Über einige Beziehungen, die mit der Funktionalgleichung der Riemannschen ζ-Funktion äquivalent sind.

Von

Hans Hamburger in Berlin.[1]

Wie an anderer Stelle gezeigt wurde[2], gilt der Satz:

Ist $f(s)$ *gleich einer ganzen Funktion von endlichem Geschlecht dividiert durch ein Polynom, so ist* $f(s) = \text{konst.}\, \zeta(s)$, *wenn außerdem*

1. $f(s)$ *für* $\Re(s) > 1$ *durch eine absolut konvergente Dirichletsche Reihe vom Typus* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ *dargestellt wird,*

2. $f(s)$ *der Funktionalgleichung*

$$\text{(A)} \qquad \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) f(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) f(1-s)$$

genügt.

Dieser Satz bleibt offenbar nicht mehr richtig, wenn man statt 1. nur verlangt, daß $f(s)$ für $\Re(s) > 1$ sich durch eine absolut konvergente Dirichletsche Reihe des allgemeineren Typus $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^s}$ darstellen lasse; denn dann kann man, wie man leicht einsieht, aus der Theorie der L-Reihen

---

[1]) Diese Note gibt unverändert den Inhalt eines Vortrages wieder, den ich im Hamburger Mathemat. Kränzchen am 5. Okt. 1921 gehalten habe; ihre Resultate habe ich bereits Ostern 1921 einigen befreundeten Mathematikern mitgeteilt. Bei meiner Rückkehr aus Hamburg am 10. Okt. fand ich einen Brief von Herrn C. Siegel (Göttingen vor, der einen neuen Beweis des am Anfang dieser Note zitierten Satzes über die ζ-Funktion enthält. Der Siegelsche Beweis stimmt in wesentlichen Punkten mit dem hier veröffentlichten überein (§§ 1—2), ist aber in einer Hinsicht einfacher (vgl. Fußnote [16])). Ich betone, daß Herr Siegel, dessen Note auch in den Math. Ann. erscheinen wird, von meinen Untersuchungen keine Kenntnis hatte.

[2]) Hans Hamburger, Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion. 1. Mitteilung. Math. Zeitschr. 10 (1921), S. 240—254, im folgenden kurz mit 1. Mtlg. zitiert. Vgl. insbesondere Satz 1, S. 240—241.

unendlich viele Funktionen herleiten, die allen gestellten Bedingungen genügen. Andererseits sind die beiden Typen der Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^s}$ bezüglich ihres funktionentheoretischen Verhaltens in nichts voneinander verschieden, so daß man die Spezialisierung $\lambda_n = n$, die mithin für den zitierten Satz über die ζ-Funktion wesentlich ist, als eine Voraussetzung von anderem, etwa mehr arithmetischem Charakter anzusehen hat.

In der vorliegenden Note habe ich mir nun die Aufgabe gestellt, allein aus den allgemeineren funktionentheoretischen Voraussetzungen:

$$1.\ f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^s}, \quad 2.\ f(s) \textit{ genügt der Funktionalgleichung } (\mathbf{A}),$$

einige Folgerungen zu ziehen. Die hier angestellten Untersuchungen führen zu dem Ergebnis, daß sich **(A)** durch andere mit ihr äquivalente bemerkenswerte Relationen **(B)**, **(C)**, **(D)**, **(E)** ersetzen läßt; hierbei werden die Relationen **(A)** bis **(E)** in dem Sinne miteinander äquivalent genannt, daß gleichzeitig mit der einen von ihnen die vier übrigen gelten. Als Nebenresultat ergibt sich ein neuer Beweis des oben zitierten Satzes über die ζ-Funktion (§ 3).

