Ueber die höheren Differentialquotienten.

Von R. MOST in STETTIN.

1. Der Differentialquotient $\frac{d^n f x}{dt^n}$, in dem x eine Function von t ist, kann durch die Reihe $\sum_{k=1}^{k=n} f^k(x) A_k$ ausgedrückt werden, wo $f^k(x)$ den k^{ten} Differentialquotienten nach x bezeichnet und A_k eine Function k^{ten} Grades aus einem oder mehreren der $(n - k + 1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von x nach t ist. Es würde keine Schwierigkeit haben, die Coefficienten A_k aus der Lösung des Specialfalles, welchen Götting behandelt hat*), zu entnehmen; jedoch führt die unten in Anwendung kommende Methode kürzer und naturgemässer zum Ziel. Hoppe bestimmt die A_k als lineare Functionen der als bekannt vorausgesetzten n^{ten} Differentialquotienten nach t von n einfachen Functionen der Grösse $x^{**})$; die oben angedeutete allgemeine Lösung gestattet hier die Einführung beliebiger Functionen. Das Wesen des Hoppe'schen Problems liegt darin, dass die Determinante:

$$P = \begin{vmatrix} \varphi^1 & \varphi^2 & . & . & \varphi^n & \frac{d^n \varphi x}{dt^n} \\ \vdots & & & & & \\ \varphi_n^1 & \varphi_n^2 & . & . & \varphi_n^n & \frac{d^n \varphi_n x}{dt^n} \end{vmatrix},$$

wo $\varphi_i^k = \frac{d^k \varphi_i x}{dx^k}$ ist, identisch verschwindet, was sich unmittelbar ergibt, wenn man inductiv zeigt, dass $\frac{d^n \varphi_i x}{dt^n}$ eine lineare Function von $\varphi_i^1, \varphi_i^2, \dots, \varphi_i^n$ ist, deren Coefficienten von φ_i unabhängig sind; ein strengerer Beweis ergibt sich unten. — Für einfache und gleichartige Functionen erhält die Determinante P eine sehr einfache Gestalt; setzt

*) Mathematische Annalen B. III, S. 277.

**) Theorie der independenten Darstellung der höheren Differentialquotienten S. 73. — Math. Ann. B. IV, S. 86.

man $\psi x = (x - \alpha) \dots (x - \alpha_n)$, wo $\alpha, \alpha_1 \dots \alpha_n$ von einander verschieden sind, so ergibt sich z. B. für beliebige α :

$$\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha \psi'(\alpha)} \frac{d^n e^{\alpha x}}{dx^n} + \frac{e^{-\alpha_1 x}}{\alpha_1 \psi'(\alpha_1)} \frac{d^n e^{\alpha_1 x}}{dx^n} + \dots + \frac{e^{-\alpha_n x}}{\alpha_n \psi'(\alpha_n)} \frac{d^n e^{\alpha_n x}}{dx^n} = 0$$

$$\frac{x^{-\alpha}}{\alpha \psi'(\alpha)} \frac{d^n x^{\alpha}}{dx^n} + \frac{x^{-\alpha_1}}{\alpha_1 \psi'(\alpha_1)} \frac{d^n x^{\alpha_1}}{dx^n} + \dots + \frac{x^{-\alpha_n}}{\alpha_n \psi'(\alpha_n)} \frac{d^n x^{\alpha_n}}{dx^n} = 0$$

$$\frac{(\alpha - x)^n}{\psi'(\alpha)} \frac{d^n \log(\alpha - x)}{dx^n} + \frac{(\alpha_1 - x)^n}{\psi'(\alpha_1)} \frac{d^n \log(\alpha_1 - x)}{dx^n} + \dots + \frac{(\alpha_n - x)^n}{\psi'(\alpha_n)} \frac{d^n \log(\alpha_n - x)}{dx^n} = 0,$$

Die Methode, welche zur Ableitung der A_k und nahe liegender Erweiterungen befolgt ist, stützt sich auf den bekannten Integraalausdruck des Differentialquotienten.

