

**2. Über die prinzipielle  
Bestimmbarkeit der berechtigten Bezugssysteme  
beliebiger Relativitätstheorien (I);  
von Erich Kretschmann.**

---

Inhalt.

Einleitung. Zweck und Thema der Arbeit. Literatur.

Ausführung:

- A. Der Beitrag der Beobachtungen zur Bestimmung eines räumlich-zeitlichen Bezugssystems (§§ 1—15).
  - I. Der topologische Charakter der reinen Beobachtungstatsachen (§§ 1—4).
  - II. Das Bezugssystem als Zahlenmannigfaltigkeit und die Abbildungspostulate (§§ 5—6).
  - III. Die Unmöglichkeit, räumlich-zeitliche Maßbeziehungen allein aus Beobachtungen und Abbildungspostulaten abzuleiten (§§ 7 bis 15).
- B. Die begriffliche Bestimmung der „berechtigten“ Bezugssysteme durch die physikalische Theorie (§§ 16—22).
  - I. Gesetz, Konvention und willkürliche Festsetzung (§§ 16—17).
  - II. Die algebraische Definition der berechtigten Bezugssysteme (§§ 18—21).
  - III. Die geometrischen Eigenschaften der berechtigten Bezugssysteme (§ 22).
- C. Die Bedingungen der prinzipiellen Bestimmbarkeit eines berechtigten Bezugssystems in der Wirklichkeit (§§ 23—50).
  - I. Die willkürlichen Festsetzungen (§ 23).
  - II. Die Geschlossenheit des physikalischen Gleichungssystems (§§ 24 bis 27).
  - III. Die Existenz und Erkennbarkeit der Bestimmungsmittel in der Wirklichkeit (§§ 28—36).
    - a) Die Idealinstrumente (§ 28).
    - β) Die wirkliche Existenz der Idealinstrumente (§§ 29—32).
    - γ) Die Erkennbarkeit der Idealinstrumente in der Wirklichkeit (§§ 33—35).
    - δ) Eine weitere Frage (§ 36).
  - IV. Die Endlichkeit der zur Bestimmung notwendigen Messungsreihen (§§ 37—50).
    - a) Einteilung der Idealinstrumente der Raum- und Zeitmessung (§ 38).

- β) Relativitätstheorien mit endlichen Transformationsgruppen (§§ 39—49).
    - 1. Unzulänglichkeit der Nullinstrumente.
      - a) Allgemeiner Beweis (§ 40).
      - b) Zwei Beispiele (§§ 41—42).
    - 2. Brauchbar sind allein die Skaleninstrumente für absolute Punktinvarianten (§§ 43—48).
    - 3. Ideale und wirkliche Skaleninstrumente (§ 49).
  - γ) Relativitätstheorien mit unendlichen Gruppen berechtigter Transformationen (§ 50).
- D. Anwendungen (§§ 51—64).
- I. Relativitätstheorien mit endlichen Gruppen berechtigter Transformationen (§§ 51—62).
    - a) Die Absoluttheorie (§§ 51—52).
    - β) Die Galilei-Hertzsche Relativitätstheorie (§ 53).
    - γ) Kennzeichen und Existenz der bisher genannten Idealinstrumente in der Wirklichkeit (§§ 54—57).
    - δ) Das Licht als Meßinstrument und die Lorentz-Einsteinsche Relativitätstheorie (§§ 58—61).
    - ε) Die willkürlichen Festsetzungen (§ 62).
  - II. Relativitätstheorien mit unendlichen Gruppen berechtigter Transformationen (§§ 63—64).
    - a) Die Mach-Reissnersche Relativitätstheorie (§ 63).
    - β) Die neue Einsteinsche Relativitätstheorie (§ 64).
- Schluß: Ergebnisse und Ausblick.

### Einleitung.

Die Frage, welche Raum-Zeitgrößen in die physikalischen Naturgesetze wesentlich eingehen können, ist seit einigen Jahren in lebhaften Fluß geraten. Während von Galileis und Newtons Begründung der klassischen Mechanik bis zur Hertzschen Einführung des Relativitätsprinzips der Geschwindigkeit in die Elektrodynamik die Begriffe von Raum und Zeit zwar tiefgehende philosophische Umdeutungen (Kant und die nichteuklidischen Geometrien) erfuhren, ihre physikalische Bedeutung und Anwendung dagegen gesichert festzustehen schienen, sind neuerdings gerade hierin durchgreifende Änderungen erstrebt worden.

Ein großer Teil dieser durch die bekannten Unstimmigkeiten zwischen der modernen Elektrodynamik und Elektronentheorie und der klassischen Mechanik ausgelösten Bestrebungen ist dabei auf eine immer weiter gehende Relativierung räumlich zeitlicher Begriffe und ihre Ausschaltung

aus den Grundgesetzen der Physik gerichtet. In dieser Richtung bewegen sich vor allem die Arbeiten von A. Einstein. Nachdem in Hrn. Einsteins ursprünglicher Relativitätstheorie<sup>1)</sup> im Anschluß an die Lorentz'sche Einführung der Ortszeit der Begriff der Gleichzeitigkeit und damit, wie H. Minkowski<sup>2)</sup> erkannt und hervorgehoben hat, der Begriff des absoluten Raumes eliminiert war, hat Hr. Einstein<sup>3)</sup> später in seinen gravitationstheoretischen Arbeiten seine ursprüngliche Relativitätstheorie immer mehr erweitert und auch den Begriffen der Beschleunigung und Dilatation im weitesten Umfang<sup>4)</sup> absolute physikalische Bedeutung abgesprochen. Auf anderem Wege ist eine Relativierung der Begriffe der translatorischen Beschleunigungen in neuester Zeit von H. Reissner<sup>5)</sup> in Ausführung des Mach'schen<sup>6)</sup> Gedankens über die Relativität der Trägheit angebahnt worden.

Diesen Bestrebungen gerade entgegengerichtet ist der Versuch von Abraham<sup>7)</sup>, die absolute Geschwindigkeit, die auch in der Lorentz'schen Auffassung der Elektronentheorie als Geschwindigkeit gegen den absolut ruhenden Äther auftritt, in die Physik einzuführen.

Teils als direkte Folge der verlangten Änderungen der Kovarianzeigenschaften des Gesamtsystems physikalischer Gesetze bezüglich Raum-Zeittransformationen, teils nur indirekt oder gar nicht mit ihnen zusammenhängend, sind neuerdings Neuaufstellungen und Änderungen auch einzelner fundamentaler räumlich-zeitlicher Gesetze der Physik in Vorschlag gebracht worden, die, wenn anerkannt, nicht ohne tiefgehenden Einfluß auf die Theorie der Raum- und Zeitmessung bleiben

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17. p. 891. 1905.

2) H. Minkowski, „Raum und Zeit“. Leipzig, B. G. Teubner, 1909.

3) A. Einstein, Ann. d. Phys. 85. p. 898. 1911; 88. p. 355 und 433. 1912. Physik. Zeitschr. 14. p. 1249. 1913; 15. p. 176. 1914. A. Einstein und M. Großmann, „Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie usw.“. Leipzig, B. G. Teubner, 1913.

4) Wie weit? Vgl. A. Einstein und M. Großmann, Zeitschr. f. Mathem. u. Phys. 63. p. 215. 1914.

5) H. Reissner, Physik. Zeitschr. 15. p. 371. 1914; 16. p. 179. 1915.

6) E. Mach, „Die Mechanik in ihrer Entwicklung“, p. 213ff. 1883.

7) M. Abraham, Ann. d. Phys. 38. p. 1056. 1912. „Neuere Gravitationstheorien“, p. 488. Leipzig, S. Hirzel, 1915. Sonderdruck aus: Jahrb. d. Radioakt. u. Elektronik 11. Heft 4. Febr. 1915.

könnten. Nach Einstein, Abraham und Ishivara<sup>1)</sup> ist die Lichtgeschwindigkeit, nach Nordström<sup>2)</sup> zwar nicht diese, aber der Gang beliebiger Uhren und die Länge beliebiger Maßstäbe vom Schwerepotential abhängig. Harnack<sup>3)</sup> denkt sich das Licht unter Aufrechterhaltung des alten (linearen) Superpositionsprinzips der Geschwindigkeiten mit der bewegten Lichtquelle mitgeführt. A. Byk<sup>4)</sup> setzt im Inneren der materiellen Atome eine andere — nicht-euklidische — Geometrie als im Außenraum voraus usf.

Bei diesen vielen einander widersprechenden Auffassungen und Theorien, die sich zum Teil mehr auf formale und methodologische Prinzipien als auf Erfahrungstatsachen stützen, dürfte zur Klärung von theoretischer Seite her besonders eine allgemein, d. h. unabhängig von der Annahme einer bestimmten Relativitätstheorie<sup>5)</sup> geführte Untersuchung über die physikalische Bedeutung der Raum- und Zeitkoordinaten nützlich sein. Hierunter ist einerseits der denkökonomische und praktische Nutzen der Einführung eines räumlich-zeitlichen Bezugssystems für die Erfassung und Ausmessung der physikalischen Erfahrungswelt — und dies dürfte schließlich das Entscheidende sein —, andererseits aber und zunächst einfach die tatsächliche Stellung der Raum- und Zeitkoordinaten im System der theoretischen und praktischen Physik zu verstehen. Diese ist gegeben durch die Gesamtheit der tatsächlichen Beziehungen zwischen dem Bezugssysteme und den

1) A. Einstein, l. c.; M. Abraham, *Physik. Zeitschr.* **13**, p. 793. 1912. J. Ishivara, *Physik. Zeitschr.* **13**, p. 1189. 1913; **15**, p. 294 u. 506. 1914.

2) G. Nordström, *Ann. d. Phys.* **42**, p. 533ff. §§ 4 u. 5. 1913.

3) A. Harnack, *Ann. d. Phys.* **43**, p. 297 u. 298. 1914. Vgl. auch M. La Rosa, *Physik. Zeitschr.* **13**, p. 1129. 1912.

4) A. Byk, *Ann. d. Phys.* **42**, p. 1417. 1913. Vgl. dazu: F. Kottler, *Ann. d. Phys.* p. 481. 1914.

5) Als Relativitätstheorie bezeichne ich hier und im folgenden jedes System von Relativitätspostulaten, d. h. von Sätzen, welche die Kovarianz aller physikalischen Gleichungen gegen bestimmte („berechtigte“) Transformationen der Raum- und Zeitkoordinaten fordern. Hiernach gehört also die sogenannte Absoluttheorie zu den Relativitätstheorien, da auch sie gewisse Relativitätspostulate gelten läßt. Vgl. §§ 51 und 52. Die Bezugssysteme, für welche die Relativitätspostulate erfüllt sind, heißen „berechtigte“.

anderen Gegenständen der physikalischen Theorie und Praxis. Die Untersuchung dieser Beziehungen, welche das Bezugssystem physikalisch überhaupt erst definieren muß, der erstgenannten Untersuchung seiner methodologischen Bedeutung notwendigerweise vorangehen.

Ihr Thema läßt sich vielleicht am einfachsten in die Frage fassen:

Wie und unter welchen Bedingungen ist die Bestimmung eines in einer beliebig gegebenen Relativitätstheorie berechtigten Bezugssystems prinzipiell, d. h. abgesehen von allen technischen und mathematischen Schwierigkeiten, möglich?

Diese Frage bildet den Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

Die Ausführung hatte sich naturgemäß zunächst mit dem Beitrag der Beobachtung zu der Bestimmung eines Bezugssystems zu beschäftigen (Abschnitt A).