Um das Ziel der folgenden Betrachtungen deutlich zu machen, seien hier die mit **(A)** äquivalenten Relationen angeführt, die man erhält, wenn man in **(A)** für $f(s)$ speziell die Funktion $\zeta(s)$ einsetzt; in diesem Falle lauten die abgeleiteten Relationen:

(B) *die ϑ-Relation*:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 \tau} = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{\tau}},$$

(C) *die Partialbruchzerlegung der Funktion* $i \cot i\pi z$:

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\pi n z} = \frac{1}{\pi z} + \frac{2z}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 + n^2},$$

(D) *die Fourierentwicklung*:

$$\sum_{n=1}^{m} (y - n) = \frac{y^2 - y}{2} - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\cos 2\pi n y - 1), \quad m < y < m+1,$$

(E) *die Poissonsche Summationsformel*[3]):

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) e^{inu} \, du;$$

---

[3]) Vgl. A. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen, Leipzig 1903, S. 96; dort finden sich auch genauere Literaturangaben.

(E) gilt für alle Funktionen $\varphi(u)$, die in jedem endlichen Intervall von beschränkter Variation sind und im Unendlichen gewissen Konvergenzbedingungen genügen.

Die Äquivalenz der fünf Beziehungen ist wohl bereits für die speziellen hier in der Einleitung angegebenen Formeln nicht allgemein bekannt. Beispielsweise ist oft die ϑ-Relation **(B)** aus Formel **(E)** abgeleitet worden[4]), es ist aber wohl noch nicht bemerkt, daß auch umgekehrt **(E)** aus **(B)** folgt.

Den folgenden Betrachtungen, die zu sinngemäßen Verallgemeinerungen der Formeln **(B)** bis **(E)** führen, ist statt **(A)** eine etwas allgemeinere Funktionalgleichung zugrunde gelegt (vgl. die Beziehung **(I)**), die für manche Untersuchungen von Bedeutung ist. Ferner sind die Beziehungen, deren Äquivalenz im folgenden nachgewiesen wird, mit römischen Ziffern numeriert und durch den Druck besonders kenntlich gemacht. Im § 5 endlich sind die Voraussetzungen, unter denen diese Beziehungen miteinander äquivalent sind, in den Sätzen 1 bis 3 noch einmal zusammenfassend formuliert.

Im übrigen sei bemerkt, daß in der vorliegenden Note — im Interesse einer kurzen und übersichtlichen Darstellung — weniger auf Herausarbeitung einfacher Konvergenzbedingungen Wert gelegt wurde (insbesondere bei den Verallgemeinerungen der Poissonschen Formel), als darauf, mehrere scheinbar verschiedenartige Beziehungen als aus einer gemeinsamen Quelle entspringend aufzuweisen.

§ 1.

a) *$f(s)$ sei eine in der ganzen komplexen Zahlenebene definierte eindeutige analytische Funktion der Veränderlichen $s = \sigma + it$, sie sei ferner im Endlichen überall regulär bis auf die Stelle $s = 1$, wo $f(s)$ einen Pol erster Ordnung haben möge; mithin sei $(s-1)\,f(s)$ eine ganze Funktion, und zwar, wie weiter vorausgesetzt werde, von endlichem Geschlechte*[5]).

b) *$f(s)$ lasse sich in der Halbebene $\sigma > 1$ durch die absolut konvergente Dirichletsche Reihe*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^s} \tag{1}$$

darstellen.

---

[4]) Vgl. Krazer, l. c. Fußnote [2]), S. 96—98.

[5]) Auf die etwas weitergehende Voraussetzung **a)** des Satzes 1 der 1. Mtlg., S. 240 — $f(s)$ durfte dort endlich viele Pole haben — wird hier im Interesse der einfacheren Formeln verzichtet.

c) *Es sei*

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{l_n^s} \tag{2}$$

eine zweite für $\sigma > 1$ absolut konvergente Dirichletsche Reihe und es bestehe zwischen $f(s)$ und $g(s)$ die Funktionalgleichung

$$\boxed{\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) f(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) g(1-s)}. \tag{I}$$

Um von dieser Beziehung zu einer neuen mit ihr äquivalenten Beziehung überzugehen, die der ϑ-Relation **(B)** entspricht, bilde man das Integral[6])

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_R \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) f(s) \tau^{-\frac{s}{2}} ds;$$

hierbei bedeute R einen im positiven Sinne zu durchlaufenden rechteckigen Integrationsweg mit den vier Ecken $\gamma \pm iT$, $1-\gamma \pm iT$, $(\gamma > 1,\ T > 0)$.

