. c.

durch eine projective Transformation der F_2 in einander übergeführt werden können. Die F_2 sei die Kugel $x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$. Durch stereographische Projection geht eine ebene $M_{n-v-\mu}$ von der Species $\mu + 1$ in Bezug auf die Kugel des R_{n+1} in eine unendlich ferne ebene $M_{n-v-\mu-1}$ des R_n von der Species μ in Bezug auf die Null- M_{n-2}^* über und es entspricht jeder ebenen $M_{n-v-\mu}$ durch eine der unendlich fernen $M_{n-v-\mu-1}$ des R_n eine bestimmte $M_{n-v-\mu}$ des R_{n+1} von der Species $\mu + 1$. Es ist klar, dass die $M_{n-v-\mu}$ des R_{n+1} durch die projective Gruppe der F_2 des R_{n+1} in derselben Weise vertauscht werden wie die erwähnten $M_{n-v-\mu}$ des R_n durch die allgemeine Gruppe von Rotationen um einen festen Punkt. Jede ebene $M_{n-v-\mu}$ durch eine unendlich ferne ebene $M_{n-v-\mu-1}$ kann aber in jede andere solche $M_{n-v-\mu}$ durch die conforme Gruppe übergeführt werden, wie wir zeigen wollen. Die ebene $M_{n-v-\mu}: x_2 = 0, x_{v+2j-1} + ix_{v+2j} = 0$ wird nämlich durch die $v + \mu$ unabhängigen infinitesimalen Translationen $p_2, p_{v+2j-1} + ip_{v+2j}$ in andere $M_{n-v-\mu}$ übergeführt, welche durch dieselbe unendlich ferne $M_{n-v-\mu-1}$ gehen. In der That giebt es $\infty^{v+\mu}$ ebene $M_{n-v-\mu}$ durch eine $M_{n-v-\mu-1}$ im R_n und nicht mehr; dieselben können also wirklich in einander übergeführt werden. Damit ist aber unsere obige Behauptung erwiesen.

§ 2.

Bestimmung der grössten Untergruppen der allgemeinen conformen Gruppe.

Im vorigen Abschnitt haben wir endgiltig gezeigt, dass wir unter der Voraussetzung (9) alle Typen von $(N - n)$ -gliedrigen Untergruppen erhalten, welche nicht mit der Gruppe der Aehnlichkeitstransformationen gleichberechtigt sind.

Wir nehmen also an, die zu suchenden $(N - n)$ -gliedrigen Untergruppen enthalten die folgenden $n - v - \mu$ unabhängigen infinitesimalen Translationen:

(17) $P_{v+2j-1} + iP_{v+2j}, P_\varrho$ ($j = 1, \dots, \mu; \varrho = v + 2\mu + 1, \dots, n$)
während keine der Translationen:

$$P_1, P_{v+2j-1}, P_{v+2j} \quad (\lambda = 1, \dots, v)$$

vorkommen soll.

Wir können also annehmen, in den gesuchten Untergruppen seien keine infinitesimalen Translationen von der folgenden Form vorhanden:

$$(18) \quad \sum_1^v \varepsilon_1 P_1 + \sum_1^\mu \varepsilon_{v+2j-1} P_{v+2j-1}.$$

Wir verfahren nun in folgender Weise:

Einerseits suchen wir die Anzahl derjenigen unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$(19) \quad \sum_1^n \sum_1^n a_{i,x} R_{i,x} + \sum_1^v \varepsilon_i P_i + \sum_1^\mu \varepsilon_{v+2j-1} P_{v+2j-1},$$

welche durch Combination mit den Translationen (17) keine Translationen von der Form (18) ergeben. Da die Translationen mit einander vertauschbar sind, suchen wir also die Anzahl derjenigen unabhängigen infinitesimalen Rotationen $R_{i,x}$, die in den gesuchten Untergruppen vorkommen dürfen; dieselbe sei gleich σ .

Andererseits suchen wir die Anzahl derjenigen unabhängigen infinitesimalen Transformationen (19), welche in den gesuchten Untergruppen vorkommen müssen; dieselbe sei gleich τ .

Es ist einleuchtend, dass wir nur dann Untergruppen der verlangten Art erhalten, wenn $\sigma \geq \tau$. Die Fälle, in denen $\sigma < \tau$, sind also ohne Weiteres auszuschliessen. Es zeigt sich, dass dann nur einige wenige Fälle übrig bleiben.

Wir suchen zunächst die Anzahl σ der möglichen Rotationen.

Durch Combination von $\sum_1^n \sum_1^n a_{i,x} R_{i,x}$ ($a_{i,x} = -a_{x,i}$) mit den Translationen (17) erhalten wir die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} \left(P_\varrho, \sum_1^n \sum_1^n a_{i,x} R_{i,x} \right) &= \sum_1^n a_{\varrho,x} P_x - \sum_1^n a_{i,\varrho} P_i = -2 \sum_1^n a_{i,\varrho} P_i, \\ \left(P_{v+2j-1} + i P_{v+2j}, \sum_1^n \sum_1^n a_{i,x} R_{i,x} \right) &= -2 \sum_1^n (a_{i,v+2j-1} + i a_{i,v+2j}) P_i. \end{aligned}$$

Da nun nach Voraussetzung keine infinitesimalen Translationen von der Form (18) vorkommen dürfen, so ergeben sich hieraus für die $a_{i,x}$ die Bedingungsgleichungen (16) (vergl. pag. 128):

$$\left. \begin{aligned} a_{\lambda,\varrho} &= 0 & \text{an Zahl: } v(n-v-2\mu) \\ a_{v+2j-1,\varrho} + i a_{v+2j,\varrho} &= 0 & \text{resp.: } \mu(n-v-2\mu) \\ a_{\lambda,v+2j-1} + i a_{\lambda,v+2j} &= 0 & \text{resp.: } v \cdot \mu \\ a_{v+2j_1,v+2j_2-1} + i a_{v+2j_1,v+2j_2} &= i(a_{v+2j_1-1,v+2j_2-1} + i a_{v+2j_1-1,v+2j_2}) \\ & \text{resp.: } \frac{\mu(\mu-1)}{2} \end{aligned} \right\} \text{unabhängige Relationen.}$$

Das sind im Ganzen:

$$\frac{n(n-1)}{2} - \sigma = v(n-v-2\mu) + \mu(n-v-2\mu) + v \cdot \mu + \frac{\mu(\mu-1)}{2}$$

unabhängige Relationen, die von den Parametern $a_{i,x}$ erfüllt werden müssen. Also ergibt sich:

$$(20) \quad \sigma = \frac{n(n-1)}{2} - (v + \mu)(n - v - \mu) + \frac{\mu(\mu+1)}{2}.$$

Wir wollen gleich die unabhängigen infinitesimalen Rotationen, welche vorkommen können, aufstellen. Dabei bereitet nur die letzte der Relationen (16) einige Schwierigkeiten.

Bezeichnen wir:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{array} \right\} = 1, 2, \dots, v; \quad \left. \begin{array}{l} j \\ j_1 \\ j_2 \end{array} \right\} = 1, 2, \dots, \mu;$$

$$\left. \begin{array}{l} \varrho \\ \varrho_1 \\ \varrho_2 \end{array} \right\} = v + 2\mu + 1, v + 2\mu + 2, \dots, n;$$

so erhalten wir etwa:

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{ll} R_{\lambda_1, \lambda_2} & \text{an Zahl: } \frac{v(v-1)}{2} \\ R_{\varrho_1, \varrho_2} & \frac{(n-v-2\mu)(n-v-2\mu-1)}{2} \\ R_{\lambda, v+2j-1} + i R_{\lambda, v+2j} & \mu \cdot v \\ R_{\varrho, v+2j-1} + i R_{\varrho, v+2j} & \mu(n-v-2\mu) \\ R_{v+2j-1, v+2j} & \mu \\ (a) \left\{ \begin{array}{l} R_{v+2j_1-1, v+2j_2-1} + i R_{v+2j_1-1, v+2j_2} \\ R_{v+2j_1, v+2j_2-1} + i R_{v+2j_1, v+2j_2} \end{array} \right\} & \text{davon } \frac{3\mu(\mu-1)}{2} \text{ un-} \\ & \text{abhängige.} \end{array} \right\}.$$

Wir könnten die letzteren $\mu(\mu-1)$ Rotationen (21a) auch so schreiben:

unabhängige an Zahl:

$$\left\{ \begin{array}{ll} R_{v+2j_1-1, v+2j_2} - R_{v+2j_1, v+2j_2-1} & \frac{\mu(\mu-1)}{2}, \\ R_{v+2j_1-1, v+2j_2-1} + R_{v+2j_1, v+2j_2} & \frac{\mu(\mu-1)}{2}, \\ R_{v+2j_1-1, v+2j_2-1} + i R_{v+2j_1-1, v+2j_2} & \frac{\mu(\mu-1)}{2}. \end{array} \right.$$

Wir erkennen aber, dass es nicht möglich ist, von den letzteren nur die unabhängigen infinitesimalen Rotationen allgemein hinzuschreiben, dass dies vielmehr nur in jedem einzelnen Falle möglich ist. Wenn wir daher im Folgenden die $\mu(\mu-1)$ Rotationen (21a) schreiben, so müssen wir uns immer erinnern, dass davon nur $\frac{3\mu(\mu-1)}{2}$ unabhängig sind.

Z. B.:

$$P_1 + iP_2, \quad P_3 + iP_4$$

lassen die folgenden Rotationen zu:

$$R_{12}, R_{34}, R_{13} + iR_{23}, R_{14} + iR_{24}, R_{13} + iR_{14}, R_{23} + iR_{24}.$$

Wegen:

$$(R_{13} + iR_{23}) - (R_{13} + iR_{14}) + i(R_{14} + iR_{24}) \approx i(R_{23} + iR_{24})$$

sind dies jedoch nur 5 unabhängige Rotationen.

Man kann leicht verificiren, dass die Zahl der unabhängigen Rotationen (21) wirklich denselben Werth von σ wie (20) ergibt.

Nach dem Vorhergehenden ist es klar, dass keine infinitesimale Rotation von der folgenden Form vorkommen darf:

$$(22) \quad R \equiv \left\{ \begin{aligned} & \sum_1^v \sum_{\nu+2\mu+1}^n a_{\lambda, \varrho} R_{\lambda, \varrho} + \sum_{\nu+2\mu+1}^n \sum_1^\mu a_{\varrho, \nu+2j-1} R_{\varrho, \nu+2j-1} \\ & + \sum_1^v \sum_1^\mu a_{\lambda, \nu+2j-1} R_{\lambda, \nu+2j-1} \\ & + \sum_1^\mu \sum_1^\mu a_{\nu+2j_1-1, \nu+2j_2-1} R_{\nu+2j_1-1, \nu+2j_2-1} \end{aligned} \right\}.$$

In der That, es ist:

$$(P_\varrho, R) = - \sum_1^v a_{\lambda, \varrho} P_\lambda + \sum_1^\mu a_{\varrho, \nu+2j-1} P_{\nu+2j-1},$$

$$\left\{ \begin{aligned} & (P_{\nu+2j-1} + iP_{\nu+2j}, R) = \\ & - \sum_{\nu+2\mu+1}^n a_{\varrho, \nu+2j-1} P_\varrho - \sum_1^v a_{\lambda, \nu+2j-1} P_\lambda + 2 \sum_1^\mu a_{\nu+2j_1-1, \nu+2j-1} P_{\nu+2j-1}. \end{aligned} \right\}$$

Solche Translationen können aber nach Voraussetzung nicht vorkommen. Daher ergibt sich, wie man leicht einsieht, dass alle Coefficienten a in (22) verschwinden müssen, dass also wirklich keine Transformationen von der Form (22) vorkommen können.