Mit weitgehender Benutzung der von E. Mach<sup>1)</sup> und H. Poincaré<sup>2)</sup> gegebenen Analysen physikalischer Erfahrung ließ sich zeigen, daß diese von bestimmten räumlich-zeitlichen Beziehungen nur solche topologischer Art liefern kann, und auch diese nur unter Voraussetzung gewisser zwar selbstverständlich erscheinender, aber empirisch doch nicht erweisbarer Sätze, der Abbildungspostulate (§§ 5 und 6).

Alle topologisch unabhängigen Maßbestimmungen räumlich-zeitlicher Größen sind demnach als empirisch nicht erweisbare Resultate der physikalischen Theorie zu betrachten (§ 16).

Die weitere Untersuchung mußte demgemäß von der im nächsten Abschnitte (B) besprochenen begrifflichen Bestimmung der berechtigten Bezugssysteme einer beliebigen Relativitätstheorie, d. h. von ihrer Bestimmung innerhalb des Weltbildes ausgehen, das durch irgendein der gegebenen Relativitätstheorie genügendes System physikalischer Gleichungen gegeben ist.

---

1) E. Mach, „Erkenntnis und Irrtum“, Leipzig 1906; vgl. speziell die Kapitel: „Der physiologische Raum im Gegensatz zum metrischen“ (p. 337 ff.) und „Die physiologische Zeit im Gegensatz zur metrischen“ (p. 423 ff.).

2) H. Poincaré, „Wissenschaft und Hypothese“, Leipzig 1906, II. Teil, Kap. 4 u. 5, p. 52 ff., „Letzte Gedanken“, Leipzig 1913, Kap. 2 u. 3, p. 33 ff. und „Der Wert der Wissenschaft“, Leipzig 1906, Kap. 2 u. 3, p. 26 ff.

Die Frage, wie und unter welchen Bedingungen eine Übertragung dieser Bestimmung aus dem theoretischen Weltbilde in die wirkliche physikalische Erfahrungswelt prinzipiell möglich ist, bildet den Inhalt des dritten Abschnittes (C).

Als wesentlichster Unterschied zwischen der begrifflichen und der wirklichen Bestimmung eines Bezugssystems zeigte sich dabei der, daß bei jener unbedenklich mit unendlichen mathematischen Prozessen operiert werden darf, die in die Wirklichkeit übersetzt als unendliche Messungsreihen erscheinen und als solche prinzipiell unausführbar sind (§§ 40—49). Doch ist die Bedeutung dieses Umstandes aus gewissen (in § 50 angegebenen) Gründen nur für Relativitätstheorien mit endlichen Gruppen berechtigter Transformationen erschöpfend untersucht worden.

Der letzte Abschnitt (D) bringt schließlich einige Anwendungen der vorher gewonnenen allgemeinen Resultate auf einzelne Relativitätstheorien (Absoluttheorie, Galilei-Hertzsche und Lorentz-Einsteinsche Relativitätstheorie der Geschwindigkeit, Mach-Reisnersche und [neue] Einsteinsche Relativitätstheorie der Beschleunigung).

Eine Entscheidung für oder gegen eine der Relativitätstheorien zu treffen, konnte natürlich nicht versucht werden, denn dazu wäre wegen der erwähnten Invarianz der Beobachtungstatsachen gegen beliebige stetige Raum-Zeittransformationen, wie schon angedeutet, die Aufstellung methodologischer Sätze über den physikalischen Nutzen der Bezugssysteme nötig, was nicht zu dem oben angegebenen Thema des vorliegenden Untersuchung gehört.

Von den allgemeinsten Voraussetzungen dieser Untersuchung seien folgende zwei genannt.

Erstens sind die physikalischen Raum- und Zeitkoordinaten durchweg als reine Zahlen aufgefaßt. Dadurch ist Unabhängigkeit von allen Annahmen über die geometrische Beschaffenheit des physikalischen Raumes und der Zeit — ohne Widerspruch zu einer von ihnen — erreicht (§§ 5, 6, 22).

Zweitens ist vorausgesetzt, daß alle topologischen Beobachtungen mit absoluter Genauigkeit und Schärfe gelten (§ 15). Das bedeutet die Ausschaltung der unübersehbaren Komplikationen, die bei der Deutung makroskopischer Beobachtungen durch eine atomistische Theorie der Materie entstehen (§ 30).

Schließlich ist es bei der Fülle erkenntnistheoretischer und psychologischer Probleme, die sich an die Begriffe Raum und Zeit knüpfen, vielleicht nicht überflüssig, hervorzuheben, daß die vorliegende Untersuchung lediglich auf dem Begriffssystem der mathematischen und praktischen Physik sich aufbaut. Spezifisch philosophische (erkenntnistheoretische oder metaphysische) Gesichtspunkte haben sie nirgends beeinflußt. Wenn bei der Analyse der Beobachtungen psychologische Begriffe, wie Sinnesempfindung usw., eingeführt werden (Abschnitt A und § 25), so geschieht das nur vorübergehend zwecks einfacherer Darstellung. Wesentlich für die Beweisführung sind, wie man leicht erkennt, immer nur die gegebenen Inhalte der Beobachtungsaussagen (ihre Übereinstimmung — Objektivität bzw. Verschiedenheit bei gleichen *physikalischen* Bedingungen — Subjektivität, Unbestimmtheit), nicht die psychologische Art ihrer Entstehung.

Die mir bekannten früheren Arbeiten<sup>1)</sup> über die Bestimmbarkeit des physikalischen Bezugssystems von L. Lange, J. Thomson, Tait, Muirhead, Streintz, Petzoldt, Wernick fassen das Thema viel enger als die vorliegende Untersuchung. Vor allem werden in diesen fast durchweg vor der Einführung der ersten Einsteinschen Relativitätstheorie erschienenen Abhandlungen allgemein die absolute Feststellbarkeit der Gleichzeitigkeit und die Bestimmbarkeit räumlicher Entfernungen von vornherein vorausgesetzt. Ferner fehlt in ihnen gänzlich eine von diesen Annahmen freie Besinnung über die Reichweite der reinen physikalischen Beobachtung bei Raum- und Zeitbestimmungen.<sup>2)</sup>

1) L. Lange, *Philosophische Studien*, herausgegeben von Wundt, Bd. II, p. 266 u. 539. Leipz. Ber. 87, p. 333. 1885. J. Thomson, *Proc. Edinb.* 12. (116). p. 568 u. 730. 1884. Tait, ebenda, p. 743. F. Muirhead, *Phil. Mag.* (5) 28, p. 473. 1887. H. Streintz, *Die physikalischen Grundlagen der Mechanik*. Leipzig, B. G. Teubner, 1883. J. Petzoldt, *Ann. d. Naturphil.* 7, p. 29. 1908. G. Wernick, ebenda, p. 317. — Über weitere Literatur vgl. A. Voss, *Enzykl. d. Mathem. Wissensch.* 4. 1. p. 30ff.

2) Auch L. Langes — von J. Petzoldt l. c. widerlegte — bekannte Scheidung von „Konvention“ und Erfahrungstatsache in dem Inhalte des Trägheitssatzes beruht auf diesen Voraussetzungen. Ausdrücklich hervorgehoben sind sie von A. Anding, *Enzykl. d. Math. Wissensch.* 6. 2, 1. p. 3ff., in seiner klaren Auseinandersetzung über die Bestimmung des astronomischen Bezugssystems.

Außer um die Aufstellung einer Zeitskala handelt es sich daher in den genannten Arbeiten nur um die Frage, ob und wie unter den räumlichen Bezugssystemen, die man sich wie starre Gerüste gegeben denkt, die gleichförmig bewegten, in der Newtonschen Mechanik allein berechtigten, von den ungleichförmig bewegten prinzipiell unterschieden werden können.

#### A. Der Beitrag der Beobachtungen zur Bestimmung eines räumlich-zeitlichen Bezugssystems.<sup>1)</sup>

##### 1. Der topologische Charakter der reinen Beobachtungstatsachen.

§ 1. Jede Messung räumlich-zeitlicher Größen, wie Länge, Zeit, Volumen, Geschwindigkeit usw., wird in der Weise ausgeführt, daß man gewisse materielle oder immaterielle (Lichtstrahl) Teile des Meßinstrumentes mit Teilen des Meßgegenstandes ganz oder teilweise zur räumlich-zeitlichen Deckung bringt. Das Ergebnis der Messung erhält man durch Übertragung der gegebenen räumlich-zeitlichen Maßbeziehungen zwischen den Teilen des Instrumentes auf die mit ihnen zur Deckung gebrachten Teile des Meßgegenstandes. Beobachtet wird hierbei — wenn wir zunächst von allen direkten Größenschätzungen absehen — nur das völlig oder teilweise erreichte räumlich-zeitliche Zusammenfallen oder Nichtzusammenfallen von Teilen des Meßinstrumentes mit Teilen des Meßgegenstandes. Oder allgemein: rein topologische Beziehungen zwischen räumlich-zeitlich ausgedehnten Gegenständen. Alles weitere folgt mathematisch aus den Instrumentengleichungen. Diese werden bei Messungen mit primitiven Mitteln, wie gewöhnliche Längenmaße und Uhren, im allgemeinen nicht explizit aufgestellt, ja, die Notwendigkeit ihrer Annahme kommt oft gar nicht zum Bewußtsein; doch ändert das nichts an ihrer logischen Unentbehrlichkeit für das Messungsergebnis. Soweit die für die Instrumente geltenden räumlich-zeitlichen Beziehungen in Maßbeziehungen räumlich-zeitlicher Größen bestehen, können sie auch durch Prüfung der gegebenen In-

1) Vgl. zu dem ersten Abschnitt die Ausführungen E. Machs in „Erkenntnis und Irrtum“, Leipzig 1906, speziell die Kapitel: „Der physiologische Raum im Gegensatz zum metrischen“, p. 337 ff., und „Die physiologische Zeit im Gegensatz zur metrischen“. Ferner: H. Poincaré, „Wissenschaft und Hypothese“, Leipzig 1906, II. Teil, Kap. 4 u. 5, p. 52 ff., „Letzte Gedanken“ Leipzig 1913, Kap. 2 u. 3, p. 33 ff. und „Der Wert der Wissenschaft“, Leipzig 1906, Kap. 2 u. 3, p. 26 ff.



strumente mittels anderer Meßinstrumente nicht auf reine Beobachtungstatsachen zurückgeführt werden. Immer werden nur neue topologische Beziehungen beobachtet, sofern man, wie gesagt, von allen direkten Größenschätzungen absieht.

§ 2. Aber auch diese direkten Schätzungen räumlich-zeitlicher Größen, welche die Maßbestimmungen des „physiologischen Raumes“ und der „physiologischen Zeit“<sup>1)</sup> bilden, lassen sich auf rein topologische und qualitative Aussagen durch den folgenden schematisch angedeuteten Gedankengang zurückführen.

Bei einer durch Tastempfindungen vermittelten Größenschätzung werden bezüglich des Gegenstandes der Schätzung nur die verschiedenartigen Berührungen seiner Teile mit Teilen des tastenden Organes direkt beobachtet, also wieder nur topologische Beziehungen. Die Empfindungen der Fernsinne wieder werden auf Tastempfindungen zurückgeführt durch die Annahme, daß sie nicht direkt durch den räumlich-zeitlich entfernten Wahrnehmungsgegenstand hervorgerufen werden, sondern allein durch unmittelbare Berührung der Sinnesorgane mit gewissen von ihm ausgehenden physikalischen Wirkungen — wie Schall- oder Lichtwellen. Die Ergebnisse aller auf Fernwahrnehmungen beruhenden Größenschätzungen hängen hiernach logisch — wenn auch nicht psychologisch — von den (theoretischen) Annahmen ab, die man über den Ausbreitungsweg und die Ausbreitungsgeschwindigkeit der erwähnten Wirkungen bzw. Strahlungen macht.