Setzt man $2f(0) = -a_0$ und bezeichnet man mit b_0 das Residuum von $f(s)$ für $s = 1$, so wird nach dem Cauchyschen Integralsatz, da die zu integrierende Funktion nur für $s = 0$ und $s = 1$ Pole 1. Ordnung hat,

$$J = -a_0 + \frac{b_0}{\sqrt{\tau}}. \tag{3}$$

In den Punkten $\gamma \pm iT$ ist nun aber nach einer bekannten Abschätzung der Γ-Funktion[7])

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) f(s) = O\left(e^{-\frac{\pi}{4}|T|} |T|^{\gamma - \frac{1}{2}}\right) \tag{4}$$

und ebenso wegen (I) in den Punkten $1-\gamma \pm iT$. Mithin gilt mit Rücksicht auf das nach Voraussetzung endliche Geschlecht der ganzen Funktion $(s-1)f(s)$ nach einem oft angewandten funktionentheoretischen Satz von Phragmén-Lindelöf[8]) die Beziehung (4) gleichmäßig auf den beiden Seiten des Rechtecks R, die der Achse der reellen Zahlen parallel sind.

Geht man zur Grenze $T = \infty$ über, so ergibt sich demnach in Verbindung mit (3)

---

[6]) Vgl. Hj. Mellin, Über eine Verallgemeinerung der Riemannschen Funktion $\zeta(s)$. Acta soc. sc. fenn. **24** (1899), S. 39–40.

[7]) Es ist $\lim\limits_{t=\infty} \dfrac{\Gamma(\sigma + it)}{e^{-\frac{\pi}{2}|t|} |t|^{\sigma - \frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi}$. T. J. Stieltjes, Sur le développement de $\log \Gamma(a)$, Journ. de math. pures et appl. (4) **5** (1889), S. 425–445. Vgl. auch Lipschitz, Über die Darstellung gewisser Funktionen durch die Eulersche Summenformel, Journ. für die r. u. angew. Math. **56** (1859), S. 11–26, siehe insbes. S. 20.

[8]) E. Phragmén u. E. Lindelöf, Sur une extension d'un principe classique d'analyse, Acta Math. **31** (1908), S. 381–406, insbes. S. 385.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)f(s)\tau^{-\frac{s}{2}}ds-\frac{1}{2\pi i}\int_{1-\gamma-i\infty}^{1-\gamma+i\infty}=-a_0+\frac{b_0}{\sqrt{\tau}}$$

oder wegen (I)

$$a_0+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)f(s)\tau^{-\frac{s}{2}}ds=\frac{b_0}{\sqrt{\tau}}+\frac{1}{2\pi i}\int_{1-\gamma-i\infty}^{1+\gamma+i\infty}\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)g(1-s)\tau^{-\frac{s}{2}}ds$$

$$=\frac{b_0}{\sqrt{\tau}}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)g(s)\tau^{-\frac{1-s}{2}}ds,$$

nachdem man noch auf der rechten Seite von (5) die Integrationsveränderliche $1-s$ durch s ersetzt hat. Substituiert man für $f(s)$ bzw. $g(s)$ die für $\sigma=\gamma$ absolut konvergenten Dirichletschen Reihen (1) bzw. (2), so kann man wegen der absoluten Konvergenz Summation und Integration vertauschen und erhält aus (5)

$$a_0+\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)(\lambda_n^2\pi\tau)^{-\frac{s}{2}}ds=\frac{b_0}{\sqrt{\tau}}+\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{\sqrt{\tau}}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\left(\frac{l_n^2\pi}{\tau}\right)^{-\frac{s}{2}}ds.$$

Schließlich ergibt sich, wenn man unter Benutzung einer Formel von Mellin[9]) die Integration ausführt,

$$a_0+2\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\pi\lambda_n^2\tau}=\frac{b_0}{\sqrt{\tau}}+\frac{2}{\sqrt{\tau}}\sum_{n=1}^{\infty}b_n e^{-\frac{\pi l_n^2}{\tau}}$$

oder bequemer geschrieben, indem man außerdem für die Reihen die Bezeichnung $\vartheta(\tau)$ einführt,

$$\text{(II)}\qquad \boxed{\vartheta(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n e^{-\pi\lambda_n^2\tau}=\frac{1}{\sqrt{\tau}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n e^{-\frac{\pi l_n^2}{\tau}}},$$

wobei

$$(6)\qquad a_{-n}=a_n,\quad b_{-n}=b_n,\quad \lambda_0=l_0=0,\quad \lambda_{-n}=-\lambda_n,\quad l_{-n}=-l_n$$

gesetzt ist.