2. Um in Nachfolgendem die Rechnung mit unendlichen, wenn auch convergenten Reihen zu vermeiden, setze man in dem geschlossenen Integral $\int \frac{(\varphi u - \varphi a) du}{u - a}$, welches identisch verschwindet, wenn φu innerhalb der Integralfäche synektisch ist:

$$\frac{1}{u - a} = \frac{1}{u - x} + \frac{a - x}{(u - x)^2} + \dots + \frac{(a - x)^n}{(u - x)^{n+1}} + \frac{(a - x)^{n+1}}{(u - x)^{n+1} (u - a)}$$

und erhält dadurch die begrenzte Reihe:

$$(1) \quad \varphi a = \varphi x + (a - x) D \varphi x + \dots + (a - x)^n D^n \varphi x + (a - x)^{n+1} R_n,$$

in der $D^n \varphi x = \frac{d^n \varphi x}{\Pi(n) \cdot dx^n}$ ist und der endliche Werth von R_n durch das die Punkte x und a umschliessende Integral $\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi u \cdot du}{(u - x)^{n+1} (u - a)}$ gegeben wird.

Für die Restbestimmung einer Function von mehreren Veränderlichen drückt man in dem identisch verschwindenden Integral:

$$\int \frac{f(u, v, w) - f(a, b, c)}{(u - a)(v - b)(w - c)} du \cdot dv \cdot dw$$

mit einer auf den 3 Integralfächen synektischen Function $f(u, v, w)$ die Factoren $(v - b)^{-1}$ und $(w - c)^{-1}$ entsprechend wie $(u - a)^{-1}$ aus und erhält die Reihe:

$$(2) \quad f(a, b, c) = \sum \frac{(a - x)^\lambda (b - y)^\mu (c - z)^\nu}{\Pi(\lambda) \Pi(\mu) \Pi(\nu)} \frac{d^{\lambda+\mu+\nu} f(x, y, z)}{dx^\lambda dy^\mu dz^\nu} + R_n,$$

wo λ, μ, ν sämmtliche Werthe aus 0, 1, 2, ..., n durchmachen und R_n nur $(n + 1)^3$ Potenzen von $a - x, b - y$ und $c - z$ enthält; es ist:

$$R_n = \frac{(a - x)^{n+1}}{(2\pi i)^3} \int \frac{f(u, v, w)}{(u - x)^{n+1} (u - a)(v - b)(w - c)} du \cdot dv \cdot dw + \frac{(b - y)^{n+1}}{(2\pi i)^3} \int \dots$$

$$- \frac{(a - x)^{n+1} (b - y)^{n+1}}{(2\pi i)^3} \int \frac{f(u, v, w)}{(u - x)^{n+1} (v - y)^{n+1} (u - a)(v - b)(w - c)} du \cdot dv \cdot dw - \frac{(b - y)^{n+1} (c - z)^{n+1}}{(2\pi i)^3} \int \dots$$

$$+ (a - x)^{n+1} (b - y)^{n+1} (c - z)^{n+1} \frac{1}{(2\pi i)^3} \int \frac{f(u, v, w)}{(u - x)^{n+1} (v - y)^{n+1} (w - z)^{n+1} (u - a)(v - b)(w - c)} du \cdot dv \cdot dw.$$

3. Ist bei dem im Anfange eingeführten Differentialquotienten $x = \varphi(t)$, so setze man $\xi = \varphi(\tau)$ und erhält:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\xi) \cdot d\tau}{\tau - t},$$

mithin:

$$\frac{d^n f x}{dt^n} = \frac{\Pi(n)}{2\pi i} \int \frac{f(\xi) d\tau}{(\tau - t)^{n+1}}$$

oder, indem man $f(\xi)$ nach Gleichung (1) entwickelt:

$$(3) \quad \frac{d^n f(x)}{dt^n} = \sum_{k=1}^n \frac{f^k(x)}{\Pi(k)} \frac{\Pi(n)}{2\pi i} \int \frac{(\xi - x)^k}{(\tau - t)^{n+1}} d\tau;$$

das Integral $\int \frac{(\xi - x)^{n+1}}{(\tau - t)^{n+1}} d\tau$ verschwindet, weil die in ihm enthaltene Function kein Unendliches hat, sondern für $\tau = t$ den endlichen Werth $\left(\frac{dx}{dt}\right)^{n+1}$ erhält. — Den Uebergang von den Integralen der Gleichung (3) zu den sonst gebräuchlichen Substitutionsformen giebt folgende Gleichung:

$$(4) \quad \left[\frac{d^n \psi(u, t)}{du^n} \right]_{u=t} = \frac{\Pi(n)}{2\pi i} \left[\int \frac{\psi(v, t) \cdot dv}{(v - u)^{n+1}} \right]_{u=t} = \frac{\Pi(n)}{2\pi i} \int \frac{\psi(v, t)}{(v - t)^{n+1}} dv,$$

so dass $\frac{\Pi(n)}{2\pi i} \int \frac{(\xi - x)^k}{(\tau - t)^{n+1}} d\tau = \left[\frac{d^n (\varphi u - \varphi t)^k}{du^n} \right]_{u=t}$ ist*).