§ 3. Es kommen demnach nur noch die räumlich-zeitlichen Größenschätzungen in Betracht, welche sich direkt auf die Reizstellen und die Reizzeiten der Sinnesorgane beziehen. Von diesen besitzen nur die Schätzungen kleiner Zeiten bei rhythmisch wechselnden Empfindungen eine beträchtliche Bestimmtheit, während die örtliche Lage der Reizstellen entweder gar nicht — was bei den Fernsinnen wohl die Regel ist — oder nur recht unbestimmt — bei Tast- und Geruchseindrücken — abgeschätzt wird. Diese Ortsschätzungen lassen sich zudem als übertragener Ausdruck reiner Qualitätsurteile deuten durch die bekannte Vorstellung, daß den einzelnen Reizstellen, die durch Elementarorgane repräsentiert gedacht

---

1) Vgl. E. Mach, „Erkenntnis und Irrtum“, Leipzig 1906, p. 337 ff. u. 423 ff.

werden, spezifisch verschiedene Empfindungsqualitäten zukommen, deren Unterschiede allein direkt empfunden werden und die erst nachträglich zusammen mit den äußeren Wahrnehmungsgegenständen einem Raumschema eingefügt werden, dessen quantitative Bestimmtheiten — wie die Konstanz der Ausdehnung fester Körper — nur durch ihre Zweckmäßigkeit und (psychologische) Einfachheit begründet sind. Für die Zeitschätzungen gelingt die entsprechende Umdeutung, wenn man mit Mach<sup>1)</sup> eine zeitliche (periodische) Änderung der spezifischen Sinnesqualitäten bei den von einem Reiz getroffenen Elementarorganen annimmt. Die (reziproke) Änderungsgeschwindigkeit (Abklingungszeit) bzw. die Periodendauer der Änderungen würden dann etwa als das natürliche physiologische Zeitmaß aufzufassen sein. Aber die unbewußt gemachte Annahme der Konstanz dieses Zeitmaßes selbst, die hiernach in alle Zeitschätzungen wesentlich eingeht, erscheint bei bewußter Betrachtung als zwar psychologisch naheliegend, aber doch noch einer physikalischen Begründung bedürftig.

§ 4. Den mitgeteilten Gedankengang kurz zusammenfassend, kann man also sagen: Jede scheinbar durch bloße Beobachtung gewonnene Aussage über räumlich-zeitliche Maßbeziehungen kann als ein durch (unbewußte) Hinzunahme quantitativer theoretischer Annahmen auf eine einfache Form gebrachter Ausdruck für an sich rein qualitative und topologische Beobachtungstatsachen gedeutet werden.

Läßt man diese Deutung als möglich gelten, so folgt, daß zwischen zwei quantitativ verschiedenen, aber topologisch gleichen Abbildungen der Erscheinungswelt auf ein räumlich-zeitliches Bezugssystem durch bloße Beobachtungen in keinem Falle eine sicher begründete Entscheidung getroffen werden kann.

## II. Das Bezugssystem als Zahlenmannigfaltigkeit und die Abbildungspostulate.

§ 5. Zu diesem Satze muß noch eine prinzipiell wichtige Erklärung gegeben werden.

Will man nämlich bei der Definition des physikalischen Bezugssystems von jeder Voraussetzung einer a priori ge-

1) E. Mach, l. c. p. 429 ff.

gebenen Form der Raumanschauung<sup>1)</sup> frei sein, so ist man gezwungen, das räumlich-zeitliche Bezugssystem der Physik als eine — vierdimensionale — Mannigfaltigkeit reiner Zahlen aufzufassen, und diese Auffassung, welche mit jeder Art von Geometrie, deren Maßbestimmungen den Axiomen der Algebra genügen, verträglich ist, ohne eine von ihnen vorauszusetzen, soll im folgenden festgehalten werden.

Wenn aber die Raum- und Zeitkoordinaten nichts weiter darstellen als ein System reiner Zahlen, so ist zwischen ihnen und irgendwelchen Größen des empirischen Raumes und der empirischen Zeit gar kein Zusammenhang a priori gegeben. Selbst wenn es also einwandfreie Beobachtungen räumlich-zeitlicher Maßbeziehungen gäbe, so kann aus ihnen allein a priori gar keine Beziehung zwischen irgendwelchen Koordinatenzahlen erschlossen werden. Denn es ist von vornherein gar nicht gesagt, daß z. B. die beobachtete „physiologische“ Zeit gerade durch die „Zeitkoordinate“  $t$  gemessen werden muß oder jede empirisch gegebene räumliche Entfernung durch eine Funktion der „Raumkoordinaten“  $x, y, z$ , von der Form

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2},$$

vielmehr könnte man statt der angegebenen Koordinatenfunktionen mit a priori gleichem Rechte beliebige andere als Maßzahlen der beobachteten Größen wählen, und so in allen übrigen Fällen. Ja, die Form der darstellenden Funktion könnte sogar für gleichartige beobachtete Größen von Fall zu Fall wechseln. Verfolgt man diesen Gedankengang weiter, so muß man schließlich zugeben, daß auch rein topologische Beobachtungstatsachen keinerlei unbedingte Gültigkeit für das theoretische Weltbild besitzen. Es ist also durchaus nicht unbedingt nötig, Punkte der Erscheinungswelt stets wieder durch Punkte, d. h. durch Systeme von vier Koordinatenzahlen, im Bezugssysteme darzustellen, Linien durch Linien,

---

1) Eine solche Voraussetzung würde besagen, daß die Raumtransformationen einer bestimmten Gruppe — z. B. der Euklidischen — a priori als die einzig berechtigten vor allen anderen ausgezeichnet seien. Die wirkliche Unterscheidung der berechtigten Bezugssysteme von den übrigen ist dagegen nach dem Folgenden (Abschnitt B) nur durch Aufstellung physikalischer Maßbeziehungen möglich, die nicht a priori, sondern nur konventionell gültig sind.

d. h. durch eindimensionale Zahlenmannigfaltigkeiten, einfach zusammenhängende Erscheinungsgebiete durch einfach zusammenhängende Zahlengebiete usf., und auch von einem Teil der Erscheinungswelt zum anderen kann die Art der Darstellung ganz beliebig wechseln.

§ 6. Das Ergebnis der eben angestellten Überlegung ist dies: Bei der angenommenen Auffassung des räumlich-zeitlichen Bezugssystems der Physik als einer reinen Zahlenmannigfaltigkeit, muß man den Zusammenhang des Raumes und der Zeit der beobachtbaren Erscheinungswelt mit den physikalischen Raum- und Zeitkoordinaten durch eigens zu diesem Zwecke aufgestellte Abbildungspostulate herstellen, welche zwischen „richtiger“, d. h. ihnen gemäß erfolgter, und „falscher“, d. h. ihnen widersprechender Wiedergabe des Beobachteten zu unterscheiden gestatten. Anderenfalls wäre nach dem Gesagten jede Prüfung des physikalischen Weltbildes durch Beobachtungen unmöglich.

Von der speziellen Form der geforderten Abbildungspostulate hängt die Möglichkeit dieser Prüfung nicht ab, nur müssen sie bestimmt und umfassend genug sein, um bei gegebener räumlich-zeitlicher Beobachtungstatsache deren Darstellung stets eindeutig festzulegen.

Doch gibt es für topologische Beobachtungen eine einfachste und allgemein anerkannte Form der Abbildungspostulate, welche daher den weiteren Betrachtungen zugrunde gelegt werden soll. Sie läßt sich etwa in folgende zwei Sätze fassen.

1. *Die Darstellung räumlich-zeitlicher Beobachtungstatsachen im physikalischen Bezugssystem soll bei allen irgendwo und irgendwann angestellten Beobachtungen durch die gleichen Gesetze geregelt sein. Das heißt nichts anderes als: Die Abbildungsvorschriften sollen eine von Ort und Zeit und sonstigen Umständen der Beobachtung unabhängige Form haben.*

Es ist dies eine jedenfalls sehr naheliegende Forderung. Etwas spezieller, aber kaum weniger naheliegend, lautet der zweite Satz.

2. *Alle irgendwie ausgezeichneten Punkte und Punktmannigfaltigkeiten der Erscheinungswelt sollen im Bezugssystem durch Punkte und Punktmannigfaltigkeiten mit genau den gleichen topologischen Eigenschaften und Beziehungen — wie Dimen-*

sionszahl, Art des Zusammenhanges, Knickungen — dargestellt werden.

Ein Punkt der Erscheinungswelt ist dabei etwa durch einen momentan aufblitzenden Lichtpunkt, eine (Welt)Linie durch einen während einer endlichen Zeit betrachteten Raumpunkt oder eine momentan erscheinende Raumlinie gegeben usw.

Unter „Punkten“ und „Punkt“mannigfaltigkeiten des Bezugssystems und ihren „topologischen“ Beziehungen und Eigenschaften, sind entsprechend der bekannten Ausdrucksweise der allgemeinen Kartesischen Geometrie Systeme und Mannigfaltigkeiten reiner (Koordinaten)zahlen sowie Beziehungen und Eigenschaften solcher zu verstehen.

### III. Die Unmöglichkeit, räumlich-zeitliche Maßbeziehungen allein aus Beobachtungen und Abbildungspostulaten abzuleiten.

§ 7. Der oben aufgestellte Satz, daß aus reinen Beobachtungen räumlich-zeitlicher Beziehungen in Strenge nur Aussagen topologischen Inhalts für das physikalische Weltbild gewonnen werden können, bleibt gegenüber den aufgestellten Abbildungspostulaten bestehen, ja, gewinnt erst durch sie eine völlig bestimmte Bedeutung; denn seine eingangs mitgeteilte Ableitung diente eigentlich nur dem Nachweis des rein topologischen Charakters der Beobachtungstatsachen selbst, während die Forderung der „richtigen“ Abbildung dieser Tatsachen auf das Bezugssystem, die jetzt in den angegebenen Abbildungspostulaten ihren Ausdruck gefunden hat, damals stillschweigend vorausgesetzt wurde.

§ 8. Andererseits wird gerade durch die Aufstellung der Abbildungspostulate ein Einwand gegen den genannten Satz herausgefordert, der allerdings, wie zu erwarten, nur methodologischer Art ist. Es ist dies der folgende:

Wenn es doch nötig ist, besondere, naturgemäß nicht empirische Abbildungsgesetze für die Darstellung der Beobachtungstatsachen im physikalischen Weltbilde aufzustellen, so braucht man auch aus den (vermeintlichen) Beobachtungstatsachen nicht erst alle nicht empirischen Elemente zu entfernen, bevor man sie als nunmehr reine Beobachtungstatsachen zur Grundlage des theoretischen Weltbildes macht, sondern kann sie — was weit einfacher scheint — in der Form gelten lassen, in der sie dem naiven Bewußtsein gegeben sind, also

vor allem mit allen den nicht empirischen Annahmen, deren Eingehen in sie selbst nur theoretisch erschlossen, aber nicht direkt wahrgenommen wird.

§ 9. Die Durchführung dieses Vorschlages stößt indessen, wie leicht ersichtlich, auf unüberwindliche Hindernisse.