Andererseits folgt auch umgekehrt (I) ebenso aus (II), wie Riemann die Funktionalgleichung der ζ-Funktion aus der Jacobischen ϑ-Formel abgeleitet hat[10]), wofern nur die Dirichletschen Reihen (1) und (2) für $f(s)$ und $g(s)$ beide eine absolute Konvergenzhalbebene besitzen.

[9]) Hj. Mellin, Abriß einer einheitlichen Theorie der Gamma- und hypergeometrischen Funktionen. Math. Ann. 68 (1910), S. 305—337, vgl. insbes. S. 315—316 und S. 318—319.

[10]) B. Riemann, Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe. Gesammelte Werke, herausgegeben von H. Weber, 2. Aufl. Leipzig 1892, S. 145—153, siehe insbes. S. 146—147.

§ 2.

Man bilde nunmehr den Ausdruck

$$F(z) = z \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}} \vartheta\left(\frac{1}{\tau}\right) e^{-\pi z^2 \tau} \, d\tau. \tag{7}$$

Man überzeugt sich leicht, daß, wenn man für $\vartheta\left(\frac{1}{\tau}\right)$ erst die eine, dann die andere der beiden Reihen (II) in das Integral (7) einsetzt, sich beide Male für $\Re(z^2) > 0$ Integration und Summation vertauschen lassen[11]), und man erhält, indem man bei der gliedweisen Integration der linken Seite von (II) die Integralformel

$$\int_0^\infty e^{-\frac{a^2}{\tau} - b^2 \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} = \frac{2}{b} \int_0^\infty e^{-\frac{a^2 b^2}{u^2} - u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{b} e^{-2ab}$$

benutzt[12]),

$$\boxed{F(z) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^\infty a_n e^{-2\pi \lambda_n z} = \frac{b_0}{\pi z} + \frac{2z}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{b_n}{z^2 + l_n^2}}, \tag{III}$$

wo die Dirichletschen Reihen linker Hand für jeden Wert von z mit positivem reellem Teil absolut konvergieren.

Setzt man

$$G(z) = z \int_0^\infty \vartheta(\tau) e^{-\pi z^2 \tau} d\tau,$$

so erhält man die entsprechende Relation

$$\boxed{G(z) = b_0 + 2 \sum_{n=1}^\infty b_n e^{-2\pi l_n z} = \frac{a_0}{\pi z} + \frac{2z}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{z^2 + \lambda_n^2}}. \tag{III'}$$

Umgekehrt kann man aus (III) die Funktionalgleichung (I) ableiten,

---

[11]) Der genaue Wortlaut des Satzes, aus dem sich hier die Vertauschbarkeit von Summation und Integration folgern läßt, lautet: Ist $\sum_{\nu=1}^\infty u_\nu(x)$ eine für jeden positiven Wert von x absolut und gleichmäßig konvergente Reihe stetiger Funktionen und konvergiert die Reihe $\sum_{\nu=1}^\infty \int_0^\infty |u_\nu(x)| \, |\varphi(x)| \, dx$, so ist

$$\int_0^\infty \sum_{\nu=1}^\infty u_\nu(x) \varphi(x) \, dx = \sum_{\nu=1}^\infty \int_0^\infty u_\nu(x) \varphi(x) \, dx.$$

Wegen des Beweises dieses Satzes vgl. beispielsweise H. Hamburger, Beiträge zur Konvergenztheorie der Stieltjesschen Kettenbrüche, Math. Zeitschr. 4 (1919), Hilfssatz 2, S. 195–196.