Dass die Aufstellung der Rotationen (21) richtig ist, erkennt man daraus, dass sich durch Combination der Translationen (17) mit denselben immer wieder Translationen (17) ergeben.

Man kann ferner leicht verificiren, dass die Rotationen (21) eine Gruppe erzeugen, was selbstverständlich ist. Wir erkennen also, dass wir zugleich mit der Bestimmung von Untergruppen der conformen Gruppe Untergruppen der isomorphen Gruppe der Rotationen erhalten.

Es ist nur noch hervorzuheben, dass in den zu suchenden Untergruppen zu jeder der Rotationen (21) als additive Glieder Translationen von der Form (18) hinzutreten.

Nachdem wir nun σ bestimmt haben, bleibt uns noch übrig, τ zu finden.

Zu diesem Zwecke erinnern wir an den bekannten Lie'schen Satz*):

Eine $(r - m)$ -gliedrige Untergruppe der r -gliedrigen Gruppe $X_1 f, X_2 f, \dots, X_r f$ enthält mindestens $q - m$ unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form:

$$e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + \dots + e_q X_q f.$$

In unserem Falle ist $q = v + \mu + \frac{n(n-1)}{2}$, $m = n$. Folglich erkennen wir ohne Weiteres, dass es in den gesuchten $(N - n)$ -gliedrigen Untergruppen mindestens:

$$(23) \quad \tau = \frac{n(n-1)}{2} + v + \mu - n$$

unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form (19):

$$\sum_1^n \sum_1^n a_{i,x} R_{i,x} + \sum_1^v \epsilon_i P_i + \sum_1^u \epsilon_{v+2j-1} P_{v+2j-1}$$

geben muss.

Nach dem pag. 130 Gesagten erhalten wir nur dann Untergruppen der verlangten Art, wenn $\sigma \geq \tau$, wenn also:

$$\frac{n(n-1)}{2} - (v + \mu)(n - v - \mu) + \frac{\mu(\mu+1)}{2} \geq \frac{n(n-1)}{2} + v + \mu - n$$

oder:

$$(24) \quad (v + \mu - 1)(n - v - \mu) \leq \frac{\mu(\mu+1)}{2}.$$

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle: $\mu = 0$ und $\mu > 0$.

I. $\mu = 0$. Nach (24) muss sein:

$$(v - 1)(n - v) \leq 0.$$

Diese Bedingung wird nur durch $v = 0$ oder $v = 1$, n beliebig, erfüllt. Den Fall $v = 0$, $\mu = 0$ haben wir aber von vornherein ausgeschlossen. Es bleibt also nur der eine Fall näher zu untersuchen:

$$1) \quad v = 1, \mu = 0, n \text{ beliebig, } \sigma = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \tau.$$

II. $\mu > 0$. Die Maximalzahl von v ist dann $n - 2\mu$, also muss sein:

$$n - v - \mu \geq \mu.$$

*) Vergl. Theorie der Transformationsgruppen, Leipzig 1888.

Setzen wir dies in (24) ein, so muss um so mehr sein:

$$(\nu + \mu - 1) \mu \leq \frac{\mu(\mu + 1)}{2}$$

oder: $\nu + \mu - 1 \leq \frac{\mu + 1}{2}$

(25) oder: $2\nu \leq 3 - \mu.$

Daraus folgt nun ohne Weiteres, dass es für $\mu > 3$ keine Untergruppen der verlangten Art gibt.

Wir haben demnach nur noch die folgenden 3 Fälle zu behandeln:

a) $\mu = 1$. Aus (25) folgt $\nu = 0$ oder $\nu = 1$. Aus (24) folgt für $\nu = 0$: n beliebig, für $\nu = 1$: $n = 1, 2, 3$. Da immer $\nu + 2\mu \leq n$ sein muss, so kann n nur gleich 3 sein, wenn $\nu = 1$. Wir erhalten also nur die folgenden beiden Fälle:

2) $\nu = 0, \mu = 1, n$ beliebig, $\sigma = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 = \tau + 1.$

3) $\nu = 1, \mu = 1, n = 3, \sigma = 2 = \tau.$

b) $\mu = 2$. Aus (25) folgt $\nu = 0$ und aus (24) $n \leq 5$. Wegen $n \geq 2\mu$ erhalten wir nur die folgenden beiden Fälle:

4) $\nu = 0, \mu = 2, n = 4, \sigma = 5 = \tau + 1.$

5) $\nu = 0, \mu = 2, n = 5, \sigma = 7 = \tau.$

c) $\mu = 3$. Aus (25) folgt $\nu = 0$ und aus (24) $2(n-3) \geq 6$ oder $n \geq 6$. Wegen $n \geq 2\mu$ kommt aber nur der folgende Fall in Betracht:

6) $\nu = 0, \mu = 3, n = 6, \sigma = 12 = \tau.$

Wir haben demnach die Bestimmung aller $(N-n)$ -gliedrigen Untergruppen der allgemeinen conformen Gruppe auf die Behandlung von 6 speziellen Fällen reducirt.

Wir sehen, dass entweder $\sigma = \tau$ oder $\sigma = \tau + 1$ ist.

In den Fällen, in welchen $\sigma = \tau$, gibt es keine Untergruppen mit mehr als $N-n$ Parametern; denn gäbe es z. B. eine $(N-n+1)$ -gliedrige Untergruppe in einem solchen Falle, so müssten $\tau + 1$ unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form (19) vorkommen; die Zahl σ bliebe aber dieselbe. Das giebt aber einen Widerspruch. Analog erhalten wir in den Fällen, in welchen $\sigma = \tau + 1$, höchstens Untergruppen mit $N-n+1$ Parametern, aber keine grösseren. Es ist noch hervorzuheben, dass wir hier alle Typen von Untergruppen mit mehr als $N-n$ Parametern erhalten, denn eine solche Untergruppe enthält sicher mindestens eine infinitesimale Translation.

Aus unseren bisherigen Betrachtungen folgt also ohne Weiteres das Theorem:

Die N -gliedrige allgemeine conforme Gruppe des R_n enthält keine Untergruppen mit mehr als $N - n + 1$ Parametern.

Wir wollen nun die 6 übrig gebliebenen Fälle einzeln untersuchen:

$$1) \quad \nu = 1, \quad \mu = 0, \quad n \text{ beliebig}, \quad \sigma = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \tau.$$

Es kommen die folgenden infinitesimalen Translationen vor:

$$P_2, P_3, \dots, P_n.$$

Nach unseren allgemeinen Betrachtungen müssen dann auch die folgenden infinitesimalen Transformationen vorkommen:

$$R_{i,x} + a_{i,x} P_1 \quad (i, x = 2, 3, \dots, n),$$

während keine von der folgenden Form vorhanden sein darf:

$$a_1 P_1 + \sum_x^n a_{1,x} R_{1,x}.$$

Da dies gerade n unabhängige infinitesimale Transformationen sind, so müsste die gesuchte Untergruppe nach dem pag. 120 angeführten Satze eine infinitesimale Transformation von der Form enthalten:

$$C_1 + a_1 P_1 + \sum_x^n a_{1,x} R_{1,x}.$$

Dann müsste aber auch vorkommen:

$$\left(P_2, C_1 + a_1 P_1 + \sum_x^n a_{1,x} R_{1,x} \right) = 2 R_{1,2} - a_{1,2} P_1.$$

Da aber eine solche Transformation nicht vorkommen darf, so erhalten wir in diesem Falle *keine* Untergruppe der verlangten Art.

$$2) \quad \nu = 0, \quad \mu = 1, \quad n \text{ beliebig}, \quad \sigma = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 = \tau + 1.$$

Es kommen die folgenden infinitesimalen Translationen vor:

$$P_1 + i P_2, P_3, \dots, P_n.$$

Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden:

a) $n > 2$. Es darf keine infinitesimale Transformation von der Form:

$$\sum_q^n a_{1,q} R_{1,q} + a_1 P_1 \quad (q = 3, \dots, n)$$

vorkommen, also auch keine von der Form:

$$C_1 + \sum_q^n a_{1,q} R_{1,q} + a_1 P_1,$$

denn es ist $(\varrho_1 = 3, \dots, n)$:

$$\left(P_{\varrho_1}, C_1 + \sum_3^n a_{1,\varrho} R_{1,\varrho} + a_1 P_1 \right) = 2 R_{1,\varrho_1} - a_{1,\varrho_1} P_1.$$

Da also n unabhängige infinitesimale Transformationen nicht vorkommen können, so erhalten wir in diesem Falle *keine* Untergruppe mit mehr als $N - n$ Parametern.

Demnach erhalten wir das Theorem:

Die N -gliedrige allgemeine conforme Gruppe des R_n enthält, wenn wir vorläufig vom R_2 und R_4 absehen, *keine* Untergruppe mit mehr als $N - n$ Parametern.

Wir wollen nun die $(N - n)$ -gliedrigen Untergruppen aufsuchen, von denen wir $P_1 + i P_2$, $P_{\varrho} (\varrho = 3, \dots, n)$ schon kennen. Nach dem Vorausgehenden müssen dann auch infinitesimale Transformationen von den folgenden Formen vorkommen:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{1,2} + \varepsilon_1 P_1, \\ R_{1,\varrho} + i R_{2,\varrho} + \varepsilon_{\varrho} P_1, \\ R_{\varrho_1, \varrho_2} + \varepsilon_{\varrho_1, \varrho_2} P_1, \\ S + a_1 C_1 + \sum_3^n a_{1,\varrho} R_{1,\varrho} + a_2 P_1, \\ C_2 + b_1 C_1 + \sum_3^n b_{1,\varrho} R_{1,\varrho} + b_2 P_1, \\ C_{\varrho} + c_1 C_1 + \sum_3^n c_{1,\varrho} R_{1,\varrho} + c_2 P_1. \end{array} \right.$$

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} (R_{1,2} + \varepsilon_1 P_1, R_{1,\varrho} + i R_{2,\varrho} + \varepsilon_{\varrho} P_1) &= -R_{2,\varrho} + i R_{1,\varrho} + \varepsilon_1 P_{\varrho} - \varepsilon_{\varrho} P_2 \\ &= i(R_{1,\varrho} + i R_{2,\varrho} + i \varepsilon_{\varrho} P_2) + \varepsilon_1 P_{\varrho} \\ (R_{1,2} + \varepsilon_1 P_1, R_{\varrho_1, \varrho_2} + \varepsilon_{\varrho_1, \varrho_2} P_1) &= \varepsilon_{\varrho_1, \varrho_2} P_2, \\ \text{also: } \varepsilon_{\varrho} &= 0, \quad \varepsilon_{\varrho_1, \varrho_2} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(P_{\varrho_1}, S + a_1 C_1 + \sum_3^n a_{1,\varrho} R_{1,\varrho} + a_2 P_1 \right) &= P_{\varrho_1} + 2 a_1 R_{1,\varrho_1} - a_{1,\varrho_1} P_1, \\ \text{also: } a_1 &= 0, \quad a_{1,\varrho} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(P_{\varrho_1}, C_2 + b_1 C_1 + \sum_3^n b_{1,\varrho} R_{1,\varrho} + b_2 P_1 \right) &= 2(R_{2,\varrho_1} + b_1 R_{1,\varrho_1}) - b_{1,\varrho_1} P_1, \\ \text{also: } b_1 &= -i, \quad b_{1,\varrho} = 0. \end{aligned}$$