Versucht man zunächst, die Ergebnisse mit Instrumenten ausgeführter Raum- und Zeitmessungen als direkte Beobachtungstatsachen gelten zu lassen, so führt die Ausschaltung aller Theorie zu kritikloser Auswahl der Instrumente (Uhren, Maßstäbe usw.) und dadurch, wie bekannt, zu direkten Widersprüchen zwischen den Messungsergebnissen. Diese wieder bedürfen zu ihrer Aufklärung einer Theorie der Instrumente. Durch bewußte und vollständige Aufstellung einer solchen wird aber von selbst die im Anfang dieser Arbeit angegebene Scheidung der theoretischen von den rein empirischen Quellen des Messungsergebnisses vollzogen. Diese Scheidung drängt sich auch ohnedies bei aufmerksamer Betrachtung des Vorganges einer Messung dem Bewußtsein geradezu auf.

§ 10. Die direkten Schätzungen räumlich-zeitlicher Größen und Maßbeziehungen wieder sind zur Grundlage eines wissenschaftlichen Maßsystems deshalb unbrauchbar, weil sie im allgemeinen durchaus subjektiv, von einem Beobachter zum anderen sich ändernd, und zudem noch unbestimmt sind.

Doch gibt es gewisse Ausnahmen von dieser Regel. So sind die Urteile über die Gleichzeitigkeit oder Ungleichzeitigkeit visuell wahrgenommener Ereignisse bei verschiedenen Beobachtern im allgemeinen gleichlautend und bestimmt. Trotzdem läßt man sie in Strenge nur als einen zu Unrecht auf die wahrgenommenen Ereignisse übertragenen Ausdruck für die (annähernde) Gleichzeitigkeit oder Ungleichzeitigkeit der Sinnesempfindungen selbst gelten, die man sich durch die mit endlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit vom Wahrnehmungsgegenstand zum Sinnesorgan übertragenen Lichtimpulse hervorgerufen denkt. Durch den Ausbau dieser Vorstellung werden, wie leicht ersichtlich, alle Gleichzeitigkeitswahrnehmungen auf rein topologische Tatsachen, nämlich auf Gleichzeitigkeit auch örtlich zusammenfallender Wirkungen, zurückgeführt. Dieses Verhalten der physikalischen Wissenschaft gegenüber den genannten Wahrnehmungen, die, wie gesagt, in recht bestimmter und objektiver Form auftreten.

ist hinreichend erklärt durch die praktische Unentbehrlichkeit der Vorstellung einer endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes für die Einfügung allbekanntere Beobachtungstatsachen (Abblendung von Lichtquellen, Versuche zur Messung der Lichtgeschwindigkeit) in ein physikalisches Weltbild.

Durch die mit der Vorstellung einer mit endlicher Geschwindigkeit erfolgenden Lichtausbreitung notwendig verbundene Vorstellung bestimmter Lichtwege (Lichtstrahlen) werden zugleich alle durch Visieren gewonnenen Aussagen über Richtung und Geradlinigkeit auf topologische Aussagen über das Zusammenfallen von Lichtwegteilen zurückgeführt. Hierher gehören die Erklärung der Fata morgana, des Spiegelbildes und der Aberration.

§ 11. Wesentlich anders als gegen die Gleichzeitigkeitswahrnehmungen verhält sich die wissenschaftliche Praxis gegenüber den direkten Schätzungen des Verhältnisses, in dem die Strecke zwischen zwei benachbarten Strichen einer Skala, durch irgendeinen Teil des Meßgegenstandes geteilt wird. Die Ergebnisse solcher Schätzungen werden unbedenklich als Beobachtungsergebnisse angenommen und zur Festlegung der letzten Dezimalen des Resultates bei Präzisionsmessungen verwendet, wobei natürlich auch irgendein bestimmter Koordinatenausdruck für das beobachtete Entfernungsverhältnis eingeführt wird.

Man kann hierin eine Bestätigung der oben angedeuteten Auffassung sehen, daß, wenn die Ergebnisse der direkten Schätzungen räumlich-zeitlicher Größen im allgemeinen nicht als Beobachtungstatsachen anerkannt werden, dies nicht den etwa in ihnen nachweisbaren nicht empirischen Elementen zuzuschreiben ist, sondern allein ihrer Subjektivität und Unbestimmtheit.

§ 12. Die Gültigkeit der relativen Größenschätzungen kleiner, an der Grenze des Wahrnehmbaren liegender benachbarter Teile einer Raum- oder Zeitstrecke, um die es sich hier handelt, läßt sich indessen auch verstehen, ohne daß man eine über das Topologische wesentlich hinausgehende Bestimmung des physikalischen Bezugssystems durch Schätzungsergebnisse anzunehmen braucht.

Bei jeder beliebigen stetigen Transformation der Raum-

und Zeitkoordinaten  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  transformieren sich nämlich unendlich kleine Koordinatendifferenzen  $d x_1 \dots d x_4$  linear nach Gleichungen der Form.

$$\begin{aligned} d x_1' &= a_{11} d x_1 + \dots + a_{14} d x_4 \\ d x_4' &= a_{41} d x_1 + \dots + a_{44} d x_4, \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten  $a_{hk}$  stetige Funktionen der Koordinaten sind.

Ebenso müssen sich in jedem topologisch richtigen, d. h. den beiden oben aufgestellten Abbildungspostulaten genügenden Weltbilde die Quotienten aus einem Streckenelement  $ds$  und seinen Komponenten  $d x_1 \dots d x_4$  längs jeder als ungeknickt erscheinenden Weltlinie<sup>1)</sup> der physiologischen Welt stetig ändern. Für zwei aufeinander folgende Streckenelemente  $d_1 s (d_1 x_1 \dots, d_1 x_4)$  und  $d_2 s (d_2 x_1 \dots, d_2 x_4)$  einer ungeknickten Weltlinie gilt daher das Transformationsgesetz:

$$\frac{d_1 s}{d_2 s} = \frac{d_1 x_1}{d_2 x_2} = \frac{a_{11}' d_1 x_1' + \dots + a_{14}' d_1 x_4'}{a_{11}' d_2 x_1' + \dots + a_{14}' d_2 x_4'} = \frac{d_1 s'}{d_2 s'}.$$

Das Verhältnis zweier solcher Elemente bleibt allen stetigen Transformationen gegenüber invariant. Auch aus einer als unbedingt gültig anerkannten Schätzung seiner Größe läßt sich daher zwischen zwei durch irgendeine stetige Transformation verknüpften Bezugssystemen niemals eine Entscheidung treffen.

§ 13. Die eben angestellte Überlegung gilt streng nur für unendlich kleine Strecken und Zeitelemente, während sich die wirklichen Größenschätzungen, wenn auch auf kleine, so doch stets endliche Zeiten und Strecken beziehen. Dem steht gegenüber, daß ihre Ergebnisse nur annähernd bestimmte sind, wobei sich nicht einmal für die Grenze ihrer Abweichungen voneinander ein genau bestimmter Wert angeben läßt. Man könnte aus ihnen also nach Annahme eines weiteren Abbildungspostulates nur eine — nicht einmal völlig bestimmte — obere Schranke für die Krümmungsmaße des Bezugssystems, d. h. für die Veränderlichkeit der Koeffizienten,  $a_{hk}$ , der infinitesimalen Transformationen erschließen. Dabei fällt noch erschwerend ins Gewicht, daß ein allgemein

1) Etwa repräsentiert durch eine „gleichzeitig“ an allen ihren Punkten für einen Augenblick aufblitzende ungeknickte Raumlinie oder durch einen stetig bewegten Raumpunkt.



anerkanntes Abbildungspostulat für endliche räumlich-zeitliche Größen nicht existiert.<sup>1)</sup>

§ 14. Schließlich sei noch erwähnt, daß aus der bekannten Forderung: daß die Wirkung stets „später“ als ihre Ursache, und die Ankunft eines Signals stets „später“ als seine Ab- sendung sein solle, offenbar auch nur eine gewisse Beschrän- kung der Veränderlichkeit der  $a_{hk}$  folgen kann, wobei noch vorausgesetzt ist, daß jedes „später“ durch ein „größer“ (bzw. „kleiner“) des Zahlwertes einer bestimmten Koordinate (Zeit- koordinate) oder Koordinatenfunktion abgebildet wird.

§ 15. Alles zusammengeraßt, bleibt das oben über die Tragweite der räumlich-zeitlichen Beobachtungstatsachen Ge- sagte also im wesentlichen bestehen.

*Aus Beobachtungen und Abbildungspostulaten allein können keine bestimmten, d. h. durch Gleichungen ausgedrückte Maß- beziehungen zwischen den Raum- und Zeitkoordinaten irgend- welcher Gegenstände des physikalischen Weltbildes abgeleitet werden.*

Höchstens könnten sie eventuell zur Aufstellung gewisser — nicht genau bestimmbarer — Ungleichungen (für die  $a_{hk}$ ) führen, durch die alle ihnen widersprechenden Bezugssysteme als allzu sehr verzerrt gegenüber den physiologischen Raum- und Zeitmaßen ausgeschieden werden.

Dagegen können topologische Beziehungen zwischen Gegen- ständen der sinnlichen Wahrnehmung offenbar im allgemeinen objektiv und bestimmt beobachtet und gemäß den angegebenen Abbildungspostulaten unverändert auf das physikalische Welt- bild übertragen werden. *Und zwar soll im folgenden stets voraus- gesetzt werden, daß die Ergebnisse topologischer Beobachtungen mit absoluter Genauigkeit und Schärfe gelten, daß also im beson- deren nur wirkliche Weltpunkte dem Beobachter als ausdehnungs- los, nur wirkliche Weltlinien als eindimensional erscheinen usf.*

Alle durch Induktion aus solchen Beobachtungen ge- wonnenen Gesetze haben wieder rein topologischen Charakter

---

1) Ein solches könnte, ganz abgesehen von der Subjektivität und Unbestimmtheit der physiologischen Raum- und Zeitmaße schon des- halb kaum aufgestellt werden, weil auch die Gegenstände der direkten empirischen Größenschätzungen im allgemeinen unbestimmt sind, indem bei räumlichen Größen die Zeit und bei Zeitstrecken der Ort nur für die End- oder Grenzpunkte völlig bestimmt zu sein pfligt.

und können durch neue Beobachtungen bestätigt oder — wegen der unvermeidlichen Unsicherheit aller Induktions-schlüsse — widerlegt werden.

Wohl das allgemeinste und für die Abbildung der Welt auf ein Bezugssystem grundlegende Gesetz, das sich aus topologischen Beobachtungen ableiten läßt, ist das, daß alle Punkte der Erscheinungswelt eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit von gerade vier räumlich-zeitlichen Dimensionen bilden.<sup>1)</sup>

## B. Die begriffliche Bestimmung der „berechtigten“ Bezugssysteme durch die physikalische Theorie.

### I. Gesetz, Konvention und willkürliche Festsetzung.

§ 16. Wenn nun trotz dem topologischen Charakter aller bestimmten, aus Beobachtungstatsachen ableitbaren, räumlich-zeitlichen Beziehungen doch die Bestimmung eines physikalischen Bezugssystems für Raum und Zeit gelingt, so kann das nur mittels theoretischer Gesetze und willkürlicher Festsetzungen geschehen, deren Inhalt über das durch Beobachtung Kontrollierbare hinausgeht. Denn nur soweit dies der Fall ist, können aus ihnen räumlich-zeitliche Maßbeziehungen abgeleitet werden, die, wie gezeigt, an sich der Beobachtung unzugänglich sind.