[12]) Vgl. z. B. C. Jordan, Cours d'analyse (2. Aufl. 1894) II, S. 165–167.

indem man ebenso wie Riemann bei seinem ersten Beweis der Funktionalgleichung[13]) das Schleifenintegral

$$\int_L (-z)^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-2\pi\lambda_n z} dz$$

untersucht, unter L einen schleifenförmigen Integrationsweg verstanden, der sich längs der Achse der positiven reellen Zahlen vom unendlich fernen Punkte her dem Nullpunkte nähert, diesen im positiven Sinne umkreist und endlich längs der Achse der positiven reellen Zahlen zum unendlich fernen Punkt zurückkehrt.

Endlich ergibt sich auch (II) aus (III), wie man erkennt, wenn man den Landsbergschen Beweis[14]) der Jacobischen ϑ-Relation nachbildet.

§ 3.

Aus (III) folgt durch einfache Integration

$$(8)\qquad \frac{b_0}{\pi}\log z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\pi} \log(z^2 + l_n^2) = C + a_0 z - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi\lambda_n} e^{-2\pi\lambda_n z};$$

hierbei muß die Integrationskonstante C reell sein, wenn, wie übrigens nur in diesem Paragraphen vorausgesetzt werde, alle übrigen Größen auf beiden Seiten reell sind.

Nähert man sich mit z der Achse der imaginären Zahlen, d. h. geht man zur Grenze $x = 0$ ($z = x + iy$ gesetzt) über, so ist der imaginäre Teil des Ausdrucks links $i\left(\frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} b_n\right)$, wo der Index m durch die Relation $l_m < y < l_{m+1}$ bestimmt ist. Integriert man diesen Ausdruck noch einmal von 0 bis y, so erhält man nach Division durch i

$$(9)\qquad \frac{b_0}{2} y + \sum_{n=1}^{m} b_n (y - l_n), \qquad l_m < y < l_{m+1}.$$

Integriert man andererseits den imaginären Teil des Ausdrucks rechter Hand von (8) von 0 bis y und geht zur Grenze $x = 0$ über, so ergibt sich, indem man endlich diesen Ausdruck dem Ausdruck (9) gleichsetzt,

$$(\mathrm{IV})\qquad \boxed{\sum_{n=1}^{m} b_n (y - l_n) = \frac{a_0 y^2 - b_0 y}{2} - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^2} (\cos 2\pi\lambda_n y - 1), \quad l_m < y < l_{m+1}.}$$

---

[13]) l. c. Fußnote [10]), S. 146.

[14]) G. Landsberg, Zur Theorie der Gaußschen Summen und der linearen Transformationen der ϑ-Funktionen. Journ. f. reine u. angew. Math. **111** (1893), S. 234–253, vgl. insbes. S. 235–238.

Spezialisiert man die Dirichletschen Reihen (1) und (2), indem man $\lambda_n = l_n = n$ setzt, so läßt sich in wenigen Zeilen zeigen, daß (IV) nur möglich ist, wenn alle b_n und a_n gleich derselben Konstanten b sind[15]. Damit ist dann Satz 1 der 1. Mtlg., der am Anfang dieser Note zitiert ist, von neuem bewiesen[16].

Umgekehrt läßt sich, wie auch in der 1. Mtlg. gezeigt wird[17], aus (IV) die Funktionalgleichung (I) herleiten.

Notwendige und hinreichende Bedingungen für das Bestehen von (IV), wenn nur die $\lambda_n = n$, aber die l_n beliebige positive Zahlen sind, sind in einer zweiten Mitteilung angegeben, die in der Mathematischen Zeitschrift erscheinen wird.

§ 4.