Für $n > 3$ verfahren wir in folgender Weise weiter:

$$\left(P_{\varrho}, C_{\varrho} + c_1 C_1 + \sum_3^n c_{1,\varrho} R_{1,\varrho} + c_2 P_1 \right) = 2 R_{\varrho,\varrho} + 2 c_1 R_{1,\varrho} - c_{1,\varrho} P_1,$$

$$\text{also: } c_1 = 0, c_{1,\varrho} = 0.$$

$$(S + a_2 P_1, C_{\varrho} + c_2 P_1) = C_{\varrho} - 2 a_2 R_{1,\varrho} - c_2 P_1,$$

$$\text{also: } a_2 = 0, c_2 = 0.$$

$$(S, C_2 - i C_1 + b_2 P_1) = C_2 - i C_1 - b_2 P_1,$$

$$\text{also: } b_2 = 0.$$

$$(R_{1,2} + \varepsilon_1 P_1, S) = \varepsilon_1 P_1,$$

$$\text{also: } \varepsilon_1 = 0.$$

Wir erhalten demnach die folgende $(N-n)$ -gliedrige Untergruppe:

$$\boxed{P_1 + i P_2, P_{\varrho}, R_{1,2}, R_{1,\varrho} + i R_{2,\varrho}, R_{\varrho,\varrho}, S, C_1 + i C_2, C_{\varrho}} \\ (\varrho, \varrho_1, \varrho_2 = 3, \dots, n)$$

Diese Untergruppe lässt $x_1 + i x_2 = 0$, also eine Tangential- M_{n-1}^1 des Null-Kegels $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0$ invariant. Die erhaltene Gruppe ist mit der Gruppe aller Ähnlichkeitstransformationen gleichberechtigt und nicht als ein neuer Typus zu betrachten.

Für $n = 3$ kennen wir die folgenden infinitesimalen Transformationen:

$$P_1 + i P_2, P_3, R_{1,2} + \varepsilon_1 P_1, R_{1,3} + i R_{2,3}, S + a_2 P_1,$$

$$C_2 - i C_1 + b_2 P_1, C_3 + c_1 C_1 + c_{1,3} R_{1,3} + c_2 P_1.$$

Durch Combination je zweier dieser Transformationen kann man nur bestimmen:

$$c_1 = 0, c_2 = 0, b_2 = -2i\varepsilon_1^2 = -\varepsilon_1 c_{1,3} = 2\varepsilon_1 a_2.$$

Es bleibt also ein willkürlicher Parameter übrig. Wir werden später einsehen, dass wir in diesem Falle keinen neuen Typus erhalten.

b) $n = 2$. In diesem Falle wollen wir die $(N-n)$ -gliedrigen Untergruppen nicht bestimmen, da wir sogar eine $(N-n+1)$ -, resp. 5-gliedrige Untergruppe erhalten.

Es kommen etwa die folgenden infinitesimalen Transformationen vor:

$$P_1 + i P_2, R_{1,2} + a_1 P_1, S + a_2 P_1, C_1 + a_3 P_1, C_2 + a_4 P_1.$$

Es ergibt sich nun:

$$(P_1 + i P_2, C_2 + a_4 P_1) = -2 R_{1,2}, \quad \text{also: } a_1 = 0.$$

$$(R_{1,2}, S + a_2 P_1) = -a_2 P_2, \quad \text{also: } a_2 = 0.$$

$$(S, C_1 + a_3 P_1) = C_1 - a_3 P_1, \quad \text{also: } a_3 = 0.$$

$$(S, C_2 + a_4 P_1) = C_2 - a_4 P_1, \quad \text{also: } a_4 = 0.$$

Wir erhalten demnach die folgende 5-gliedrige Untergruppe der conformen Gruppe des R_2 :

$$(26) \quad \boxed{P_1 + iP_2, R_{1,2}, S, C_1, C_2}$$

Diese Untergruppe lässt $x_1 + ix_2 = 0$, also eine gerade Linie durch einen der beiden Nullpunkte, invariant.

$$3) \quad \nu = 1, \mu = 1, n = 3, \sigma = 2 = \tau.$$

In der gesuchten 7-gliedrigen Untergruppe kommt vor:

$$P_2 + iP_3,$$

während keine infinitesimale Transformation von der folgenden Form vorhanden sein darf:

$$a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_{1,2} R_{1,2}.$$

Dann müssen auch Transformationen von den folgenden Formen vorkommen:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{2,3} + \varepsilon_1 P_1 + \varepsilon_2 P_2, \\ R_{1,2} + iR_{1,3} + \varepsilon_3 P_1 + \varepsilon_4 P_2, \\ S + a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_{1,2} R_{1,2}, \\ C_1 + b_1 P_1 + b_2 P_2 + b_{1,2} R_{1,2}, \\ C_2 + c_1 P_1 + c_2 P_2 + c_{1,2} R_{1,2}, \\ C_3 + d_1 P_1 + d_2 P_2 + d_{1,2} R_{1,2}. \end{array} \right.$$

Durch Combination von je zwei solchen Transformationen kann man zeigen, dass ein Theil der Parameter ε, a, b, c, d verschwinden muss, dass sich aber einige der Parameter auf diese Weise nicht weg-schaffen lassen. Noch schlimmer wird dies in den Fällen 4) und 6), wo noch viel mehr Parameter vorkommen.

Da nun die Vereinfachungen, die wir hier erzielen können, nur durch unerquickliche Rechnungen geleistet werden und trotzdem will-kürliche Parameter in den gesuchten Untergruppen zurückbleiben, so wollen wir uns hier darauf beschränken, die Typen von Untergruppen für die Fälle 3), 4) und 6) anzugeben.

Bei der Bestimmung der grössten Untergruppen der Gruppe der F_2 wird sich dann zeigen, dass wir Typen von Untergruppen erhalten, die den hier aufgestellten vollständig entsprechen.

Im Falle 3) erhalten wir die 7-gliedrige Untergruppe der conformen Gruppe des R_3 :

$$(27) \quad \boxed{P_2 + iP_3, R_{2,3}, R_{1,2} + iR_{1,3}, S, C_1, C_2, C_3}$$

Diese Untergruppe lässt $x_1 = 0$, $x_2 + ix_3 = 0$, eine Erzeugende des imaginären Kreiskegels $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, invariant.

$$4) \quad \nu = 0, \mu = 2, n = 4, \sigma = 5 = \tau + 1.$$

Wir erhalten die 12-gliedrige Untergruppe der conformen Gruppe des R_4 :

$$(28) \quad \boxed{P_1 + iP_2, P_3 + iP_4, R_{1,2}, R_{3,4}, R_{1,3} + iR_{2,3}, R_{1,4} + iR_{2,4}, \\ R_{1,5} + iR_{1,4}, S, C_1, C_2, C_3, C_4.}$$

Diese Untergruppe lässt die ebene $M_2: x_1 + ix_2 = 0, x_3 + ix_4 = 0$ invariant, welche durch eine Erzeugende der Null- M_2^2 hindurchgeht.

$$5) \quad \nu = 0, \mu = 2, n = 5, \sigma = 7 = \tau.$$

Wir erhalten in diesem Falle *keine* 16-gliedrige Untergruppe der conformen Gruppe des R_5 .

Nämlich, es kommen die folgenden infinitesimalen Translationen vor:

$$P_1 + iP_2, P_3 + iP_4, P_5,$$

während keine infinitesimale Transformation von der folgenden Form vorhanden sein darf:

$$P \equiv a_1 P_1 + a_3 P_3 + a_{1,3} R_{1,3} + a_{1,5} R_{1,5} + a_{3,5} R_{3,5}.$$

Dann müsste aber etwa eine Transformation von der folgenden Form vorkommen:

$$C_1 + P.$$

Es ist aber:

$$(P_5, C_1 + P) = 2R_{1,5} - a_{1,5}P_1 - a_{3,5}P_3.$$

Eine solche Transformation darf jedoch nicht vorkommen, wir erhalten also in diesem Falle keine Untergruppe.

$$6) \quad \nu = 0, \mu = 3, n = 6, \sigma = 12 = \tau.$$

Wir erhalten die 22-gliedrige Untergruppe der conformen Gruppe des R_6 :

$$(29) \quad \boxed{P_1 + iP_2, P_3 + iP_4, P_5 + iP_6, S, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, \\ R_{1,2}, R_{3,4}, R_{5,6}, R_{1,3} + iR_{2,3}, R_{2,3} + iR_{2,4}, R_{1,3} + iR_{1,4}, \\ R_{1,5} + iR_{2,5}, R_{1,6} + iR_{2,6}, R_{1,5} + iR_{1,6}, R_{3,5} + iR_{4,5}, \\ R_{3,6} + iR_{4,6}, R_{3,5} + iR_{3,6}.}$$

Diese Untergruppe lässt die ebene $M_3: x_1 + ix_2 = 0, x_3 + ix_4 = 0, x_5 + ix_6 = 0$ invariant, welche durch eine grösste ebene Mannigfaltigkeit, eine M_2 , der Null- M_4^2 hindurchgeht.

Wir erhalten demnach als Resultat das folgende

Theorem: Die $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ -gliedrige allgemeine conforme Gruppe des R_n besitzt, wenn $n = 3$ oder $n > 4$ vorausgesetzt wird,

keine continuirliche Untergruppe mit mehr als $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - n$ Parametern. Und zwar ist jede grösste Untergruppe mit der Gruppe aller Ähnlichkeitstransformationen innerhalb der conformen Gruppe gleichberechtigt. Nur für $n=3$ und $n=6$ erhalten wir noch einen zweiten Typus von grössten Untergruppen, welche dadurch charakterisirt sind, dass bei ihnen eine ebene M_1 resp. M_3 , welche durch eine grösste ebene Mannigfaltigkeit, Punkt resp. ebene M_2 , der Null- M_{n-2}^2 hindurchgeht, invariant bleibt.

Für $n=2$ und $n=4$ erhalten wir dagegen Untergruppen mit einem Parameter mehr und diese sind wieder dadurch charakterisirt, dass bei ihnen eine ebene M_1 resp. M_2 , welche durch eine grösste ebene Mannigfaltigkeit, Punkt resp. Gerade, der Null- M_{n-2}^2 hindurchgeht, invariant bleibt.

§ 3.

Bestimmung der grössten Untergruppen der allgemeinen projectiven Gruppe der F_2 .