*Soweit die kinematischen Aussagen eines physikalischen Gesetzsystems sich nicht auf rein topologische Beziehungen zurückführen lassen, sind sie hiernach als bloße — höchstens methodologisch begründete — Konventionen<sup>2)</sup> zu betrachten.* Doch darf man nicht sagen, daß alle räumlich-zeitlichen Maßbeziehungen des Gesetzsystems Konventionen sind. Vielmehr gilt das nur für die *topologisch unabhängigen* unter ihnen, und das sind so viele, wie man unbedingt braucht, um aus ihnen und den

---

1) Die Dimensionszahl denke ich mir per Rekursion durch den Satz definiert, daß jedes  $n$  dimensionale Gebiet nur durch einen mindestens  $(n - 1)$  dimensional Schnitt in zwei Teile zerlegt werden kann. Vgl. H. Poincaré, „Letzte Gedanken“. Leipzig 1913, p. 61ff.

2) Ich gebrauche dieses Wort hier im Anschluß an L. Lange (l. c.) zur Bezeichnung des nicht durch Beobachtung Erweisbaren. Doch kann die Konvention unbewußt und durch methodologische Gründe aufgenötigt sein. Konvention bedeutet hier also nicht dasselbe wie etwa (freies) Übereinkommen.

im Gesetzsystem (ausdrücklich oder implizite) enthaltenen topologischen Aussagen alle übrigen ableiten zu können. Hierzu genügen, wie sich noch zeigen wird (vgl. § 40ff.) verhältnismäßig wenige und einfache Maßbeziehungen. Außerdem sind in allen physikalischen Gleichungen die unbeweisbaren eigentlichen Maßbeziehungen logisch äußerst eng mit prinzipiell erweisbaren topologischen Aussagen, die stets zusammen mit jenen aus den Gleichungen folgen, verknüpft<sup>1)</sup>, so daß auch bei jedem einzelnen Gesetz nur ein Teil seines Inhaltes Konvention ist.

§ 17. Dagegen sind unter den erwähnten *willkürlichen Festsetzungen* Maßangaben für Koordinaten und Koordinatenfunktionen zu verstehen, welche dem Belieben des einzelnen überlassen sind.<sup>2)</sup> Sie sind nötig, wenn man, über die generelle Bestimmung des Bezugssystems durch ein Gesetzsystem hinausgehend, das Koordinatensystem vollständig festlegen, d. h. jedem bestimmten Weltpunkte eindeutig bestimmte Koordinatenzahlen zuordnen will. *Durch Konvention und willkürliche Festsetzung zusammen müssen demnach gerade vier stetige Funktionen von je vier Argumenten im Bereiche  $-\infty$  bis  $+\infty$  bestimmt werden, nämlich die Koordinaten des festzulegenden Bezugssystems als Funktionen der Koordinaten eines beliebig gegebenen, mit den Beobachtungstatsachen verträglichen Bezugssystems.*

1) Dadurch erhält dann der Gesamthalt der Gleichungen leicht das Aussehen des Erweisbaren. So folgt aus dem Satz, daß jeder punktförmige Lichtimpuls sich im Vakuum geradlinig mit der gleichen konstanten Geschwindigkeit bewegt, die topologische Aussage, daß die Weltlinien zweier Lichtimpulse im Vakuum vollständig zusammenfallen, wenn sie zwei gemeinsame Punkte haben, und außerdem die reine Maßbeziehung: Unter allen möglichen durch die Punkte eines Vakuums gehenden Lichtimpulsen bewegt sich zu jeder Zeit in jedem Punkte und nach jeder Richtung hin je einer mit einer überall und zu allen Zeiten gleichen Geschwindigkeit. Man erkennt, wie umständlich die Trennung der beiden Aussagen ist. Das würde bei weniger einfachen Beispielen noch mehr hervortreten.

2) Z. B. die Festlegung des Koordinatenursprunges. Wo ein Übereinkommen besteht, wie z. B. beim C.G.S.-Maßsystem, ist es doch ein durchaus *freies*; denn alles durch Beobachtung Prüfbares folgt bereits aus der Konstanz der Standardgrößen, die — sofern sie besteht — als Gesetz betrachtet wird. Nur die wirklich willkürliche Maßzahl wird durch (freies) Übereinkommen festgelegt.

## II. Die algebraische Definition der berechtigten Bezugssysteme.

§ 18. Ist irgendein System physikalischer Gesetze in mathematisch bestimmter Form gegeben, und sind zudem die Gesetze bekannt, nach denen sich diese Form bei Transformationen der Raum- und Zeitkoordinaten ändert, so ist dadurch zunächst eine Gruppe von Koordinatentransformationen definiert, nämlich die Gruppe der Transformationen, bei denen das gegebene Gleichungssystem invariant bleibt. Die Transformationen dieser Gruppe mögen als die (hinsichtlich des gegebenen Gleichungssystems) *berechtigten* oder *erlaubten* bezeichnet werden. Jede andere durch eine beliebige stetige Transformation aus der vorgelegten entstehende Form des Gesetzsystems definiert in gleicher Weise eine im allgemeinen andere, aber der ersten ähnliche<sup>1)</sup> Gruppe berechtigter Transformationen.

Welche Transformationsgruppen dem Gesamtsystem physikalischer Gesetze gegenüber berechtigt sein sollen, wird bestimmt durch die Relativitätspostulate, die in den verschiedenen Relativitätstheorien in verschiedener Anzahl und Form aufgestellt werden.

§ 19. Von den Transformationen der Bezugssysteme zu den Bezugssystemen selbst übergehend, kann man bei einem gegebenen Gleichungssystem mit bekannten Transformationsgesetzen die berechtigten Bezugssysteme zunächst einfach als die definieren, in denen das Gleichungssystem erfüllt ist. Ein Bezugssystem dieser Art ist stets denkbar, d. h. es existiert begrifflich, sofern nur das Gleichungssystem in sich widerspruchsfrei ist. Die Bestimmtheit der berechtigten Bezugssysteme beruht bei dieser Definition offenbar nur auf den Beziehungen, welche zwischen seinen Koordinaten und den übrigen in dem Gleichungssystem vorkommenden (theoretischen) Größen durch das Gleichungssystem aufgestellt

### 1) Eine Transformationsgruppe

heißt einer anderen 
$$y_i' = g_i(y_1 \dots y_n, a_1 \dots a_r) \quad (i = 1 \dots n)$$

$$x_i' = f_i(x_1 \dots x_n, a_1 \dots a_r) \quad (i = 1 \dots n)$$

ähnlich, wenn sie aus ihr durch Einführung eines anderen Koordinatensystems mittels stetiger umkehrbarer Funktionen

$$y_i' = w_i(x_1' \dots x_n') \quad y_i = w_i(x_1 \dots x_n)$$

entsteht.

sind. Die Bestimmung ist also ihrem Wesen nach eine rein begriffliche, eben eine Definition. Die Verifikation der Gültigkeit des Gleichungssystems in dem Bezugssysteme hat man sich durch Einsetzung bestimmter Maßzahlen und Zahlmannigfaltigkeiten für die in den Gleichungen vorkommenden Koordinaten und sonstigen Größen vollzogen zu denken. Mindestens ein berechtigtes Bezugssystem existiert stets, d. h. es ist widerspruchlos denkbar, sofern nur das Gleichungssystem in sich widerspruchsfrei ist.

§ 20. Jede berechnete Transformation führt nun von jedem berechtigten Bezugssystem stets wieder zu einem berechtigten. Denn die Transformationsgesetze des Gleichungssystems bestimmen sich gemäß der Forderung, daß, wenn das gegebene Gleichungssystem im ursprünglichen Bezugssystem erfüllt ist, es eo ipso auch das transformierte — im betrachteten Falle invariante — Gleichungssystem im transformierten Bezugssystem sein muß.

Jede nichtberechnete Transformation führt demnach zu einem Bezugssysteme, in dem ein anderes Gleichungssystem gilt, das aus dem gegebenen durch die Transformation entsteht. Doch ist damit nicht ohne weiteres gesagt, daß das neue Bezugssystem nicht zu den berechtigten gehöre. Denn es ist denkbar, daß das ursprüngliche Gleichungssystem auch noch neben dem transformierten gilt. Nur wenn sich die beiden Gleichungssysteme stets, d. h. bei jeder denkbaren zahlenmäßigen Verifikation, direkt widersprechen, wäre diese Möglichkeit von vornherein ausgeschlossen.<sup>1)</sup> Um im allgemeinen Falle dies Resultat zu erreichen, muß man die Definition der berechtigten Bezugssysteme dadurch ergänzen, daß man ein Gleichungssystem nur dann als gültig in einem Bezugssystem bezeichnet, wenn es für eine hinreichend große, dem Bezugssystem eindeutig zugeordnete und nur mit ihm wechselnde<sup>2)</sup> Mannigfaltigkeit von Wertsystemen und räumlich-

1) Bei allen bekannten physikalischen Gleichungssystemen ist dies schon deshalb nicht der Fall, weil sie, sowie die durch Transformation aus ihnen entstehenden Gleichungen stets durch das Verschwinden aller physikalischen Zustandsgrößen in allen Weltpunkten identisch erfüllt werden.

2) Natürlich gilt jedes Gleichungssystem, wenn überhaupt, so auch für alle mit ihm verträglichen Werte und Konstellationen der in ihm vorkommenden Größen, aber eben darum ein transformiertes Gleichungs-

zeitlichen Konstellationen der in dem Gleichungssystem vorkommenden Größen erfüllt ist und nicht nur für irgendein Wertesystem und irgendeine Konstellation.

Soll diese Mannigfaltigkeit des hiernach als physikalisch möglich betrachteten und mit ihr die berechtigten Bezugssysteme allein durch das gegebene Gesetzsysteem ohne irgendwelche Hilfsgesetze definiert sein, so muß sie offenbar in jedem Bezugssysteme sämtliche mit je einer — ursprünglichen oder transformierten — Form des Gesetzsystems verträglichen Wertesysteme und Konstellationen umfassen. Dann kann neben dem gegebenen Gleichungssystem kein anderes transformiertes in dem gleichen — berechtigten — Bezugssysteme gelten, und jede unberechtigte Transformation erzeugt ein unberechtigtes Bezugssystem, in dem das transformierte Gleichungssystem allein gilt und allein den Umfang des als möglich zu betrachtenden bestimmt.

§ 21. *Hiermit ist die Definition oder begriffliche Bestimmung der berechtigten Bezugssysteme, d. h. ihre Bestimmung innerhalb des durch ein System physikalischer Gesetze gegebenen Bildes der Wirklichkeit vollendet. Sie gelingt dank dem Umstande, daß das genannte Bild sich als eine unendliche Mannigfaltigkeit verschiedener Einzelbilder auffassen läßt, welche die verschiedenen nach dem Gesetzsystem möglichen Verifikationen des Gesetzsystems darstellen.*

Eine weitergehende Definition einer besonderen Klasse von Bezugssystemen oder eines einzelnen Bezugssystems innerhalb der Schar der berechtigten, kann aus einem gegebenen System physikalischer Gleichungen wegen der Invarianz des Gleichungssystems bezüglich aller je zwei berechnete Bezugssysteme verbindenden Transformationen nicht gewonnen werden.

Andererseits genügt zur Definition der berechtigten Bezugssysteme auch jeder Teil des gegebenen Gleichungssystems, der keinen anderen als den berechtigten Transformationen gegenüber invariant ist. Dieser enthält dann allein alle als „Konvention“ betrachteten räumlich-zeitlichen Maßbeziehungen.

Man wird zu einer solchen Definition aus methodologischen system in demselben Bezugssysteme nicht für dieselbe Mannigfaltigkeit von Werten und Konstellationen wie das ursprüngliche.