Es sei $\Phi(z)$ eine in einem Streifen $-\alpha < x < \beta$ $(\alpha, \beta > 0)$ reguläre analytische Funktion mit den beiden Eigenschaften:

1. *es existiere eine positive Zahl γ $(\gamma < \alpha, \gamma < \beta)$, derart, daß die beiden Integrale*

$$(10) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\gamma + iy)\, dy, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(-\gamma + iy)\, dy$$

konvergent sind;

2. *es mögen sich zwei Folgen positiver Zahlen $y_1, y_2, \ldots \to \infty$ und $y_1', y_2', \ldots \to \infty$ bestimmen lassen, derart, daß, unter $F(z)$ und $G(z)$ die Funktionen aus* (III) *und* (III′) *verstanden,*

$$(11) \qquad \lim_{\nu=\infty} \Phi(x + iy_\nu) = 0, \qquad \lim_{\nu=\infty} \Phi(x - iy_\nu') = 0,$$

$$(12) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{\nu=\infty} \Phi(x + iy_\nu)\, F(x + iy_\nu) = 0, & \lim\limits_{\nu=\infty} \Phi(x - iy_\nu')\, F(x - iy_\nu') = 0, \\ \lim\limits_{\nu=\infty} \Phi(x + iy_\nu)\, G(x + iy_\nu) = 0, & \lim\limits_{\nu=\infty} \Phi(x - iy_\nu')\, G(x - iy_\nu') = 0, \end{cases}$$

und zwar gleichmäßig in x, wenn x dem Intervall $-\gamma \leqq x \leqq \gamma$ angehört[18].

[15] Vgl. Fußnote [2], 1. Mtlg., S. 252–253.

[16] Der in Fußnote [1] zitierte Siegelsche Beweis folgert $a_n = b_n = b$ schon aus (III), ohne erst (IV) zu bilden.

[17] 1. Mtlg., § 4, S. 253–254. — Ich möchte nicht unterlassen, an dieser Stelle darauf hinzuweisen, daß Herr Tschakaloff in Sofia, wie er mir gütigst brieflich mitgeteilt hat, in einer Abhandlung: Analytische Eigenschaften der Riemannschen Funktion $\zeta(z)$, die in bulgarischer Sprache (1914) in Sofia als selbständige Druckschrift erschienen ist, einen Beweis der Riemannschen Funktionalgleichung veröffentlicht hat, der in wesentlichen Punkten mit dem zitierten Beweise des § 4 der 1. Mtlg. übereinstimmt.

[18] Die scheinbar so unhandliche Bedingung (12) läßt sich in speziellen Fällen wesentlich vereinfachen, da sich dann oft eine Folge von Zahlen y_ν konstruieren läßt, wo $F(x + iy_\nu)$ beschränkt bleibt oder nur wie $\log^2 y_\nu$ unendlich wird. Vgl. die Fußnote [23] am Schluß.

Nunmehr bilde man die Integrale

$$(13)\qquad \mathfrak{J} = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} G(z)\,\Phi(z)\,dz - \int_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} G(z)\,\Phi(z)\,dz\right).$$

Da sich wegen der Voraussetzung (12) das Integral $\mathfrak{J}$ als Integral über den Rand des Streifens $-\gamma \leqq x \leqq \gamma$ auffassen läßt, so ist nach dem Cauchyschen Integralsatz $\mathfrak{J}$ gleich der Summe der in diesem Streifen enthaltenen Residuen, mithin wegen (III′)

$$(14)\qquad \mathfrak{J} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\,\Phi(i\lambda_n),$$

wobei die a_n und λ_n für negative n durch die Formeln (6) bestimmt sind.

Wegen (III′) ist $G(z) - G(-z)$, es läßt sich mithin (13) auch in der Form

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} G(z)\,(\Phi(z) + \Phi(-z))\,dz$$

schreiben. Setzt man für $G(z)$ die für $\gamma + iy$ absolut konvergente Dirichletsche Reihe linker Hand von (III′) ein, so läßt sich wegen ihrer absoluten Konvergenz und der der Integrale (10) die Reihenfolge von Summation und Integration miteinander vertauschen, mithin wird

$$(15)\qquad \mathfrak{J} = \frac{1}{2\pi i}\left(b_0\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}(\Phi(z)+\Phi(-z))\,dz + 2\sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{-2\pi l_n z}(\Phi(z)+\Phi(-z))\,dz\right)$$

Da aber wegen (11) jedes einzelne der Integrale von (15) längs der Geraden $\Re(z) = \gamma$ gleich dem Integral längs der Achse der imaginären Zahlen ist, so ergibt sich, indem man schließlich noch den Wert der Reihe (14) dem Ausdruck (15) für $\mathfrak{J}$ gleichsetzt,