Mit der Untersuchung der allgemeinen conformen Gruppe haben wir zugleich den Weg gefunden, um die Gruppe von projectiven infinitesimalen Transformationen, welche die F_2 im R_n gestattet, direct zu untersuchen. Wir zeigten, dass diese Gruppe sich auf die einfache Form bringen lässt:

$$(30) \quad \boxed{Q_i \equiv p_i - x_i \sum_{j=1}^n x_j p_j; \quad R_{i,x} \equiv x_i p_x - x_x p_i} \\ (i, x = 1, \dots, n)$$

Bezeichnen wir die infinitesimalen Rotationen der conformen Gruppe des R_{n-1} mit $R'_{i,x}$ ($i, x = 1, \dots, n-1$), so können wir das gegenseitige Entsprechen der infinitesimalen Transformationen der Gruppe der F_2 und der allgemeinen conformen Gruppe durch die folgenden Relationen ausdrücken (vergl. pag. 117):

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{i,x} \equiv R'_{i,x}; \quad R_{i,n} \equiv P_i + \frac{1}{4} C_i; \quad Q_i \equiv P_i - \frac{1}{4} C_i; \quad Q_n \equiv S \\ 2 P_i \equiv R_{i,n} + Q_i; \quad C_i \equiv 2(R_{i,n} - Q_i); \quad S \equiv Q_n; \quad R'_{i,x} \equiv R_{i,x} \end{array} \right\} \\ (i, x = 1, \dots, n-1)$$

Die Zusammensetzung der Gruppe (30) ist durch die folgenden Relationen gegeben ($\varepsilon_{i,x} \equiv 0$ für $i \neq x$; $\varepsilon_{i,i} = 1$):

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} (Q_i, Q_x) = R_{i,x}; \quad (Q_i, R_{j,x}) = \varepsilon_{i,j} Q_x - \varepsilon_{i,x} Q_j \\ (R_{i,x}, R_{\mu,\nu}) = \varepsilon_{x,\mu} R_{i,\nu} - \varepsilon_{x,\nu} R_{i,\mu} - \varepsilon_{\mu,\nu} R_{x,\nu} + \varepsilon_{i,\nu} R_{x,\mu} \end{array} \right\}.$$

Wir wollen zunächst die Bahncurven der Q_i bestimmen. Es ergibt

$$\text{sich für } Q_i \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i} - x_i \sum_1^n x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} :$$

$$\frac{dx_i}{1-x_i^2} = \frac{dx_j}{-x_i x_j};$$

also erhalten wir als Bahncurven etwa:

$$(33) \quad x_i^2 + c_j x_j^2 = 1,$$

wofür wir auch schreiben können:

$$x_i^2 + a_x x_x^2 = 1, \quad x_x + a_j x_j = 0,$$

wo j beliebige, i, x aber bestimmte von den Zahlen $1, \dots, n$ sind.

Unter diesen Kegelschnitten ist eine einzige doppeltzählende Gerade

und zwar eine Gerade durch den Mittelpunkt der Kugel $\left(\sum_1^n x_j^2 = 1\right)$:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_{i-1} = 0, \quad x_{i+1} = 0, \dots, x_n = 0.$$

Diese Gerade hat mit der Kugel die Punkte

$$x_1 = 0, \dots, x_{i-1} = 0; \quad x_i = \pm 1, \quad x_{i+1} = 0, \dots, x_n = 0$$

gemein. Ebenso gehen alle Kegelschnitte (33) durch diese beiden Punkte. Wir erkennen also, dass die Bahncurven einer infinitesimalen Transformation Q alle Kegelschnitte sind, welche die Kugel in denjenigen beiden Punkten berühren, welche Schnittpunkte eines bestimmten Durchmessers mit der Kugel sind. Demgemäss ist es klar, dass jede

infinitesimale Transformation $\sum_1^n a_j Q_j$ durch einen bestimmten Durchmesser der Kugel repräsentirt wird.

Z. B. ist der infinitesimalen Transformation $Q_1 + i Q_2$ der Durchmesser:

$$x_1 + i x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \dots, x_n = 0$$

zugeordnet. In der That lässt $Q_1 + i Q_2$ dieses Gleichungssystem invariant, wie man sich leicht überzeugt.

Unsere Gruppe (30) hat nun $\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$ Parameter.

Uebertragen wir die im vorigen Abschnitt für die allgemeine conforme Gruppe endgiltig gefundenen Theoreme (pag. 135 und 136) auf unsere Gruppe, so erhalten wir die beiden folgenden Theoreme:

Die $\frac{n(n+1)}{2}$ -gliedrige projective Gruppe der F_2 im R_n enthält keine

Untergruppen mit mehr als $\frac{n(n+1)}{2} - n + 2 = \frac{n(n-1)}{2} + 2$ Parametern.

Die $\frac{n(n+1)}{2}$ -gliedrige projective Gruppe der F_2 im R_n enthält, wenn wir vom R_3 und R_5 absehen, keine Untergruppen mit mehr als $\frac{n(n+1)}{2} - n + 1 = \frac{n(n-1)}{2} + 1$ Parametern.

Wir wollen daher zunächst alle $(\frac{n(n-1)}{2} + 1)$ -gliedrigen Untergruppen der Gruppe (30) bestimmen. Es wird sich zeigen, dass wir dabei auch alle $(\frac{n(n-1)}{2} + 2)$ -gliedrigen Untergruppen erhalten.

Nach dem pag. 133 angeführten Satze ist es sicher, dass eine $(\frac{n(n-1)}{2} + 1)$ -gliedrige Untergruppe mindestens eine infinitesimale Transformation $\sum_1^n a_j Q_j$ enthält; umsomehr muss dies bei grösseren Untergruppen der Fall sein.

Wir setzen daher voraus, dass wir die folgenden infinitesimalen Transformationen der gesuchten Untergruppen bereits kennen:

$$(34) \quad Q_{v+2j-1} + i Q_{v+2j}, \quad Q_{\varrho}, \\ (j=1, 2, \dots, \mu; \quad \varrho=v+2\mu+1, v+2\mu+2, \dots, n)$$

während wir zugleich wissen, dass keine infinitesimale Transformation von der folgenden Form vorkommen darf:

$$(35) \quad \sum_1^v a_\lambda Q_\lambda + \sum_1^\mu a_{v+2j-1} Q_{v+2j-1} \quad (\lambda=1, 2, \dots, v).$$

Es kommen dann nothwendig auch die folgenden infinitesimalen Transformationen vor:

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} (Q_{v+2j_1-1} + i Q_{v+2j_1}, \quad Q_{v+2j_2-1} + i Q_{v+2j_2}) \\ \quad = \left\{ \begin{array}{l} R_{v+2j_1-1, v+2j_2-1} + i R_{v+2j_1-1, v+2j_2} \\ + i (R_{v+2j_1, v+2j_2-1} + i R_{v+2j_1, v+2j_2}) \end{array} \right\} \\ (Q_{v+2j-1} + i Q_{v+2j}, \quad Q_{\varrho}) = R_{v+2j-1, \varrho} + i R_{v+2j, \varrho} \\ (Q_{\varrho_1}, \quad Q_{\varrho_2}) = R_{\varrho_1, \varrho_2} \end{array} \right\}.$$

Wir behandeln unter der Voraussetzung (34) wirklich alle Fälle, denn wir haben gesehen, dass $\sum_1^n a_i Q_i$ und $\sum_1^n a_i P_i$ durch dieselbe Gerade durch den Coordinatenanfangspunkt und also auch durch denselben unendlich fernen Punkt repräsentirt werden. Daher gelten für die Q_i genau dieselben Betrachtungen, wie wir sie für die P_i früher (pag. 123—129) ausgeführt haben.

Es sind nun verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nachdem nämlich *mehrere*, oder nur *eine*, oder gar *keine* der infinitesimalen Transformationen Q_ϱ vorhanden sind. Es wird sich zeigen, dass sich der letzte Fall am schwierigsten erledigen lässt. Im ersten Falle ist $\nu + 2\mu < n - 1$, im zweiten $\nu + 2\mu = n - 1$ und im dritten $\nu + 2\mu = n$.

$$1) \quad \nu + 2\mu < n - 1.$$

Wir erkennen ohne Weiteres, dass ausser den $n - \nu - \mu$ infinitesimalen Transformationen $Q_{r+2j-1} + i Q_{r+2j}$, Q_ϱ noch

$$\tau = \frac{n(n-1)}{2} + 1 - n + \nu + \mu$$

unabh. von der folgenden Form vorkommen müssen:

$$(37) \quad T \equiv \sum_1^n i \sum_x^n a_{i,x} R_{i,x} + \sum_1^\nu a_\lambda Q_\lambda + \sum_1^\mu a_{r+2j-1} Q_{r+2j-1}.$$

Wir fragen weiter: *wie viele unabh. solche Transformationen können vorkommen?*

Es ergibt sich nun:

$$(38) \quad (Q_\varrho, T) = \begin{pmatrix} -2 \sum_1^n a_{i,\varrho} Q_i - \sum_1^\nu a_\lambda R_{\lambda,\varrho} \\ - \sum_1^\mu a_{r+2j-1} R_{r+2j-1,\varrho} \end{pmatrix}$$

$$(Q_\varrho, (Q_\varrho, T)) = +2 \sum_1^n a_{i,\varrho} R_{i,\varrho} \quad (\varrho \geq \varrho),$$

$$(Q_\varrho, (Q_\varrho, (Q_\varrho, T))) = -2 \sum_1^n a_{i,\varrho} Q_i.$$

Da nun nach Voraussetzung keine infinitesimalen Transformationen von der Form (35) vorkommen dürfen, so folgt:

$$a_{\lambda,\varrho} = 0 \quad \text{an Zahl:} \quad \nu(n - \nu - 2\mu),$$

$$a_{r+2j-1,\varrho} + i a_{r+2j,\varrho} = 0 \quad \text{resp.:} \quad \mu(n - \nu - 2\mu).$$

In Folge dessen folgt aus (38), dass auch Transformationen von der folgenden Form vorkommen:

$$\sum_1^\nu a_\lambda R_{\lambda,\varrho} + \sum_1^\mu a_{r+2j-1} R_{r+2j-1,\varrho}.$$

Durch Combination dieses Ausdruckes mit $-Q_\varrho$ erhalten wir aber den Ausdruck (35); es sind demnach die weiteren Bedingungen zu erfüllen:

$$a_2 = 0; \quad a_{v+2j-1} = 0; \quad \text{an Zahl: } v + \mu.$$

Wegen

$$\left(Q_{v+2j-1} + i Q_{v+2j}, \sum_1^n i \sum_1^n a_{i,x} R_{-,x} \right) = 2 \sum_1^n (a_{v+2j-1,x} + i a_{v+2j,x}) Q_x$$

ergibt sich ferner:

$$\begin{cases} a_{2,v+2j-1} + i a_{2,v+2j} = 0 & \text{an Zahl: } v \cdot \mu, \\ a_{v+2j_1, v+2j_2-1} + i a_{v+2j_1, v+2j_2} = i (a_{v+2j_1-1, v+2j_2-1} + i a_{v+2j_1-1, v+2j_2}) & \text{resp.: } \frac{\mu(\mu-1)}{2} \end{cases}$$

unabhängige Bedingungen.