Gründen möglichst einfache und inhaltlich gesicherte<sup>1)</sup> Gleichungen auswählen und wenn möglich solche, die außer reinen Raum- und Zeitgrößen keine anderen physikalischen Größen enthalten, die selbst erst durch weitere Gleichungen (eventuell auch Transformationsgesetze) definiert werden müssen.<sup>2)</sup> Ein weiterer und wohl der wichtigste Gesichtspunkt für die Auswahl der Definitionsgleichungen ergibt sich aus der Forderung ihrer Brauchbarkeit als Grundlage einer rationellen Raum- und Zeitmessung. Diese Frage bildet indessen den Inhalt erst des folgenden und die Angabe und Besprechung spezieller Bestimmungsgleichungen, die für die einzelnen Relativitätstheorien verschieden zu wählen sind, den des letzten Abschnittes.

### III. Die geometrischen Eigenschaften der berechtigten Bezugssysteme.

§ 22. Entgegen oder vielmehr neben der hier benutzten rein algebraischen Auffassung aller Koordinatentransformationen wird in den meisten Relativitätstheorien — nur nicht in der neuesten Einsteinschen — den nach ihnen berechtigten Transformationen des Bezugssystems eine anschaulich geometrische Bedeutung beigelegt. Auf der Möglichkeit, sie anschaulich zu erfassen, beruht ja die Überzeugungskraft der einfachen Relativitätspostulate. Man denke an die allgemein anerkannten Postulate der Relativität der (zeitlosen) Translation (Homogenität des Raumes und der Zeit), der räumlichen Drehung des Bezugssystems (Isotropie des Raumes) und der gleichförmigen Dilatation von Raum oder Zeit (Willkürlichkeit des Raum- und des Zeitmaßes). Ein geometrischer und ein algebraischer Ausdruck der gleichen Koordinaten-

---

1) Das Ideal an Sicherheit wären — tatsächlich nicht existierende — Gleichungen, die vollständig „konventionell“, also frei von allen topologischen Folgen sind. Keine Beziehung zwischen irgendwelchen gegebenen Weltpunkten könnte demnach als auf mehr als eine Weise zugleich durch sie bestimmt gedacht werden. (Vgl. das Beispiel in Anm. 8, 518.) Es wären willkürliche Festsetzungen in der Form von Gesetzen.

2) Über die Forderung der Eliminierbarkeit aller nicht kinematischen Größen aus dem Gleichungssystem ohne Erweiterung der berechtigten Transformationsgruppe, deren Erfüllung man, wenn man will, als notwendig für eine genügende Definition des berechtigten Bezugssystems betrachten kann vgl. § 24 ff.

transformation lassen sich, wie aus der Existenz der kartesischen Geometrie hervorgeht, logisch durchaus vereinen. *Nur wird, indem man einer algebraisch definierten Transformation eine bestimmte geometrische Bedeutung beilegt, oder einer geometrisch aufgefaßten Transformation eine bestimmte algebraische Form gibt, damit zugleich den Bezugssystemen, für welche die Gleichsetzung von algebraischer Form und geometrischer Bedeutung gilt, ein bestimmter anschaulich geometrischer Charakter zugeschrieben, der im Sinne der Ausdrucksweise der kartesischen Geometrie aufzufassen ist und demnach keinen Widerspruch zu der Definition des Bezugssystems, als einer reinen Zahlenmannigfaltigkeit bildet.* So muß man ein Bezugssystem, dessen durch  $x_1' = x_1 + a_1 \dots x_4' = x_4 + a_4$  gegebene Transformationen man als reine Verschiebungen (Translationen) bezeichnet, konsequenterweise ein geradliniges nennen. Ebenso könnte man geometrische Eigenschaften des Bezugssystems, aus der Äquivalenz des algebraischen und des geometrischen Ausdrucks für einzelne Naturgesetze herleiten und sie so eventuell in direkte Beziehung zur empirischen Anschauung setzen (wenn man z. B. den Lichtweg, welcher die absolute Gerade der empirischen Anschauung bildet, als unbedingt „geradlinig“ und andererseits als durch lineare Koordinatengleichungen gegeben ansetzte). Indessen entspricht es der universellen Bedeutung der Bezugssysteme für die Form sämtlicher Naturgesetze besser, ihre geometrischen Eigenschaften aus der zweifachen Form der ebenfalls allen einzelnen Naturgesetzen übergeordneten Relativitätspostulate abzuleiten. Eine engere Auswahl und Definition physikalisch ausgezeichneteter „berechtigter“ Bezugssysteme, als sie auf algebraischem Wege erreicht werden kann, ist durch geometrische Aussagen offenbar nur dann möglich, wenn für irgendein Relativitätspostulat oder physikalisches Gesetz nur ein geometrischer und kein algebraischer Ausdruck gegeben ist. Da aber die Kartesische Geometrie für alle geometrischen Begriffe und Beziehungen der euklidischen Geometrie sowohl wie der nicht euklidischen Geometrie widerspruchsfreie algebraische Ausdrücke zu liefern imstande ist, so ist es erlaubt, die genannte Möglichkeit als ausgeschlossen zu betrachten. *Demgemäß wird im folgenden stets vorausgesetzt, daß für alle überhaupt aufgestellten physikalischen Gesetze und Relativitätspostulate auch algebraische Ausdrücke gegeben sind.*



## C. Die Bedingungen der prinzipiellen Bestimmbarkeit eines berechtigten Bezugssystems in der Wirklichkeit.

### I. Die willkürlichen Festsetzungen.

§ 23. Die willkürlichen Festsetzungen, durch welche, wie erwähnt, die nähere Bestimmung des Bezugssystems innerhalb der durch die Gesamtheit der physikalischen Gleichungen definierten Klasse der berechtigten Bezugssysteme erfolgen soll, sind am besten direkt in der wirklichen Erscheinungswelt vorzunehmen. Ihre Einfügung in das durch die aufgestellten Gesetze gegebene Weltbild würde — abgesehen von allen Schwierigkeiten der Ausführung — nur eine Komplizierung dieses Weltbildes bedeuten, ohne ihm irgendwelche notwendige, durch Beobachtungstatsachen geforderte Züge zuzufügen.

Man kann sich die willkürlichen Festsetzungen einfach dadurch getroffen denken, daß für eine endliche oder unendliche Menge irgendwie ausgezeichnete Punkte der Erscheinungswelt — gegeben etwa durch das Aufblitzen von Lichtpunkten — alle oder ein Teil ihrer Koordinatenzahlen willkürlich angegeben werden. Zahl und Art der zur völligen Bestimmung eines Bezugssystems willkürlich zu treffenden Festsetzungen ergeben sich direkt aus dem Umfang und der Beschaffenheit der Gruppe von Transformationen, denen gegenüber das Gleichgewichtssystem invariant ist, das neben den Festsetzungen zur Bestimmung des Bezugssystems dienen soll. Es müssen eben so viele Koordinatenzahlwerte willkürlich festgelegt werden, daß keine der berechtigten Transformationen, welche die durch das Gleichungssystem nicht voneinander unterscheidbaren berechtigten Bezugssysteme verbinden, ausgeführt werden kann, ohne daß mindestens eine der festgelegten Zahlen sich ändert. Bei allen endlichen Gruppen berechtigter Transformationen — wie sie z. B. von den Relativitätstheorien der Geschwindigkeit gefordert werden — sind hierzu endlich viele Koordinatenfestsetzungen notwendig und hinreichend, nämlich gerade so viele, wie die berechnete Gruppe willkürliche Parameter enthält. Diese Festsetzungen können ohne Schwierigkeit an irgendwelchen Erscheinungspunkten getroffen werden. Besteht dagegen, durch weitgehende Relativitätspostulate gefordert, Invarianz der physikalischen Gleichungen bezüglich einer unendlichen Transformationsgruppe, so bleiben unendliche Mengen

von Koordinatenzahlen, d. h. ganze Funktionen von Ort und Zeit in endlichen oder unendlichen Bereichen der willkürlichen Festsetzung vorbehalten. Hier können bei der wirklichen Ausführung der Festsetzungen natürlich Schwierigkeiten auftreten, doch folgen diese allein aus der unendlichen Menge der willkürlichen Zahlangaben, und diese ist selbst eine notwendige Folge der als gültig angenommenen Relativitätspostulate.

## II. Die Geschlossenheit des physikalischen Gleichungssystems.

§ 24. Weit wichtiger als die Kennzeichnung eines einzelnen unter den berechtigten Bezugssystemen durch willkürliche Festsetzungen ist indessen die Aufgabe, auch in der wirklichen Welt die berechtigten Bezugssysteme von den unberechtigten zu unterscheiden oder, wenn alle willkürlichen Festsetzungen getroffen sind, das zugehörige berechnete Bezugssystem wirklich festzulegen. Diese Aufgabe muß, da die Beobachtungen nur die stetigen von den unstetigen Bezugssystemen unterscheiden lassen, mittels der physikalischen Gleichungen gelöst werden, welche die gesuchten berechtigten Bezugssysteme begrifflich bestimmen. Daß diese begriffliche Bestimmung keineswegs die Möglichkeit der wirklichen Unterscheidung oder Aufindung des berechtigten Bezugssystems auch nur prinzipiell, d. h. bei Vernachlässigung aller technischen und mathematischen Schwierigkeiten, in sich schließt, erkennt man am einfachsten an einem Beispiel.<sup>1)</sup>

Es seien etwa als einzige physikalische Gesetze die Erhaltungssätze von Energie und Impuls in der Form:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial T_{14}}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial T_{24}}{\partial x_4} = 0$$

gegeben, und dazu der Satz, daß jede der Größen  $T_{hk}$  wie das entsprechende Koordinatenprodukt  $x_h \cdot x_k$  transformiert, so sind damit zwar schon die berechtigten Koordinatentransformationen auf die linearen Transformationen beschränkt und wenn zwanzig Weltpunktkoordinaten entsprechend den zwanzig unbestimmten Konstanten der allgemeinen linearen Transformation willkürlich festgesetzt sind,

1) Nach A. Einstein, Phys. Zeitschr. 15. p. 178. 1914.

so existiert sicher nur ein einziges Bezugssystem, in dem die Festsetzungen und die angegebenen Gesetze gelten und das also durch diese vollständig definiert ist. Aber der Versuch, zu erkennen, ob ein durch irgendwelche empirischen Meßinstrumente in der Wirklichkeit festgelegtes Bezugssystem mit diesem begrifflich bestimmten Systeme übereinstimmt oder nicht, muß notwendig scheitern, und zwar scheitert er im angenommenen Falle, wie leicht ersichtlich, an der Unmöglichkeit, die nicht kinematischen und daher nicht direkt mit dem zu prüfenden Bezugssysteme festgelegten Größen  $T_{ik}$  in irgendeinem Weltpunkte ohne Hinzuziehung anderer als der genannten Gesetze zu messen.