4. Drückt man das ξ der Gleichung (3) nach (1) in Potenzen von $\tau - t$ aus und entwickelt:

$$[(\tau - t) Dx + (\tau - t)^2 D^2 x + \dots (\tau - t)^n D^n x + (\tau - t)^{n+1} R_n]^k$$

als Polynomium, so verschwinden bei der Integration sämtliche Glieder, welche eine andere Potenz als $(\tau - t)^n$ enthalten. Sammelt man also die zu dieser Potenz gehörigen Glieder, so erhält man:

$$(5) \quad \frac{d^n f x}{dt^n} = \sum_{k=1}^n \Pi(n) f^k x \sum \frac{(D^1 x)^{\lambda_1} \dots (D^r x)^{\lambda_r}}{\Pi(\lambda_1) \dots \Pi(\lambda_r)},$$

wo $\lambda_1 \dots \lambda_r$ für jeden Werth von k alle möglichen ganzen Werthe aus 0, 1, 2 ... k annehmen, welche den Bedingungen:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r = k$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + r\lambda_r = n$$

genügen.

Ist beispielsweise $f x = x^k$, so wird $f^k x = x_k \Pi(k) x^{k-k}$ **); ist $f x = e^x$ und $x = \alpha t + \beta t^2$, so erhält man:

$$e^{-\alpha t - \beta t^2} \frac{d^n e^{\alpha t + \beta t^2}}{dt^n} = \sum_{k=0}^n \frac{\Pi(n)}{\Pi(k) \Pi(n-k)} \beta^k (\alpha + 2\beta t)^{n-2k},$$

*) Vergl. Hoppe: a. a. O. S. 148.

**) Vergl. Math. Ann. B. III. S. 283.

die Reihe bricht ab, so bald $n - 2k$ negativ wird; ist $x = at + \beta t^2 + \gamma t^3$, so ergibt sich:

$$e^{-at - \beta t^2 - \gamma t^3} \frac{d^n e^{at + \beta t^2 + \gamma t^3}}{dt^n} \\ = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{\Pi(n)}{\Pi(n-\lambda)} (\alpha + 2\beta t + 3\gamma t^2)^{n-\lambda} \sum_{\substack{k \leq \frac{3}{2}\lambda \\ k \geq \frac{1}{2}\lambda}}^{\frac{3}{2}\lambda} \frac{\gamma^{2k-\lambda} (\beta + 3\gamma t)^{2\lambda-3k}}{\Pi(2k-\lambda) \Pi(2\lambda-3k)},$$

wobei k selbstverständlich eine ganze Zahl sein muss.

5. Sind y und z Functionen von t , welche in η und ξ übergehen, wenn τ an die Stelle von t gesetzt wird, so ist:

$$\frac{d^n f(x, y, z)}{dt^n} = \frac{\Pi(n)}{2\pi i} \int \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{(\tau - t)^{n+1}} d\tau;$$

drückt man $f(\xi, \eta, \zeta)$ nach (2) in Potenzen von $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ aus und diese Grössen wieder nach (1) in Potenzen von $\tau - t$, so hat man bei der Multiplication der Polynome $(\xi - x)^\lambda$, $(\eta - y)^\mu$, $(\zeta - z)^\nu$ nur die zu der Potenz $(\tau - t)^n$ gehörigen Glieder zu sammeln und erhält die Gleichung:

$$(6) \quad \frac{d^n f(x, y, z)}{dt^n} \\ = \sum_{k=1}^{k=n} \Pi(n) \frac{d^k f(x, y, z)}{dx^\lambda dy^\mu dz^\nu} \sum \frac{(D^p x)^{\lambda_1} \dots (D^p x)^{\lambda_p} (D^q y)^{\mu_1} \dots (D^q y)^{\mu_q} (D^r z)^{\nu_1} \dots (D^r z)^{\nu_r}}{\Pi(\lambda_1) \dots \Pi(\lambda_p) \Pi(\mu_1) \dots \Pi(\mu_q) \Pi(\nu_1) \dots \Pi(\nu_r)},$$

wo λ , $\lambda_1 \dots \lambda_p$, μ , $\mu_1 \dots \mu_q$, ν , $\nu_1 \dots \nu_r$ für jeden Werth von k alle möglichen Werthe aus 0, 1, 2 ... k annehmen, welche den Bedingungen genügen:

$$\lambda + \mu + \nu = k \\ \lambda_1 + \lambda_2 \dots \lambda_p = \lambda \quad \mu_1 + \mu_2 \dots \mu_q = \mu \quad \nu_1 + \nu_2 \dots \nu_r = \nu \\ (\lambda_1 + 2\lambda_2 \dots + p\lambda_p) + (\mu_1 + 2\mu_2 \dots + q\mu_q) + (\nu_1 + 2\nu_2 \dots + r\nu_r) = n.$$