Wir erkennen aus dem Vorangehenden, dass wir ausser den gegebenen Q nur R ohne additive Glieder erhalten und zwar genau die Rotationen (21) auf pag. 131. Es ergibt sich demnach für σ ganz dieselbe Zahl wie dort:

$$\sigma = \frac{n(n-1)}{2} - (v+\mu)(n-v-\mu) + \frac{\mu(\mu+1)}{2}.$$

Wir erhalten nur dann Untergruppen der verlangten Art, wenn $\sigma \geq \tau$ oder:

$$\frac{n(n-1)}{2} - (v+\mu) \cdot (n-v-\mu) + \frac{\mu(\mu+1)}{2} \geq \frac{n(n-1)}{2} + 1 - n + v + \mu$$

oder:

$$(39) \quad (v+\mu-1)(n-v-\mu) \leq \frac{\mu(\mu+1)}{2} - 1.$$

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle:

I. $\mu = 0$. Dann muss sein:

$$(v-1)(n-v) \leq -1.$$

Diese Bedingung wird nur für $v=0$ erfüllt. Der Fall $v=0$, $\mu=0$ ergäbe aber alle Q und also auch alle R , also sämtliche Transformationen der Gruppe (30).

II. $\mu > 0$. Jedenfalls muss sein:

$$\text{also:} \quad v < n - 2\mu - 1,$$

$$n - v - \mu > \mu + 1.$$

Setzen wir dies in (39) ein, so muss um so mehr sein:

$$(v+\mu-1)(\mu+1) \leq \frac{\mu(\mu+1)}{2} - 1$$

oder:

$$2v(\mu+1) \leq \mu(1-\mu).$$

Hieraus folgt ohne Weiteres, dass es für $\mu > 1$ keine Untergruppen der verlangten Art giebt.

Für $\mu = 1$ folgt $\nu = 0$ und wegen (39) $n > 3$, ferner folgt $\sigma = \tau$. Wir erhalten demnach die folgende $\left(\frac{n(n-1)}{2} + 1\right)$ -gliedrige Untergruppe der Gruppe der Kugel im R_n ($n > 3$):

$$\boxed{\begin{array}{c} Q_1 + iQ_2, \quad Q_\varrho, \quad R_{1,2}, \quad R_{1,\varrho} + iR_{2,\varrho}, \quad R_{\varrho_1,\varrho_2} \\ (\varrho, \varrho_1, \varrho_2 = 3, 4, \dots, n) \end{array}}.$$

Diese Untergruppe lässt $x_1 + ix_2 = 0$ invariant. Diese Ebene M_{n-1} berührt die Null- M_{n-2}^2 .

Die erhaltene Untergruppe ist mit jeder grössten Untergruppe, welche irgend einen Punkt der Kugel invariant lässt, gleichberechtigt. Es wird sich zeigen, dass wir eine solche, gewissermassen allgemeinere, Untergruppe auffinden. Daher betrachten wir die erhaltene Untergruppe nicht als Typus einer grössten Untergruppe.

$$2) \quad \nu + 2\mu = n - 1.$$

a) $\mu = 0$. Wir betrachten also nur die infinitesimale Transformation Q_n als gegeben, während keine infinitesimale Transformation von der folgenden Form vorhanden sein soll:

$$\sum_1^{n-1} a_\lambda Q_\lambda.$$

In Folge dessen erhalten wir in diesem Falle keine Untergruppe mit mehr als $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ Parametern.

In der gesuchten $\left(\frac{n(n-1)}{2} + 1\right)$ -gliedrigen Untergruppe sind nun sicher infinitesimale Transformationen von der folgenden Form vorhanden:

$$T \equiv R_{\lambda_1, \lambda_2} + \sum_1^{n-1} a_\lambda Q_\lambda \quad (\lambda_1, \lambda_2 = 1, \dots, n-1).$$

Es ergibt sich aber:

$$(Q_n, T) = - \sum_1^{n-1} a_\lambda R_{\lambda, n}$$

$$(Q_n, (Q_n, T)) = \sum_1^{n-1} a_\lambda Q_\lambda.$$

Also ist $a_2 = 0$ und es kommen in der gesuchten Untergruppe die folgenden Rotationen vor:

$$R_{\lambda_1, \lambda_2}.$$

Da wir immer $n > 2$ voraussetzen, so kommt also jedenfalls $R_{1,2}$ vor. Vernachlässigen wir ferner den Fall $n = 3$, da wir im R_3 nicht nur viergliedrige, sondern auch eine fünfgliedrige Untergruppe erhalten, so können wir in folgender Weise verfahren:

Es müssen infinitesimale Transformationen von der folgenden Form vorhanden sein:

$$R_{\lambda_1, n} + \sum_1^{n-1} b_\lambda Q_\lambda.$$

Durch Combination dieses Ausdrucks mit

$$R_{\lambda_2, \lambda_1} \quad (\lambda_2, \lambda_3 \geq \lambda_1)$$

erhalten wir jedoch:

$$b_{\lambda_2} Q_{\lambda_2} - b_{\lambda_1} Q_{\lambda_1}.$$

Also muss sein:

$$b_\lambda = 0 \quad (\lambda \geq \lambda_1).$$

Nun ist aber:

$$(Q_n, R_{\lambda_1, n} + b_{\lambda_1} Q_{\lambda_1}) = -Q_{\lambda_1} - b_{\lambda_1} R_{\lambda_1, n},$$

folglich muss sein:

$$b_{\lambda_1} = \pm 1.$$

Wir erhalten demnach die folgende $\left(\frac{n(n-1)}{2} + 1\right)$ -gliedrige Untergruppe ($n > 3$):

$$(40) \quad \boxed{\begin{array}{l} Q_n, \quad Q_2 \pm R_{\lambda_1, n}, \quad R_{\lambda_1, \lambda_2} \\ (\lambda, \lambda_1, \lambda_2 = 1, \dots, n-1) \end{array}}.$$

Diese Untergruppe lässt den Punkt $x_2 = 0$, $x_n = \pm 1$, welcher auf der Kugel $\sum_1^n x_j^2 = 1$ liegt, invariant (vergl. pag. 33 oben).

b) $\mu > 0$. Wir betrachten also in diesem Falle die folgenden infinitesimalen Transformationen als gegeben ($j = 1, \dots, \mu$):

$$Q_{r+2j-1} + i Q_{r+2j}, \quad Q_n, \quad R_{r+2j-1, n} + i R_{r+2j}$$

und

$$(Q_{r+2j_1-1} + i Q_{r+2j_1}, \quad Q_{r+2j_2-1} + i Q_{r+2j_2}),$$

während keine infinitesimalen Transformationen von der Form:

$$\sum_1^r a_\lambda Q_\lambda + \sum_1^\mu a_{r+2j-1} Q_{r+2j-1}$$

vorkommen sollen.

Wir werden zeigen, dass dann auch keine infinitesimalen Transformationen von der folgenden Form vorhanden sein dürfen:

$$T \equiv \left\{ \begin{aligned} & \sum_1^v a_\lambda Q_\lambda + \sum_1^\mu a_{v+2j-1} Q_{v+2j-1} \\ & + \sum_1^\mu \sum_1^\mu a_{v+2j_1-1, v+2j_2-1} R_{v+2j_1-1, v+2j_2-1} \\ & + \sum_1^v \sum_1^\mu a_{\lambda, v+2j_1-1} R_{\lambda, v+2j_1-1} \end{aligned} \right\}.$$

In der That, es ergibt sich:

$$(Q_n, T) = - \sum_1^v a_\lambda R_{\lambda, n} - \sum_1^\mu a_{v+2j-1} R_{v+2j-1, n},$$

$$(Q_n, (Q_n, T)) = \sum_1^v a_\lambda Q_\lambda + \sum_1^\mu a_{v+2j-1} Q_{v+2j-1},$$

folglich muss sein:

$$a_\lambda = 0, \quad a_{v+2j-1} = 0.$$

Ferner ergibt sich in Folge dessen:

$$\begin{aligned} & (Q_{v+2j-1} + i Q_{v+2j}, T) \\ & = 2 \sum_1^\mu a_{v+2j_1-1, v+2j_2-1} Q_{v+2j_1-1} - \sum_1^v a_{\lambda, v+2j-1} Q_\lambda, \end{aligned}$$

folglich muss auch sein:

$$a_{\lambda, v+2j-1} = 0, \quad a_{v+2j_1-1, v+2j_2-1} = 0.$$

Damit haben wir wirklich gezeigt, dass eine Transformation von der Form T nicht vorkommen kann. Es kommen also sicher wenigstens:

$$\vartheta = v + \mu + \frac{\mu(\mu-1)}{2} + v \cdot \mu.$$

unabhängige infinitesimale Transformationen nicht vor, während in den gesuchten grössten Untergruppen höchstens $n-1$ unabhängige nicht vorkommen dürfen. Wir erhalten demnach die Bedingung:

$$v + \mu + \frac{\mu(\mu-1)}{2} + v \cdot \mu \leq n-1$$

oder:

$$(2v + \mu)(\mu + 1) \leq 2(n-1)$$

oder da $v + 2\mu = n-1$:

$$(2v + \mu)(\mu + 1) \leq 2(v + 2\mu)$$

oder:

$$\mu(2v + \mu - 3) \leq 0,$$

also umsomehr:

$$2\nu + \mu - 3 \leq 0$$

oder:

$$2\nu \leq 3 - \mu.$$

Hieraus folgt ohne Weiteres, dass es für $\mu > 3$ keine Untergruppen der verlangten Art giebt.

Es bleiben also nur die folgenden Fälle übrig:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha) \quad \mu = 1, \quad \nu = 0, \quad \vartheta = 1, \quad n = 3, \quad \text{also: } \vartheta = n - 2, \\ \beta) \quad \mu = 1, \quad \nu = 1, \quad \vartheta = 3, \quad n = 4, \quad \text{also: } \vartheta = n - 1, \\ \gamma) \quad \mu = 2, \quad \nu = 0, \quad \vartheta = 3, \quad n = 5, \quad \text{also: } \vartheta = n - 2, \\ \delta) \quad \mu = 2, \quad \nu = 0, \quad \vartheta = 6, \quad n = 7, \quad \text{also: } \vartheta = n - 1. \end{array} \right.$$

In den Fällen $\alpha)$ und $\gamma)$ erhalten wir demnach vermuthlich nicht nur Untergruppen mit $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ Parametern, sondern auch solche mit einem Parameter mehr. In diesen Fällen verzichten wir eher darauf, die Untergruppen mit $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ Parametern zu bestimmen.

$$\alpha) \quad \nu = 0, \quad \mu = 1, \quad \vartheta = 1, \quad n = 3.$$

Es kommen die folgenden infinitesimalen Transformationen vor:

$$Q_1 + iQ_2, \quad Q_3, \quad R_{1,3} + iR_{2,3},$$

während Q_1 nicht vorkommen soll.