§ 25. Man sieht nun leicht ein, daß ganz allgemein die Unterschiede irgendwelcher nichtkinematischer Größen, die empirisch direkt nur durch die sogenannten „Sinnesempfindungsqualitäten“<sup>1)</sup> (Helligkeit, Farbe, Rauigkeit usw.) gegeben sein können, in zwei verschiedenen Bezugssystemen an sich niemals zu einer sicheren Entscheidung der hier vorliegenden Frage dienen können, ob ein in der Wirklichkeit durch irgendwelche praktische Meßverfahren und Instrumente festgelegtes Bezugssystem bezüglich eines ebenfalls gegebenen Gleichungssystems, in dem die oben genannten Größen vorkommen, ein berechtigtes ist oder nicht. Denn notwendige Bedingung einer solchen Entscheidung ist es, daß die erwähnten, durch Sinnesempfindungsqualitäten gegebenen Größen direkt, d. h. unabhängig von ihren Beziehungen zu reinen Raum- und Zeitgrößen gemessen werden. Hierzu aber ist erstens eine Messung der entsprechenden Sinnesempfindungen aneinander und zweitens die Kenntnis einer Größenbeziehung zwischen der Intensität der Empfindung und der durch sie wahrgenommenen physikalischen Größe nötig. Die zweite Bedingung könnte durch Aufstellung besonderer Abbildungspostulate (z. B. Intensität der Lichtempfindung proportional der physikalischen Helligkeit) erfüllt werden. Dagegen ist die erste unerfüllbar, da alle Maßbeziehungen zwischen Empfindungsintensitäten selbst durchaus subjektiv und unbestimmt sind. Eine über das Topologische wesentlich hinausgehende Unterscheidung zwischen berechtigten und nicht berechtigten Bezugssystemen

---

1) Vgl. E. Mach, l. c., p. 300.

ist also, wie behauptet, auf dem oben genannten Wege nicht möglich.

§ 26. Tatsächlich werden auch in der Physik die Maße der durch Sinnesempfindungsqualitäten gegebenen physikalischen Eigenschaften durchweg auf reine Raum- und Zeitgrößen zurückgeführt, Farben und Tonhöhe auf Wellenlänge bzw. Schwingungszahl pro Sekunde, Kraft auf Beschleunigung, Lichtintensität auf Entfernung der Lichtquelle usw. Als objektiv gültige Beobachtungstatsachen werden dagegen Urteile über die Gleichheit oder Ungleichheit von Sinnesempfindungsqualitäten, speziell der Helligkeit und Farbe, angenommen, die räumlich und zeitlich benachbarten Gebieten zugeordnet sind und nach dem Grundsatz (Abbildungsgesetze) verwertet, daß verschiedenen Empfindungsqualitäten verschiedene Werte der entsprechenden physikalischen Größen zuzuordnen sind. Doch erhält man mittels dieses Grundsatzes, auf dem wohl jeder Vergleich des physikalischen Weltbildes mit der Wirklichkeit fußt, und der speziell die Photometrie beherrscht (Lummer-Brodhunsches Photometer, Fettfleckphotometer) nur rein topologische Aussagen über die Existenz oder Nichtexistenz irgendwelcher Grenzpunkte — Linien, Flächen usw. — in der Erscheinungswelt.

§ 27. *Es bleiben demnach nur die in den physikalischen Gesetzen enthaltenen Beziehungen reiner Raum- und Zeitgrößen zur Entscheidung der Frage übrig, ob ein in der Wirklichkeit gegebenes Bezugssystem ein berechtigtes ist oder nicht. Damit diese Entscheidung möglich sei, ist vor allem notwendig, daß die aus dem Gesetzsystem folgenden „kinematischen“<sup>1)</sup> Maßbeziehungen keinen weiteren Transformationen gegenüber kovariant sind als die Gesetze selbst, aus denen sie abgeleitet sind.* Denn man kann mittels dieser Beziehungen jedenfalls nicht zwei Bezugssysteme unterscheiden, wenn sie in beiden erfüllt oder in beiden nicht erfüllt sind. Ein System physikalischer Gesetze, das die eben genannte Bedingung erfüllt, möge ein (kinematisch) *geschlossenes* heißen. In einem solchen Systeme müssen offenbar die Trans-

---

1) Als „kinematisch“ bezeichne ich der Kürze halber alle reinen Raum- und Zeitgrößen und die Beziehungen zwischen solchen, also alle Größen und Beziehungen, die mathematisch allein durch Koordinaten, Koordinatenfunktionen, -differentiale, -integrale ausgedrückt sind, z. B. auch einfache Raum- und Zeitstrecken.

formationsgesetze auch für alle nicht kinematischen Größen aus ihren Beziehungen zu den Raum- und Zeitgrößen mit Notwendigkeit folgen, und brauchen nicht als besondere Gesetze aufgestellt zu werden, wie bei dem oben gegebenen Beispiel eines nicht geschlossenen Gesetzsystems.

Ein nicht geschlossenes System genügt also zur Bestimmung eines berechtigten Bezugssystems in der Wirklichkeit keinesfalls und es fragt sich daher, ob und unter welchen Umständen ein geschlossenes Gleichungssystem hierzu prinzipiell, d. h. abgesehen von allen technischen und mathematischen Schwierigkeiten die Möglichkeit bietet.

### III. Die Existenz und Erkennbarkeit der Bestimmungsmittel in der Wirklichkeit.

#### a) Die Idealinstrumente.

§ 28. Für die Erfüllung dieser Aufgabe kommen dabei nach dem Gesagten allein die aus dem Gesetzsystem folgenden Beziehungen zwischen reinen Raum- und Zeitgrößen (Länge, Zeit, Geschwindigkeit) in Betracht, durch die man sich das Gesetzsystem daher ersetzt denken darf.

Die Träger dieser Beziehungen, d. h. die räumlich-zeitlich ausgedehnten Dinge, die oder deren Teile die Beziehungen erfüllen, will ich *Idealinstrumente* der Raum- und Zeitmessung nennen und zwar *Idealinstrumente* nicht etwa deshalb, weil sie stets unwirklich sein müßten, sondern weil alle mit ihnen gewinnbaren Messungsergebnisse theoretisch, durch die genannten Beziehungen, gegeben sind, die auch als ihre kinematischen Definitionen betrachtet werden sollen.<sup>1)</sup> Beispiele einfacher Idealinstrumente sind der starre Körper, der sich selbst überlassene Massenpunkt, der Lichtimpuls im Vakuum usw.,

1) Nichterfüllung der Beziehungen in der Wirklichkeit ist also als Nichtvorhandensein von wirklichen Idealinstrumenten der betreffenden Art zu deuten. Diese Auffassung ist beim „starrten Körper“ und „sich selbst überlassenen Massenpunkten“ wohl die allgemein übliche, dagegen nicht beim Licht im Vakuum, das man lieber durch seine empirischen Eigenschaften definieren dürfte. Sie ist trotzdem hier und im folgenden einheitlich der Betrachtung zugrunde gelegt, weil doch die eigentlichen Maßbestimmungen von Raum und Zeit theoretisch, und zwar per Konvention (§ 16), erfolgen müssen. Ein sachlicher Gegensatz zwischen dieser und der anderen, empirischen (beim Licht üblichen) Auffassung besteht natürlich nicht.

die nach klassischen Theorien kinematisch etwa durch die Beziehungen

$$\frac{dr_{12}}{dt} = 0, \quad \text{resp.} \quad \frac{dv}{dt} = 0, \quad \text{resp.} \quad |v| = c$$

gleich einer universellen Konstanten usw. zu definieren wären (vgl. § 53 ff.), wo  $v$  ( $v_x, v_y, v_z$ ) die Geschwindigkeit des Massenpunktes bzw. des Lichtimpulses und  $r_{12}$  die räumliche Entfernung zweier gleichzeitiger Punkte des starren Körpers bezeichnet. Man mißt mit den Idealinstrumenten, indem man Instrument und Meßgegenstand ganz oder teilweise zur Deckung bringt und die für das Instrument geltenden Maßbeziehungen auf den Meßgegenstand mittels des aus dem zweiten Abbildungspostulate, § 6, folgenden Grundsatzes überträgt, daß zwei zusammenfallende Punkte der Erscheinungswelt stets die gleichen Koordinatenzahlen besitzen.

Ob diese die Meßinstrumente als solche definierenden Beziehungen Grundgesetze der Physik darstellen oder ob sie aus anderen für den inneren Aufbau der Idealinstrumente oder ihre Beziehungen zu anderen physikalischen Dingen geltenden Gesetzen abgeleitet sind, ist dabei belanglos.

β) Die wirkliche Existenz der Idealinstrumente.

§ 29. Denkt man sich die zu einem geschlossenen Gleichungssystem gehörenden willkürlichen Festsetzungen und dazu die Resultate sämtlicher nach dem Gesetzsystem mit den in ihm definierten Idealinstrumenten ausführbarer Messungen gegeben, so ist dadurch nach der Definition des geschlossenen Gesetzsystems und dem in § 20 Gesagten ein berechtigtes Bezugssystem begrifflich vollkommen bestimmt. Es genügt hierzu ein Teil der Instrumente, wenn die Theorie dieses Teils keinen anderen als den berechtigten Transformationen gegenüber invariant ist.

Jetzt handelt es sich aber um die Frage, unter welchen Bedingungen und wie es prinzipiell möglich sei, diese Bestimmung aus dem Weltbilde des gegebenen Gesetzsystems in die wirkliche Welt der Erscheinungen zu übertragen und das durch bloß gedachte Messungen begrifflich bestimmte Bezugssystem durch wirkliche Messungen in der Wirklichkeit festzulegen.

§ 30. Die erste Bedingung dieser Möglichkeit ist, daß eine zur gedanklichen Bestimmung des Bezugssystems hinreichende

Anzahl der durch das vorgelegte Gleichungssystem definierten Idealinstrumente nicht nur begrifflich, sondern auch in der Wirklichkeit als sinnlich wahrnehmbare Gegenstände existieren oder prinzipiell, d. h. abgesehen von allen technischen und mathematischen Schwierigkeiten, herstellbar sind. Dabei müssen offenbar die einzelnen Idealinstrumente nicht nur im ganzen und indirekt durch ihre Wirkungen sinnlich wahrnehmbar sein, sondern es müssen sich auch von ihren Teilen, auf die sich eigentlich die Theorie bezieht, so viele, wie zur Messung unbedingt notwendig sind, einzeln sinnlich unterscheiden lassen. Es läßt sich daher z. B. eine wirkliche Raummessung keineswegs, auch nicht im Prinzip, auf einer Theorie des starren Elektrons oder Atoms aufbauen. Man kann allgemein sagen, daß Idealinstrumente, die für die wirkliche Raum- und Zeitmessung prinzipiell brauchbar sein sollen, durch Gesetze über die räumlich-zeitlichen Maßbeziehungen „makroskopischer“ Erscheinungsgegenstände gegeben sein müssen. Entsprechend der in § 15 eingeführten Voraussetzung, daß die auf topologische Beziehungen solcher Gegenstände bezüglichen Beobachtungen mit absoluter Genauigkeit gelten, soll hier auch die Gültigkeit der makroskopischen Maßbeziehungen — soweit sie überhaupt zu Recht bestehen — als eine absolut genaue angenommen werden. *Es soll also vor allem von all' den Komplikationen abgesehen werden, die für die makroskopischen Erscheinungsgegenstände aus einer atomistischen Auffassung der physikalischen Körper sich dadurch ergeben, daß nach dieser Auffassung alle als scharf wahrgenommenen räumlich-zeitlichen Grenzen zwischen den einzelnen Erscheinungen in stetige Übergänge statistischer Mittelwerte aufgelöst werden, während alle Unstetigkeiten dem Bereiche des unwahrnehmbar Kleinen angehören.* Nur im Bereich des sinnlich Wahrnehmbaren darf hiernach vollständig oder wenigstens beliebig genaue Verwirklichung der Idealinstrumente verlangt werden. Unbedingt notwendig zu einer rationellen Raum- und Zeitmessung aber ist, daß für die etwa unvermeidlichen makroskopischen Fehler der Verwirklichung sichere Schranken bestehen und bekannt sind.