Ist z. B. $x = a + bt + ct^2$ und $y = a_1 + b_1 t + c_1 t^2$, so erhält man:

$$\frac{d^n x^\alpha y^\beta}{dt^n} = \Pi(n) \sum_{k=0}^{k \leq \frac{n}{2}} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-k} \alpha^{\lambda-1} \beta^{n-k-\lambda-1} x^{\alpha-\lambda} y^{\beta-n+k+\lambda} \times \\ \times \sum_{\lambda_1=0}^{\lambda_1=\lambda} \frac{(b + 2ct)^{\lambda_1}}{\Pi(\lambda_1)} \frac{(b_1 + 2c_1 t)^{n-2k-\lambda_1}}{\Pi(n-2k-\lambda_1)} \frac{c^{\lambda-\lambda_1}}{\Pi(\lambda-\lambda_1)} \frac{c_1^{k-\lambda+\lambda_1}}{\Pi(k-\lambda+\lambda_1)},$$

wobei zu beachten ist, dass die Π -Functionen keine negativen Grössen enthalten dürfen, also nur diejenigen Werthe von λ_1 in Anwendung kommen, welche der Bedingung: $\lambda - k \geq \lambda_1 \leq n - 2k$ genügen.

6. Nimmt man, um andererseits die von Hoppe gegebenen Entwicklungen abzuleiten und zu erweitern, n Functionen $\varphi_1(x), \dots \varphi_n(x)$ zu Hilfe, so geben ihre n^{ten} Differentialquotienten nach t , wenn sie nach Gleichung (3) entwickelt werden, mit derselben zusammen $n + 1$ Gleichungen, aus denen man durch Elimination der n Integrausdrücke

die identisch verschwindende Determinante des ersten Abschnittes erhält. — Besser übersieht man die Bedingungen, denen die Hilfsfunctionen unterworfen sind, wenn man $\varphi_i(\xi)$ nach (1) entwickelt; man erhält:

$D^0 \cdot \varphi_i x (\xi - x) + D^2 \cdot \varphi_i x (\xi - x)^2 + \dots + D^n \cdot \varphi_i x (\xi - x)^n = \varphi_i(\xi) - r_i$,
wo $r_i = \varphi_i(x) + R_{n,i}(\xi - x)^{n+1}$ ist; lässt man i die Werthe 1, 2 . . n durchlaufen und bezeichnet die Determinante der linken Seite des erhaltenen Systems von n Gleichungen durch Δ und den zu $D^h \varphi_i x$ gehörigen Coefficienten ihrer linearen Entwicklung durch Δ_i^h , so ist:

$\Delta \cdot (\xi - x)^k = (\varphi_1 \xi - r_1) \Delta_1^k + (\varphi_2 \xi - r_2) \Delta_2^k + \dots + (\varphi_n \xi - r_n) \Delta_n^k$;
führt man diese Werthe der Potenzen von $(\xi - x)$ in die Gleichung (3)

ein, so erhält man, da die Integrale $\int \frac{r_i d\tau}{(\tau - t)^{n+1}}$ verschwinden:

$$(7) \quad \frac{d^n f x}{dt^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{f^k x}{\Gamma(k)} \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\Delta_i^h}{\Delta} \frac{d^n \varphi_h(x)}{dt^n}.$$

Die Hilfsfunctionen φ müssen hiernach also so beschaffen sein, dass bei der Entwicklung sämtlicher $\varphi_i(\xi)$ nach $\xi - x$ die n ersten Potenzen dieser Differenz durch endliche Werthe bestimmbar sind. Die einfachsten Functionen, welche dieser Bedingung genügen, sind die n ersten Potenzen von ξ ; auf dieselben kommt man unmittelbar, wenn man in (3) $(\xi - x)^k$ nach dem Binomium entwickelt. Will man aber beliebige Grössen α beibehalten, so setze man:

$$\psi(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$$

$$\begin{aligned} \psi'(\alpha_i) &= (\alpha_i - \alpha_1) \dots (\alpha_i - \alpha_{i-1}) (\alpha_i - \alpha_{i+1}) \dots (\alpha_i - \alpha_n) \\ &= \alpha_i^{n-1} + C_i \alpha_i^{n-2} + C_i' \alpha_i^{n-3} + \dots * \end{aligned}$$