Erhalten wir in diesem Falle wirklich eine fünfgliedrige Untergruppe, so muss dieselbe infinitesimale Transformationen von den folgenden Formen enthalten:

$$R_{1,2} + a_{1,2}Q_1, \quad R_{1,3} + a_{1,3}Q_1.$$

Es ergibt sich nun:

$$(Q_3, R_{1,2} + a_{1,2}Q_1) = -a_{1,2}R_{1,3},$$

$$(Q_3, (Q_3, R_{1,2} + a_{1,2}Q_1)) = a_{1,2}Q_1,$$

also:

$$a_{1,2} = 0.$$

Ferner:

$$(Q_3, R_{1,3} + a_{1,3}Q_1) = -Q_1 - a_{1,3}R_{1,3},$$

also:

$$a_{1,3} = \pm 1.$$

Wir erhalten demnach die folgende *fünfgliedrige* Untergruppe der sechsgliedrigen Gruppe der Kugel $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ im R_3 :

$$(41) \quad \boxed{Q_1 + iQ_2, \quad Q_3, \quad R_{1,3} + iR_{2,3}, \quad R_{1,2}, \quad Q_1 \pm R_{1,3}}.$$

Diese Untergruppe lässt die gerade Linie $x_1 + ix_2 = 0, \quad x_3 = \pm 1$, welche auf der Kugel liegt, invariant. Natürlich ist entweder das

positive oder das negative Zeichen zu nehmen. Dem entspricht, dass entweder eine Erzeugende der einen Schaar oder eine der anderen Schaar invariant bleibt.

$$\beta) \quad \nu = 1, \quad \mu = 1, \quad \vartheta = 3, \quad n = 4.$$

$$Q_2 + iQ_3, \quad Q_4, \quad R_{2,4} + iR_{3,4}$$

kommen vor, dagegen keine infinitesimale Transformation von der Form:

$$a_1 Q_1 + a_2 Q_2 + a_{1,2} R_{1,2}.$$

Dann enthält die gesuchte siebengliedrige Untergruppe sicher infinitesimale Transformationen von den folgenden Formen:

$$\begin{cases} R_{1,3} + a_1 Q_1 + a_2 Q_2 + a_{1,2} R_{1,2}, \\ R_{2,3} + b_1 Q_1 + b_2 Q_2 + b_{1,2} R_{1,2}, \\ R_{1,4} + c_1 Q_1 + c_2 Q_2 + c_{1,2} R_{1,2}, \\ R_{2,4} + d_1 Q_1 + d_2 Q_2 + d_{1,2} R_{1,2}. \end{cases}$$

Es ergibt sich nun:

$$(Q_1, R_{1,3} + \dots) = -a_1 R_{1,4} - a_2 R_{2,4},$$

$$(Q_1, (Q_4, R_{1,3} + \dots)) = a_1 Q_1 + a_2 Q_2,$$

also:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0.$$

$$(Q_4, (Q_4, R_{2,3} + \dots)) = b_1 Q_1 + b_2 Q_2,$$

also:

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 0.$$

$$(Q_2 + iQ_3, R_{1,3} + a_{1,2} R_{1,2}) = -a_{1,2} Q_1 - iQ_1,$$

$$(Q_2 + iQ_3, R_{2,3} + b_{1,2} R_{1,2}) = Q_3 - iQ_3 - b_{1,2} Q_1,$$

also:

$$a_{1,2} = -i, \quad b_{1,2} = 0.$$

Es kommen demnach die beiden infinitesimalen Rotationen vor:

$$R_{2,3}, \quad R_{1,2} + iR_{1,3}.$$

Es ergibt sich ferner:

$$(R_{2,3}, R_{1,4} + \dots) = -c_2 Q_3 - c_{1,2} R_{1,3},$$

also:

$$c_2 = 0, \quad c_{1,2} = 0.$$

$$(Q_4, R_{1,4} + c_1 Q_1) = -Q_1 - c_1 Q_{1,4},$$

also:

$$c_1 = \pm 1.$$

$$(Q_2 + iQ_3, R_{2,4} + \dots) = Q_4 - d_1(R_{1,2} + iR_{1,3}) - id_2 R_{2,3} - d_{1,2} Q_1,$$

also:

$$d_{1,2} = 0.$$

$$(R_{2,3}, R_{2,4} + d_1 Q_1 + d_2 Q_2) = -R_{3,4} - d_2 Q_3,$$

also:

$$d_1 = 0.$$

$$(Q_1, R_{2,4} + d_2 Q_2) = -Q_2 - d_2 R_{2,4},$$

also:

$$d_2 = \pm 1.$$

Wir erhalten demnach nur die folgende *siebengliedrige* Untergruppe der 10-gliedrigen Gruppe der Kugel $\sum_1^4 x_j^2 = 1$ im R_4 :

$$(42) \quad \boxed{Q_2 + i Q_3, Q_4, R_{2,4} + i R_{3,4}, R_{2,3}, R_{1,2} + i R_{1,3}, Q_1 \pm R_{1,4}, Q_2 \pm R_{2,4}}.$$

Diese Untergruppe lässt die gerade Linie $x_1 = 0, x_2 + i x_3 = 0, x_4 = \pm 1$ resp., welche eine Erzeugende der Kugel im R_4 ist, invariant.

$$r) \quad \nu = 0, \quad \mu = 2, \quad \vartheta = 3, \quad n = 5.$$

$$Q_1 + i Q_2, \quad Q_3 + i Q_4, \quad Q_5, \quad R_{1,5} + i R_{2,5}, \quad R_{3,5} + i R_{4,5}, \\ R_{1,3} + i R_{2,3} + i(R_{1,4} + i R_{2,4})$$

kommen vor, dagegen keine infinitesimale Transformation von der Form:

$$a_1 Q_1 + a_3 Q_3 + a_{1,3} R_{1,3}.$$

Dann erhält die gesuchte 12-gliedrige Untergruppe sicher infinitesimale Transformationen von den Formen:

$$R_{1,2} + a_1 Q_1 + a_3 Q_3 + a_{1,3} R_{1,3}; \quad R_{3,4} + b_1 Q_1 + b_3 Q_3 + b_{1,3} R_{1,3}.$$

Es ergibt sich:

$$(Q_5, (Q_5, R_{1,2} + \dots)) = a_1 Q_1 + a_3 Q_3,$$

also:

$$a_1 = 0, \quad a_3 = 0.$$

$$(Q_5, (Q_5, R_{3,4} + \dots)) = b_1 Q_1 + b_3 Q_3,$$

also:

$$b_1 = 0, \quad b_3 = 0.$$

$$(Q_3 + i Q_4, R_{1,2} + a_{1,3} R_{1,3}) = -a_{1,3} Q_1,$$

$$(Q_1 + i Q_2, R_{3,4} + b_{1,3} R_{1,3}) = b_{1,3} Q_1,$$

also:

$$a_{1,3} = 0, \quad b_{1,3} = 0.$$

Demnach kommen die infinitesimalen Rotationen $R_{1,2}$ und $R_{3,4}$ vor.

Ferner müssen infinitesimale Transformationen von den folgenden Formen vorkommen:

$$R_{1,5} + c_1 Q_1 + c_3 Q_3 + c_{1,3} R_{1,3}; \quad R_{3,5} + d_1 Q_1 + d_3 Q_3 + d_{1,3} R_{1,3}.$$

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}(R_{3,4}, R_{1,5} + \dots) &= -c_3 Q_4 - c_{1,3} R_{1,4}; \\ (R_{1,2}, (R_{3,4}, R_{1,5} + \dots)) &= c_{1,3} R_{2,4},\end{aligned}$$

also:

$$c_3 = 0, \quad c_{1,3} = 0.$$

also:

$$(Q_3, R_{1,5} + c_1 Q_1) = -Q_1 - c_1 R_{1,5},$$

$$c_1 = \pm 1.$$

Analog weist man durch Combination von $R_{3,5} + \dots$ mit $R_{1,2}$ und Q_3 nach, dass:

$$d_1 = 0, \quad d_{1,3} = 0, \quad d_2 = \pm 1,$$

Demnach kommen die folgenden infinitesimalen Transformationen vor:

$$Q_1 \pm R_{1,5}, \quad Q_3 \pm R_{3,5}.$$

Schliesslich müssen infinitesimale Transformationen von den folgenden Formen vorkommen:

$$R_{2,3} + e_1 Q_1 + e_3 Q_3 + e_{1,3} R_{1,3}; \quad R_{1,4} + f_1 Q_1 + f_3 Q_3 + f_{1,3} R_{1,3}.$$

Es ergibt sich:

$$(Q_3, (Q_3, R_{2,3} + \dots)) = e_1 Q_1 + e_3 Q_3,$$

also:

$$e_1 = 0, \quad e_3 = 0.$$

also:

$$(Q_3 + i Q_4, R_{2,3} + e_{1,3} R_{1,3}) = -Q_2 - e_{1,3} Q_1,$$

$$e_{1,3} = -i.$$

Analog weist man durch Combination von $R_{1,4} + \dots$ mit Q_3 und $Q_1 + i Q_2$ nach, dass:

$$f_1 = 0, \quad f_3 = 0, \quad f_{1,3} = -i.$$

Demnach kommen die folgenden infinitesimalen Transformationen vor:

$$R_{1,3} + i R_{2,3}, \quad R_{1,3} + i R_{1,4}$$

und folglich auch:

$$R_{1,4} + i R_{1,3}.$$

Wir erhalten in Folge dessen die folgende 12-gliedrige Untergruppe der 15-gliedrigen Gruppe der Kugel $\sum_{j=1}^5 x_j^2 = 1$ im R_5 :

$$(43) \quad \boxed{Q_1 + i Q_2, \quad Q_3 + i Q_4, \quad Q_5, \quad R_{1,5} + i R_{2,5}, \quad R_{3,5} + i R_{4,5}, \quad R_{1,3} + i R_{2,3}, \quad R_{1,4} + i R_{2,4}, \quad R_{1,2} + i R_{1,4}, \quad R_{1,2}, \quad R_{3,4}, \quad Q_1 \pm R_{1,5}, \quad Q_3 \pm R_{3,5}.}$$

Diese Untergruppe lässt die ebene M_2 :

$$x_1 + ix_2 = 0, \quad x_3 + ix_4 = 0, \quad x_5 = \pm 1$$

resp., welche eine Erzeugende (grösste ebene Mannigfaltigkeit) der Kugel im R_5 ist, invariant.

$$\delta) \quad \nu = 0, \quad \mu = 3, \quad \vartheta = 6, \quad n = 7.$$

$$Q_1 + iQ_2, \quad Q_3 + iQ_4, \quad Q_5 + iQ_6, \quad Q_7, \quad R_{1,7} + iR_{2,7}, \quad R_{3,7} + iR_{4,7}, \quad R_{5,7} + iR_{6,7}, \\ R_{1,3} + iR_{2,3} + i(R_{1,4} + iR_{2,4}), \quad R_{1,5} + iR_{2,5} + i(R_{1,6} + iR_{2,6}), \\ R_{3,5} + iR_{4,5} + i(R_{3,6} + iR_{4,6})$$

kommen vor, dagegen keine infinitesimale Transformation von der Form:

$$T \equiv a_1 Q_1 + a_3 Q_3 + a_5 Q_5 + a_{1,3} R_{1,3} + a_{1,5} R_{1,5} + a_{3,5} R_{3,5}.$$

Dann enthält die gesuchte 22-gliedrige Untergruppe sicher infinitesimale Transformationen von den folgenden Formen:

$$R_{1,2} + T, \quad R_{1,7} + T, \quad R_{2,3} + T.$$

Es ergibt sich nun:

$$(Q_7, (Q_7, R_{1,2} + T)) = a_1 Q_1 + a_3 Q_3 + a_5 Q_5,$$

also:

$$a_1 = 0, \quad a_3 = 0, \quad a_5 = 0,$$

folglich:

$$(Q_3 + iQ_4, R_{1,2} + T) = -a_{1,3} Q_1 + a_{3,5} Q_5,$$

also:

$$a_{1,3} = 0, \quad a_{3,5} = 0,$$

folglich:

$$(Q_5 + iQ_6, R_{1,2} + T) = -a_{1,5} Q_1,$$

also:

$$a_{1,5} = 0.$$

Demnach kommt $R_{1,2}$ vor. Analog zeigt man, dass auch $R_{3,4}$ und $R_{5,6}$ vorkommen.