§ 31. Als Folge der geforderten Existenz oder prinzipiellen Herstellbarkeit der Idealinstrumente in der Wirklichkeit ist es anzusehen, daß ihre nach ihrer Theorie denkbaren Lagen, Konfigurationen und Bewegungen auch in der Wirklichkeit

prinzipiell möglich sind; wenigstens gilt das dann, wenn man die Möglichkeit dieser Lagen und Bewegungen als zur Definition der Instrumente gehörig betrachtet. In jedem Falle muß die prinzipielle Möglichkeit bzw. Ausführbarkeit soviel verschiedener Lagen und Bewegungen in der Wirklichkeit gefordert werden, wie bei der begrifflichen Bestimmung des Bezugssystems unbedingt als möglich gedacht werden müssen. Diese sowie die vorher angegebene weitergehende Forderung sind mit Sicherheit dann erfüllt, wenn die Theorie der Idealinstrumente eine vollständige ist und alle überhaupt für die Instrumente in Wirklichkeit geltenden kinematischen Naturgesetze umfaßt. Unbedingt zu verlangen ist hier nur, daß sie von dem durch Beobachtungen verifizierbaren, d. h. rein topologischen Inhalte der Gesetze soviel enthält, daß durch den nicht aus der Theorie der Instrumente folgenden Rest nicht mehr von den mit der Theorie vereinbaren Einzelmessungen unmöglich gemacht werden<sup>1)</sup> als bei der begrifflichen Bestimmung des Bezugssystems allenfalls entbehrt (als unmöglich gedacht) werden können. Wie viele das sind, kann nur an der einzelnen gegebenen Theorie, und zwar rein mathematisch, entschieden werden. Daß zwischen der Theorie und den wirklichen Naturgesetzen kein beobachtbarer Widerspruch besteht, folgt schon aus der Möglichkeit, die durch jene definierten Idealinstrumente zu verwirklichen.

§ 32. Es ist im Vorhergehenden die Existenz von Naturgesetzen der wirklichen Welt vorausgesetzt und das „prinzipiell Mögliche“ mit dem identifiziert, was keinem Naturgesetze — und natürlich keinem Gesetze der Algebra oder Logik — widerspricht und damit die „technischen und mathematischen“ Schwierigkeiten mit denen, die sich bei der mit allen Naturgesetzen vereinbaren Verwirklichung eines Dinges oder Vorganges noch einstellen.

---

1) Nur die für die Meßinstrumente selbst und unabhängig von der Art ihrer Verwirklichung geltenden Naturgesetze können irgendwelche Messungen allgemein unmöglich machen. Alle anderen prinzipiellen Hindernisse, die bei der Ausmessung irgend welcher konkreter Erscheinungsgegenstände auftreten, hängen von der besonderen Beschaffenheit des Meßgegenstandes ab. Sie fallen fort bei Messungen im reinen Vakuum, wo die Punkte und Punktmannigfaltigkeiten, deren Koordinaten zu bestimmen sind, allerdings erst durch die Meßinstrumente selbst versinnlicht werden.



Ein in allen Fällen brauchbares und absolut sicheres Kriterium zur Unterscheidung des prinzipiell Möglichen aber praktisch Unausführbaren von dem auch prinzipiell, d. h. naturgesetzlich Unmöglichem in der Wirklichkeit ist damit natürlich nicht gegeben und kann auch nicht gegeben werden, bevor nicht entweder alle Naturgesetze bekannt sind oder alles ihnen nicht Widersprechende praktisch ausgeführt werden kann. Das sind unerreichbare Ideale der Theorie und der Technik.

γ) Die Erkennbarkeit der Idealinstrumente in der Wirklichkeit.

§ 33. Zu einem rationellen Gebrauch der Idealinstrumente ist außer ihrer wirklichen Existenz auch noch notwendig, daß die Instrumente sowohl im ganzen wie auch in allen einzelnen zu den Messungen notwendigen Teilen in der Wirklichkeit sicher wiedererkannt und mit ihren theoretischen Bildern identifiziert werden können. *In der kinematischen Definition der Idealinstrumente bilden nur die topologischen Gesetze, die aus ihr folgen, Erkennungsmerkmale, die der Beobachtung zugänglich und somit in der Wirklichkeit brauchbar sind. Alle voneinander topologisch unabhängigen räumlich-zeitlichen Maßbeziehungen können per Konvention durch geeignete Wahl des Bezugssystems wahr gemacht werden, zu dessen Bestimmung sie eben auf diese Weise dienen.* Die Eindeutigkeit einer solchen topologischen Kennzeichnung in der Wirklichkeit ist in keinem Falle a priori gewiß. So ist es durchaus denkbar, daß es mehrere unvereinbare Arten absolut starrer Körper gäbe, indem die Körper jeder einzelnen Art aneinander gemessen alle topologischen Bedingungen der Starrheit<sup>1)</sup> erfüllten, aber nicht mit den Körpern einer anderen Schar zusammen. Jede Schar würde so Meßresultate liefern, die in sich widerspruchsfrei wären, aber unvereinbar mit den Resultaten jeder anderen Schar. Ebenso gelten dieselben topologischen Gesetze für jede unbeschränkt interferenzfähige Linie des optischen Spektrums. Doch ist in diesem Falle eine eindeutige topologische Kennzeichnung einer einzelnen unter endlich vielen Linien in der Wirklichkeit dadurch möglich, daß von zwei verschiedenen,

1) Näheres über diese leicht ableitbaren Bedingungen findet sich in § 55.

aber zusammen auftretenden Linien die eine vor der anderen stets in der gleichen Weise, nämlich durch die größere bzw. kleinere Ablenkbarkeit oder die kleinere bzw. größere Breite ihrer Interferenzstreifen topologisch ausgezeichnet ist. Wie in diesem Beispiele, so wird offenbar auch *allgemein die Menge* der für jedes einzelne Idealinstrument sich ergebenden topologischen Gesetze und damit die Menge seiner *Erkennungsmerkmale um so größer, je mehr verschiedene Instrumente man zusammen durch ihre Theorie definiert*. So können die „sich selbst überlassenen“ Massenpunkte zusammen mit den starren Körpern erheblich genauer gekennzeichnet werden, nämlich etwa als Massenpunkte, deren mittels starrer Maßstäbe gemessene Verhältnisse ihrer gleichzeitigen Entfernungen voneinander zeitlich konstant bleiben<sup>1)</sup>, wenn die Punkte gleichzeitig von dem gleichen Raumpunkte aus abgeschleudert werden, als wenn man etwa nur den aus ihrer Bewegungsgleichung allein folgenden topologischen Satz benutzt, daß zwei sich selbst überlassene Massenpunkte, die einander in zwei verschiedenen Augenblicken berühren, auch dauernd vereint bleiben.

§ 34. Auf andere und meist wohl einfachere Weise gelangt man zu einer genaueren Kennzeichnung der Idealinstrumente in der Wirklichkeit dadurch, daß man ihre nicht kinematischen Eigenschaften neben den topologischen als Erkennungsmerkmale heranzieht. Unbrauchbar sind hier alle Maßangaben für Sinnesempfindungsqualitäten (Tonhöhe, Farbe, Helligkeit usw.), da sie, wie schon erwähnt (§ 25), subjektiv und unbestimmt sind, soweit sie nicht auf Raum- und Zeitgrößen (Wellenlänge usw.) zurückgeführt werden. Dagegen sind brauchbar die Eigenschaften der bloßen Sichtbarkeit (des Lichts), Tastbarkeit (des starren Körpers) und Hörbarkeit, die chemische Zusammensetzung von Stoffen, die Lage einer Linie im Linienspektrum eines Elements, kurz, alle Eigenschaften, die nicht stetig in andere übergehen (wie die Tonhöhen und Farben ineinander), sondern die, jede für sich, durch endliche wahrnehmbare Unterschiede von allen andern der gleichen Art getrennt sind. Voraussetzung ist allerdings, daß

---

1) Gleichzeitigkeit und das Verhältnis gleichzeitiger Entfernungen können durch starre Maßstäbe (mit Skalen) topologisch festgestellt werden (vgl. § 55).

die Trennung bei allen stetigen Änderungen des Bezugssystems bestehen bleibt.

§ 35. Sollte auch auf die eben angegebene Weise die eindeutige Kennzeichnung einer Idealinstrumentenart nicht erreicht werden können, was a priori ja denkbar ist<sup>1)</sup>, so bleibt nur der Ausweg, ein beliebiges individuell bestimmtes Instrument auszuwählen und zu fixieren (aufzubewahren) und durch direkten Vergleich der anderen Instrumente mit ihm die Art, zu der es gehört, von den übrigen generell nicht unterscheidbaren Instrumentenarten zu kennzeichnen. Dies Verfahren führt seiner Natur nach stets zum Ziele. Als Beispiel könnte die Benutzung des Planetensystems als Prototyp des „sich selbst überlassenen“ Massensystems gelten, insofern als es in der klassischen Mechanik eine wirkliche Kontrolle für das Fehlen jeder translatorischen Beschleunigung nicht gibt.<sup>2)</sup>

#### d) Eine weitere Frage.

§ 36. Es sei nun vorausgesetzt, daß die eben gestellten Forderungen der Existenz und Erkennbarkeit der durch ein geschlossenes Gleichungssystem definierten Idealinstrumente erfüllt seien. Dann ist jede einzelne der Messungen, die bei der begrifflichen Bestimmung des Bezugssystems als möglich gedacht werden müssen, auch in der Wirklichkeit prinzipiell ausführbar und ihr Ergebnis objektiv bestimmt.

Es scheint zunächst, daß damit die prinzipielle Möglichkeit, ein berechtigtes Bezugssystem bei gegebenen willkürlichen Festsetzungen auch in der Wirklichkeit zu bestimmen, allgemein gesichert ist.

Sieht man indessen genauer zu, so findet man als Tatbestand nur folgendes: Wirklich oder vielmehr in der Wirklichkeit prinzipiell möglich ist unter den genannten Voraussetzungen

1) Man braucht sich z. B. nur vorzustellen, daß bei dem vorhin angeführten Beispiel mehrerer unvereinbarer Arten starrer Körper die Körper aller Arten in allen nicht kinematischen Eigenschaften (Farbe, Oberflächenbeschaffenheit usw.) vollständig übereinstimmen. Doch würde jeder Fall dieser Art der allgemeinen methodologischen Voraussetzung der Naturwissenschaften widersprechen, daß Ursachen von genau der gleichen empirisch gegebenen Art (Eigenschaften der Meßinstrumente) auch gleichartige Folgen (Maßergebnisse) haben müssen.

2) Vgl. § 57 und E. Gehrcke, Verh. d. D. Phys. Gesellsch. 15. p. 260—266. 1913.

jede einzelne Messung und ferner: die Gesamtheit der Ergebnisse dieser Messungen reicht zur begrifflichen Bestimmung des Bezugssystems hin. Eine weitere Frage aber ist es, ob die Messungen mit ihren Ergebnissen auch zur wirklichen Ausführung der Bestimmung genügen.

Gegeben ist, kurz gesagt, eine *begriffliche* Bestimmung des Bezugssystems durch eine (unendliche) Gesamtheit von Mitteln der Wirklichkeit, den einzelnen Messungen, gefordert aber ist die prinzipielle Möglichkeit einer *wirklichen* Bestimmung mit eben diesen Mitteln.

Daß dieses aus jenem keineswegs unbedingt folgt und unter welchen neuen Bedingungen die wirkliche Bestimmung des Bezugssystems prinzipiell möglich ist, soll im folgenden gezeigt werden.

Königsberg i. Pr., den 15. Oktober 1915.

(Eingegangen 21. Oktober 1915.)

---