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,\Phi(i\lambda_n) = \frac{b_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\Phi(iy) + \Phi(-iy))\,dy$$
$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi l_n iy}(\Phi(iy) + \Phi(-iy))\,dy,$$

$$(\mathrm{V})\qquad \boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,\Phi(i\lambda_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi l_n iy}\,\Phi(iy)\,dy.}$$

Entsprechend erhält man, wenn man in das Integral (13) $F(z)$ statt $G(z)$ einsetzt,

$$\text{(V')} \qquad \boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \Phi(il_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi\lambda_n i y} \Phi(iy)\, dy.}$$

Umgekehrt läßt sich aus (V) die ϑ-Relation (II) folgern, indem man $\Phi(z) = e^{\tau z^2}$ setzt[19]).

Ist eine im Intervall $-\infty < u < \infty$ reelle, nicht analytische Funktion $\varphi(u)$ gegeben, die in jedem endlichen Intervall von beschränkter Schwankung ist und für die das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(u)|\, du$ konvergiert, so läßt sich für $\varphi(u)$ eine (V) analoge Summationsformel beweisen, wenn außerdem die Funktion

$$(16) \qquad \Phi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\, e^{zu}\, du$$

in einem Streifen $-\alpha < x < \beta$ $(\alpha, \beta > 0)$ regulär analytisch ist und den Voraussetzungen **1.** und **2.** genügt[20]).

Denn setzt man in (V') für $\Phi(z)$ die Funktion (16) ein, so erhält man

$$({}^*\text{V}) \qquad \boxed{2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \varphi(2\pi\lambda_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{il_n u} \varphi(u)\, du,}$$

da nach dem Fourierschen Integraltheorem

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(u-2\pi\lambda_n) i y} \varphi(u)\, du \right) dy = \varphi(2\pi\lambda_n)$$

ist[21]).

---

[19]) l. c. Fußnote [4]).

[20]) Ist $\varphi(u)$ zweimal stetig differentiierbar und ist $\lim\limits_{u=\pm\infty} \varphi(u) = 0$, $\lim\limits_{u=\pm\infty} \varphi'(u) = 0$, so ergibt die partielle Integration von (16)

$$\Phi(z) = \frac{1}{z^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi''(u)\, e^{zu}\, du.$$

Konvergiert außerdem noch $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi'' u|\, e^{\gamma |u|}\, du$, so sind die Voraussetzungen (10) und (11) gewiß erfüllt. Vgl. auch Fußnote [18]).

[21]) Vgl. Jordan, l. c. Fußnote [12]), II. S. 233—235. Die Jordansche Bedingung: $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(u)|\, du$ konvergent, ist hier nach Voraussetzung erfüllt.

Entsprechend leitet man aus (V) die Beziehung her:

$$
{}^*\mathrm{V}') \qquad \boxed{2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \varphi(2\pi l_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) e^{i\lambda_n u}\, du.}
$$

§ 5.

Unsere bisher gefundenen Ergebnisse können wir in den folgenden Sätzen zusammenfassen:

Satz 1. *Unter den in* a), b), c) *gemachten Voraussetzungen für die Funktionen* $f(s)$ *und* $g(s)$ *bestehen auch die Beziehungen* (II), (III), (III′), (IV), (V), (V′), (*V), (*V′).

Die Äquivalenz aller Beziehungen besagt:

Satz 2. *Sind vier Folgen von Zahlen*

$$
\begin{aligned}
&a_0, a_1, \ldots, \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \to \infty,\\
&b_0, b_1, \ldots, \quad 0 < l_1 < l_2 < \ldots \to \infty
\end{aligned}
$$

vorgelegt, derart, daß eine einzige der acht Beziehungen (II) *bis* (*V′) *erfüllt ist und die Reihen* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{\lambda_n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{l_n^2}$ *beide konvergent sind, so gelten alle übrigen der acht Beziehungen, außerdem sind die durch die Reihen* (1) *und* (2) *in der Halbebene* $\sigma \geqq 2$ *definierten Funktionen über die ganze Ebene fortsetzbar und endlich besteht zwischen ihnen die Funktionalgleichung* (I).