Ferner ergibt sich:

$$(R_{3,4}, R_{1,7} + T) = -a_3 Q_4 - a_{1,3} R_{1,4} - a_{3,5} R_{3,5},$$

$$(R_{1,2}, (R_{3,4}, R_{1,7} + T)) = a_{1,3} R_{2,4},$$

$$(R_{5,6}, (R_{3,4}, R_{1,7} + T)) = a_{3,5} R_{4,6},$$

also:

$$a_{1,3} = 0, \quad a_{3,5} = 0, \quad a_3 = 0;$$

folglich:

$$(R_{5,6}, R_{1,7} + T) = -a_5 Q_6 - a_{1,5} R_{1,6},$$

$$(R_{1,2}, (R_{5,6}, R_{1,7} + T)) = a_{1,5} R_{2,6},$$

also:

$$a_{1,5} = 0, \quad a_5 = 0;$$

folglich:

$$(Q_7, R_{1,7} + T) = -Q_1 - a_1 R_{1,7},$$

also:

$$a_1 = \pm 1.$$

Demnach kommt $Q_1 \pm R_{1,7}$ vor. Analog zeigt man, dass auch $Q_3 \pm R_{3,7}$, $Q_5 \pm R_{5,7}$ vorkommen.

Ferner ergibt sich:

$$(Q_7, (Q_7, R_{2,3} + T)) = a_1 Q_1 + a_3 Q_3 + a_5 Q_5,$$

also:

$$a_1 = 0, \quad a_3 = 0, \quad a_5 = 0;$$

folglich:

$$(Q_5 + i Q_6, R_{2,3} + T) = -a_{1,5} Q_1 - a_{3,5} Q_3,$$

also:

$$a_{1,5} = 0, \quad a_{3,5} = 0;$$

folglich:

$$(Q_3 + i Q_4, R_{2,3} + T) = -Q_2 - a_{1,3} Q_1,$$

also:

$$a_{1,3} = -i.$$

Demnach kommt $R_{1,3} + i R_{2,3}$ vor. In analoger Weise findet man die übrigen infinitesimalen Transformationen der gesuchten Untergruppe.

Wir erhalten schliesslich die folgende 22-gliedrige Untergruppe

der 28-gliedrigen Gruppe der Kugel $\sum_1^7 x_j^2 = 1$ im R_7 :

(44)

$$\begin{aligned} & Q_1 + i Q_2, \quad Q_3 + i Q_4, \quad Q_5 + i Q_6, \quad Q_7, \quad R_{1,7} + i R_{2,7}, \quad R_{3,7} + i R_{4,7}, \quad R_{5,7} + i R_{6,7}, \\ & R_{1,3} + i R_{1,4}, \quad R_{2,3} + i R_{2,4}, \quad R_{1,3} + i R_{2,3}, \quad R_{1,5} + i R_{1,6}, \quad R_{2,5} + i R_{2,6}, \quad R_{1,5} + i R_{2,5}, \\ & R_{3,5} + i R_{3,6}, \quad R_{1,5} + i R_{3,6}, \quad R_{3,5} + i R_{1,5}, \quad R_{1,2}, \quad R_{3,4}, \quad R_{5,6}, \quad Q_1 \pm R_{1,7}, \quad Q_3 \pm R_{3,7}, \\ & Q_5 \pm R_{5,7}. \end{aligned}$$

Diese Untergruppe lässt die ebene M_3 :

$x_1 + i x_2 = 0, \quad x_3 + i x_4 = 0, \quad x_5 + i x_6 = 0, \quad x_7 = \pm 1$ resp., welche eine Erzeugende (grösste ebene Mannigfaltigkeit) der Kugel im R_7 ist, invariant.

$$3) \quad \nu + 2\mu = n.$$

Von den infinitesimalen Transformationen $\sum_1^n a_i Q_i$ kommen also nur die folgenden unabhängigen vor:

$$Q_{\nu+2j-1} + i Q_{\nu+2j} \quad (j = 1, \dots, \mu).$$

Die Anzahl der unabhängigen infinitesimalen Rotationen, die vorkommen können, ist nach dem Früheren (pag. 19):

$$\sigma = \frac{n(n-1)}{2} - (\nu + \mu)(n - \nu - \mu) + \frac{\mu(\mu+1)}{2}.$$

Anderseits müssen:

$$\tau = \frac{n(n-1)}{2} - (n-1)$$

unabhängige infinitesimale Rotationen in den gesuchten $\left(\frac{n(n-1)}{2} + 1\right)$ -gliedrigen Untergruppen vorkommen (vergl. den pag. 21 angeführten Satz).

Wir erhalten nur dann Untergruppen der verlangten Art, wenn $\sigma \geq \tau$, also wenn:

$$\frac{n(n-1)}{2} - (v+\mu)(n-v-\mu) + \frac{\mu(\mu+1)}{2} \geq \frac{n(n-1)}{2} + 1 - n$$

oder:

$$\mu(\mu+1) - 2(v+\mu)(n-v-\mu) \geq 2(1-n)$$

oder da:

$$n = v + 2\mu:$$

$$\mu(\mu+1) - 2\mu(v+\mu) \geq 2 - 2v - 4\mu$$

oder:

$$\frac{\mu}{2}(5-\mu) + v(1-\mu) \geq 1.$$

Hieraus folgt ohne Weiteres, dass wir für $\mu > 4$ keine Untergruppen der verlangten Art erhalten. Es bleiben, wie man leicht verificiren kann, nur die folgenden Fälle übrig:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{I. } \mu = 1, \quad v \text{ beliebig, } n \text{ beliebig,} \\ \text{II. } \mu = 2, \quad v = 0, \quad n = 4, \\ \text{III. } \mu = 2, \quad v = 1, \quad n = 5, \\ \text{IV. } \mu = 2, \quad v = 2, \quad n = 6, \\ \text{V. } \mu = 3, \quad v = 0, \quad n = 6, \\ \text{VI. } \mu = 3, \quad v = 1, \quad n = 7, \\ \text{VII. } \mu = 4, \quad v = 0, \quad n = 8. \end{array} \right.$$

Die Fälle IV, V und VII können wir ohne Weiteres ausschliessen, denn bekämen wir in diesen Fällen Untergruppen der verlangten Art, die mit den bereits bekannten nicht gleichberechtigt wären, so müssten wir auch besondere Untergruppen der allgemeinen conformen Gruppe des R_5 und R_7 erhalten haben.

I. $\mu = 1, v$ beliebig, n beliebig.

$Q_{n-1} + iQ_n$ ist allein bekannt, dagegen darf keine infinitesimale Transformation von der folgenden Form vorkommen:

$$T \equiv a_1 Q_1 + a_2 Q_2 + \dots + a_{n-1} Q_{n-1}.$$

Daher erhalten wir keine Untergruppe mit mehr als $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ Parametern. In Folge dessen können wir $n > 3$ voraussetzen.

Dann müsste sicher eine infinitesimale Transformation von der folgenden Form vorkommen:

$$R_{\lambda, n-1} + T \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n-2).$$

Nun ergibt sich:

$$\begin{aligned} & (Q_{n-1} + i Q_n, R_{\lambda, n-1} + T) \\ = & \left\{ \begin{array}{l} -Q_2 - a_1(R_{1, n-1} + i R_{1, n}) - \dots - a_{n-2}(R_{n-2, n-1} + i R_{n-2, n}) \\ -i a_{n-1} R_{n-1, n} \end{array} \right\} \\ (Q_{n-1} + i Q_n, (Q_{n-1} + i Q_n, R_{\lambda, n-1} + T)) = & \left\{ \begin{array}{l} R_{\lambda, n-1} + i R_{\lambda, n} \\ -i a_{n-1}(Q_n - i Q_{n-1}) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Demnach müssten die infinitesimalen Rotationen:

$$R_{\lambda, n-1} + i R_{\lambda, n} \quad (\lambda = 1, \dots, n-2)$$

vorkommen. Dann müssten aber, der ersten der obigen Relationen zufolge, auch infinitesimale Transformationen von der folgenden Form vorkommen:

$$Q_2 + b_2 R_{n-1, n} \quad (\lambda = 1, \dots, n-2).$$

Aus zwei solchen Transformationen kann man jedoch eine von der folgenden Form herleiten:

$$c_{\lambda_1} Q_{\lambda_1} + c_{\lambda_2} Q_{\lambda_2} \quad (\lambda_1, \lambda_2 = 1, \dots, n-2).$$

Eine solche infinitesimale Transformation kommt aber nach Voraussetzung nicht vor. Demnach erhalten wir in diesem Falle keine Untergruppe der verlangten Art.

$$\text{II. } \mu = 2, \quad \nu = 0, \quad n = 4.$$

$$Q_1 + i Q_2, \quad Q_3 + i R_4, \quad R_{1,3} + i R_{2,3} + i(R_{1,4} + i R_{2,4})$$

kommen vor, dagegen keine infinitesimale Transformation von der Form:

$$a_1 Q_1 + a_3 Q_3.$$

In der gesuchten 7-gliedrigen Untergruppe kommt sicher eine infinitesimale Transformation von der folgenden Form vor:

$$T \equiv a_{1,2} R_{1,2} + a_{1,3} R_{1,3} + a_1 Q_1 + a_3 Q_3.$$

Nun ergibt sich:

$$\begin{aligned} (Q_1 + i Q_2, T) &= \left\{ \begin{array}{l} a_{1,2}(Q_2 - i Q_1) + a_{1,3} Q_3 - i a_{1,2} R_{1,2} \\ + a_3(R_{1,3} + i R_{2,3}), \end{array} \right\} \\ (Q_3 + i Q_4, T) &= -a_{1,3} Q_1 - a_1(R_{1,3} + i R_{1,4}) - i a_3 R_{3,4}, \\ (Q_1 + i Q_2, (Q_3 + i Q_4, T)) &= a_{1,3} R_{1,2} - a_1(Q_3 + i Q_4), \\ (Q_1 + i Q_2, (Q_1 + i Q_2, T)) &= a_{1,2}(R_{1,2} + i R_{2,3}) - i a_1(Q_2 - i Q_1), \\ (Q_3 + i Q_4, (Q_1 + i Q_2, T)) &= \left\{ \begin{array}{l} a_{1,2}(Q_3 + i Q_4, Q_2 - i Q_1) - i a_{1,3} R_{3,4} \\ - a_3(Q_1 + i Q_2). \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Nehmen wir $a_{1,3} \geq 0$ an, so folgt hieraus, dass:

$$R_{3,4}, R_{1,3} + iR_{2,3}, R_{1,4} + iR_{2,4}, R_{1,2}$$

und in Folge dessen auch Q_3 vorkommen müssten; Q_3 kommt aber nach Voraussetzung nicht vor, also ist $a_{1,3} = 0$.

Demnach muss eine infinitesimale Transformation von der Form:

$$T_1 \equiv R_{1,2} + a_1 Q_1 + a_3 Q_3$$

vorkommen und ganz analog zeigt man, dass auch eine von der Form:

$$T_2 \equiv R_{3,4} + b_1 Q_1 + b_3 Q_3$$

vorkommen muss. Es ergibt sich:

$$(T_1, T_2) = -b_1 Q_2 + a_3 Q_4 + (a_1 b_3 - a_3 b_1) R_{1,3}.$$

Combiniren wir nun (T_1, T_2) ganz auf dieselbe Weise mit $Q_1 + iQ_2$ und $Q_3 + iQ_4$ wie oben T , so erkennen wir, dass analog sein muss

$$a_1 b_3 - a_3 b_1 = 0.$$

Dann wäre

$$(T_1, T_2) = -b_1 Q_2 + a_3 Q_4,$$

also ist auch:

$$b_1 = 0, \quad a_3 = 0.$$

Folglich muss auch $a_1 = 0$ und $b_3 = 0$ sein, denn es ergibt sich:

$$(Q_1 + iQ_2, R_{1,2} + a_1 Q_1) = Q_2 - iQ_1 - ia_1 R_{1,2},$$

$$(Q_3 + iQ_4, R_{3,4} + b_3 Q_3) = Q_4 - iQ_3 - ib_3 R_{3,4}.$$

Demnach kennen wir von der gesuchten 7-gliedrigen Untergruppe die infinitesimalen Transformationen:

$$Q_1 + iQ_2, Q_3 + iQ_4, R_{1,2}, R_{3,4}, R_{1,3} + iR_{2,3} + i(R_{1,4} + iR_{2,4}).$$

Ferner muss eine infinitesimale Transformation von der folgenden Form vorkommen:

$$T \equiv a_{1,3} R_{1,3} + a_{2,3} R_{2,3} + a_1 Q_1 + a_3 Q_3.$$

Es ergibt sich:

$$(R_{1,3}, (R_{1,2}, T)) = -a_{1,3} R_{1,3} - a_{2,3} R_{2,3} - a_1 Q_1,$$

$$(R_{3,4}, (R_{3,4}, T)) = -a_{1,3} R_{1,3} - a_{2,3} R_{2,3} - a_3 Q_3,$$

also:

$$a_1 = 0, \quad a_3 = 0.$$

$$(Q_1 + iQ_2, a_{1,3} R_{1,3} + a_{2,3} R_{2,3}) = a_{1,3} Q_3 + ia_{2,3} Q_3,$$

also:

$$a_{1,3} + ia_{2,3} = 0.$$

Demnach kommt $R_{1,3} + iR_{2,3}$ und folglich auch $R_{1,4} + iR_{2,4}$ vor.

Analog zeigt man, dass auch $R_{1,3} + iR_{1,4}$ und $R_{2,3} + iR_{2,4}$ vorkommen.

Wir erhalten in Folge dessen die folgende 7-gliedrige Untergruppe der 10-gliedrigen Gruppe der Kugel $\sum_1^4 x_j^2 = 1$ im R_4 :

$$Q_1 + iQ_2, Q_3 + iQ_4, R_{1,2}, R_{3,4}, R_{1,3} + iR_{2,3}, R_{1,4} + iR_{2,4}, R_{1,3} + iR_{1,4}.$$

Diese Untergruppe lässt die ebene M_2 :

$$x_1 + ix = 0, x_3 + ix_4 = 0$$

invariant. Diese M_2 hat mit der Null- M_2^2 eine Gerade gemein. Die erhaltene Untergruppe ist eine mit der Untergruppe (42) gleichberechtigte und nicht als ein neuer Typus zu betrachten.

$$\text{III. } \mu = 2, \nu = 1, n = 5.$$

$$Q_2 + iQ_3, Q_4 + iQ_5, R_{2,4} + iR_{3,4} + i(R_{2,5} + iR_{3,5})$$

kommen vor, dagegen keine infinitesimale Transformation von der Form:

$$a_1 Q_1 + a_2 Q_2 + a_4 Q_4.$$

In der gesuchten 12-gliedrigen Untergruppe muss eine infinitesimale Transformation von der folgenden Form vorhanden sein:

$$T_1 \equiv a_{2,3} R_{2,3} + a_{1,2} R_{1,2} + a_{1,4} R_{1,4} + a_{2,4} R_{2,4}.$$

Es ergibt sich:

$$(Q_4 + iQ_5, T_1) = -a_{1,4} Q_1 - a_{2,4} Q_2,$$

also:

$$a_{1,4} = 0, a_{2,4} = 0.$$

$$(Q_2 + iQ_3, a_{2,3} R_{2,3} + a_{1,2} R_{1,2}) = a_{2,3} (Q_3 - iQ_2) - a_{1,2} Q_1,$$

also:

$$a_{1,2} = 0.$$

Folglich kommt $R_{2,3}$ vor; analog zeigt man, dass auch $R_{4,5}$ vorkommt.

Ferner muss eine Transformation von der folgenden Form vorkommen:

$$T_2 \equiv b_{1,2} R_{1,2} + b_{1,4} R_{1,4} + b_{2,4} R_{2,4} + b_4 Q_4.$$

Es ergibt sich:

$$(R_{2,3}, T_2) = -b_{1,2} R_{1,3} - b_{2,4} R_{3,4},$$

$$(Q_2 + iQ_3, (R_{2,3}, T_2)) = ib_{1,2} Q_1 - ib_{2,4} Q_4,$$

also:

$$b_{1,2} = 0, b_{2,4} = 0.$$

$$(Q_4 + iQ_5, b_{1,4}R_{1,4} + b_4Q_4) = -b_{1,4}Q_1 - ib_4R_{4,5},$$

also:

$$b_{1,4} = 0.$$

Demnach müsste Q_4 vorkommen, was der Voraussetzung widerspricht. Wir erhalten daher in diesem Falle keine Untergruppe der verlangten Art.

$$\text{IV. } \mu = 3, \nu = 1, n = 7.$$

$$Q_2 + iQ_3, Q_4 + iQ_5, Q_6 + iQ_7$$

kommen vor, dagegen keine infinitesimalen Transformationen von der Form:

$$a_1Q_1 + a_2Q_2 + a_4Q_4 + a_6Q_6.$$

In der gesuchten 22-gliedrigen Untergruppe muss eine infinitesimale Transformation von der folgenden Form vorhanden sein:

$$T_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} a_{2,3}R_{2,3} + a_{1,2}R_{1,2} + a_{1,4}R_{1,4} + a_{1,6}R_{1,6} + a_{2,4}R_{2,4} + a_{2,6}R_{2,6} \\ + a_{4,6}R_{4,6}. \end{array} \right\}$$

Es ergibt sich:

$$(Q_4 + iQ_5, T_1) = -a_{1,4}Q_1 - a_{2,4}Q_2 + a_{4,6}Q_6,$$

also:

$$a_{1,4} = 0, \quad a_{2,4} = 0, \quad a_{4,6} = 0;$$

folglich:

$$(Q_6 + iQ_7, T_1) = -a_{1,6}Q_1 - a_{2,6}Q_2,$$

also:

$$a_{1,6} = 0, \quad a_{2,6} = 0.$$

folglich:

$$(Q_2 + iQ_3, T_1) = a_{2,3}(Q_3 - iQ_2) - a_{1,2}Q_1,$$

also:

$$a_{1,2} = 0.$$

Demnach kommt $R_{2,3}$ vor; analog auch $R_{4,5}$ und $R_{6,7}$.

Ferner muss eine infinitesimale Transformation von der folgenden Form vorhanden sein:

$$T_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} b_{1,2}R_{1,2} + b_{1,4}R_{1,4} + b_{1,6}R_{1,6} + b_{2,4}R_{2,4} + b_{2,6}R_{2,6} + b_{4,6}R_{4,6} \\ + b_6Q_6. \end{array} \right\}$$

Es ergibt sich jedoch:

$$(R_{2,3}, T_2) = -b_{1,2}R_{1,2} - b_{2,4}R_{3,4} - b_{2,6}R_{3,6},$$

$$(Q_2 + iQ_3, (R_{2,3}, T_2)) = ib_{1,2}Q_1 - ib_{2,4}Q_4 - ib_{2,6}Q_6,$$

also:

$$b_{1,2} = 0, \quad b_{2,4} = 0, \quad b_{2,6} = 0;$$

folglich:

$$(R_{4,5}, T_2) = -b_{1,4}R_{1,5} - b_{4,6}R_{3,6},$$

$$(Q_4 + iQ_5, (R_{4,5}, T_2)) = ib_{1,4}Q_1 - ib_{4,6}Q_6,$$

also:

$$b_{1,4} = 0, \quad b_{4,6} = 0;$$

folglich:

$$(Q_6 + iQ_7, T_2) = -b_{1,6}Q_1 - ib_{6,7}R_{6,7},$$

also:

$$b_{1,6} = 0.$$

Demnach müsste Q_6 vorkommen, was der Voraussetzung widerspricht. Wir erhalten daher auch in diesem Falle keine Untergruppe der verlangten Art.

Damit haben wir die Bestimmung der grössten Untergruppen der Gruppe (30) vollständig und streng durchgeführt.

Wir haben nur noch zu zeigen, dass die früher erfolgte Aufstellung der grössten Untergruppen der allgemeinen conformen Gruppe richtig ist (vergl. pag. 26 u. 27). Zu diesem Zwecke brauchen wir nur die Formeln (31) auf die Untergruppe (40–44) der Gruppe (30) anzuwenden. Man überzeugt sich leicht, dass der grössten Untergruppe, welche einen Punkt der Kugel invariant lässt, die Gruppe aller Aehnlichkeitstransformationen entspricht. Ebenso entsprechen sich die gefundenen 5-, 7-, 12- und 22-gliedrigen Untergruppen der Gruppe der Kugel und der conformen Gruppe. Jede der Formeln (40–44) giebt eigentlich zwei Typen von Untergruppen, jenachdem man entweder das positive oder das negative Zeichen wählt. Durch Anwendung der Formeln (31) zeigt sich jedoch, dass der Vertauschung des positiven mit dem negativen Zeichen, die Vertauschung der Translationen P_i mit den Circulationen C_i in der allgemeinen conformen Gruppe entspricht. Demnach brauchen wir nur das eine Zeichen zu berücksichtigen.

Wir erhalten als Endresultat unserer Untersuchung das folgende

Theorem: Die continuirliche projective Gruppe einer Fläche zweiten Grades mit nicht verschwindender Determinante im n -fach ausgedehnten Raume besitzt, wenn $n = 4$ oder $n > 5$ vorausgesetzt wird, keine continuirliche Untergruppe mit mehr als $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ Parametern. Und zwar ist jede grösste Untergruppe dadurch charakterisirt, dass sie einen bestimmten Punkt der F_2 invariant lässt. Nur für $n = 4$ und $n = 7$ erhalten wir noch einen zweiten Typus von grössten Untergruppen, welche dadurch charakterisirt sind, dass bei ihnen eine grösste ebene Mannigfaltigkeit der F_2 invariant bleibt.

Für $n = 3$ und $n = 5$ erhalten wir dagegen Untergruppen mit einem Parameter mehr und diese Untergruppen sind wieder dadurch charakterisirt, dass bei ihnen eine grösste ebene Mannigfaltigkeit der F_2 invariant bleibt.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, dass Lie die grössten Untergruppen der projectiven Gruppe einer Fläche zweiten Grades im R_3 , R_4 und R_5 , wie auch die grössten Untergruppen der conformen Gruppe im R_2 , R_3 und R_4 schon früher, allerdings auf andere Weise, bestimmt hat (vergl. Abhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania 1885).

Leipzig, im Januar 1889.