Durch genaue Prüfung der bei den einzelnen Übergängen von einer Relation zur andern benutzten Voraussetzungen ergibt sich auch noch

Satz 3. *Sind die Reihen*

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{b_n}{l_n^2} \right|, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\, e^{-2\pi\lambda_n x} \qquad (x \geqq \alpha > 0)
$$

konvergent, während die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^2}$ *keine Konvergenzhalbebene besitzt, so sind immer noch die Beziehungen* (II), (III), (V′), (*V) *miteinander äquivalent* (*d. h. wenn eine Relation gilt, gelten auch die drei andern*), *und zwar auch dann noch, wenn die* l_n *keine positiven, sondern beliebige komplexe Zahlen sind, wofern nur die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{b_n}{l_n^2}\right|$ *konvergiert und die Gerade* $x = \gamma$ *der Voraussetzungen* **1.** *und* **2.** *des* § 4 *im Innern der absoluten Konvergenzhalbebene von* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-2\pi\lambda_n z}$ *gelegen ist.*

§ 6.

Stellt man ähnliche Überlegungen an der allgemeinen Epsteinschen ζ-Funktion [22]) an, so erhält man für (II) die bekannte Relation zwischen ϑ-Funktionen mehrerer Veränderlichen. Weiter ergibt sich, wenn man die ϑ-Formel der Transformation (7) unterwirft, an Stelle von (III) die bemerkenswerte Relation

$$F(z) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{m_p=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \sum\limits_{\mu=1}^{p} m_\mu h_\mu} e^{-2\pi z \sqrt{\varphi((m+g))}}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\pi\sqrt{\Delta}} e^{-2\pi i \sum\limits_{\mu=1}^{p} g_\mu h_\mu} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{m_p=-\infty}^{\infty} z \frac{e^{-2\pi i \sum\limits_{\mu=1}^{p} m_\mu g_\mu}}{z^2 + \Phi((h+m))}.$$

Hierbei bedeutet $\varphi((m+g)) = \varphi(m_1 + g_1, m_2 + g_2, \ldots, m_p + g_p)$ eine positiv definite quadratische Form von p Veränderlichen, Δ ihre Determinante und Φ die zu φ reziproke Form. Diese Formel tritt in einigen neueren zahlentheoretischen Untersuchungen von Hardy und Hecke auf.

Setzt man

$$F(z) = \frac{1}{2}\log k - \frac{\zeta'}{\zeta}\left(z+\frac{1}{2}\right) + \frac{L'}{L}\left(z+\frac{1}{2}\right),$$

so läßt sich auf diese Funktion der Satz 3 anwenden, wobei $L(z)$ eine L-Reihe bezeichnet, deren Koeffizienten eigentliche reelle Charaktere modulo k mit der Nebenbedingung $\chi(k-1) = 1$ sind. Denn wegen $F(z) = -F(-z)$ besitzt $F(z)$ außer der Darstellung durch eine Dirichletsche Reihe eine Partialbruchzerlegung, derart, daß die Relation (III) erfüllt ist. In diesem Falle erscheinen die Beziehungen (V′) und (*V) als gemeinsame Quelle von Formeln, die Primzahlsummen durch solche Reihen darstellen, welche die nichtreellen Nullstellen der ζ-Funktion enthalten [23]).

19. Oktober 1921.

---

[22]) P. Epstein, Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen. Math. Ann. 56 (1903), S. 615–644; vgl. insbes. S. 623–627.

[23]) Die Voraussetzung 2. für $\Phi(z)$ vereinfacht sich hier dadurch, daß sich eine Folge von positiven Zahlen y_ν konstruieren läßt, für die $\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(x \pm i y_\nu)\right| \leq C \log^2 y_\nu$, $\left|\frac{L'}{L}(x \pm i y_\nu)\right| \leq C' \log^2 y_\nu$ ist. Vgl. etwa E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Leipzig 1909, I. S. 341–342 und S. 521.

(Eingegangen am 21. 10. 1921.)