$$\alpha_i \psi'(\alpha_i) = \alpha_i^n + B_i \alpha_i^{n-1} + B_i' \alpha_i^{n-2} + \dots **$$

$$\psi'(x) = (\alpha_i + x)^{n-1} + C_i x (\alpha_i + x)^{n-2} + C_i' x (\alpha_i + x)^{n-3} + \dots$$

dann erhält man beispielsweise die Ausdrücke:

$$\frac{d^n f x}{dt^n} = \sum_{k=1}^{k=n} f^k(x) \sum_{h=1}^{h=n} \frac{C_{h,n-k}}{\psi'(\alpha_h)} \frac{e^{-\alpha_h x}}{\alpha_h} \frac{d^n e^{\alpha_h x}}{dt^n}$$

$$\frac{d^n f x}{dt^n} = \sum_{k=1}^{k=n} f^k(x) \sum_{h=1}^{h=n} \frac{B_{h,n-k}}{\psi'(\alpha_h)} \frac{x^{-\alpha_h}}{\alpha_h} \frac{d^n x^{\alpha_h}}{dt^n}$$

$$\frac{d^n f x}{dt^n} = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{k-1} \frac{f^k x}{\Gamma(k-1)} \sum_{h=1}^{h=n} \frac{C_h}{\psi'(\alpha_h)} \frac{x^{h-1}}{(\alpha_h + x)^n} \frac{d^n \log(\alpha_h + x)}{dt^n}$$

Die unter bestimmten Bedingungen über die Grössen α von Hoppe abgeleiteten Coefficienten ergeben sich aus den Determinanten der Gleichung (7) leicht.

*) Vergl. Baltzer, Theorie der Determinanten, 3. Aufl. S. 86.

**) Ueber den Zusammenhang der Grössen B und C vergl. des Verfassers Bemerkung in Schlämilch's Zeitschr. XV. S. 435, GL 10a - 10c.

7. Bei mehreren abhängigen Variablen kann man entsprechend so viel Hilfsfunctionen einführen, dass sämtliche Produkte:

$$(\xi - x)^2 (\eta - y)^{\mu} (\xi - z)^{\nu}$$

endlich bestimmbar sind; so wird z. B.:

$$(8) \frac{d^n f(x, y)}{dt^n} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{d^k f(x, y)}{dx^k dy^{l-k}} \sum_{h=1}^{k+l} \frac{\Delta_h^{k, k-l}}{\Delta} \frac{d^n e^{\alpha_h x + \beta_h y}}{dt^n},$$

$$\text{wenn } \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_1^2 & \alpha_1 \beta_1 & \beta_1^2 & \alpha_1^3 & \dots & \beta_1^3 & \dots & \alpha_1^n & \dots & \beta_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \beta_n & \alpha_n^2 & \alpha_n \beta_n & \beta_n^2 & \alpha_n^3 & \dots & \beta_n^3 & \dots & \alpha_n^n & \dots & \beta_n^n \end{vmatrix} \text{ ist}$$

und $\Delta_h^{k, k-l}$ den zu $\alpha_h \beta_h^{k-l}$ gehörigen Coefficienten ihrer linearen Entwicklung bedeutet; diese Determinanten lassen sich vereinfachen, indem man sie auf Gebilde aus $\alpha_i \beta_k - \alpha_k \beta_i$ zurückführt.

8. Der von Hoppe gewonnene Differentialquotient einer ganzen negativen Potenz*) ist auch ein specieller Fall eines allgemeinen Problems. Mit Hilfe der beliebigen Function φ erhält man durch Gleichung (1) den Ausdruck:

$$\frac{d^n f x}{dt^n} = \sum_{k=1}^{n+m} \frac{d^k f x \cdot \varphi x}{\Pi(k) dx^k} \frac{\Pi(n)}{2\pi i} \int \frac{(\xi - x)^k d\tau}{\varphi(\xi) (\tau - t)^{n+1}},$$

wo m eine beliebige ganze Zahl ist; denn, wenn $\varphi(\xi)$ auf der Integralfäche nicht verschwindet, so sind die Integrale für $k > n$ der Null gleich, können also beliebig in den Ausdruck gezogen werden. Bei der Entwicklung nach dem Binomium ergibt sich:

$$(9) \frac{d^n f x}{dt^n} = \sum_{k=1}^{n+m} \frac{1}{\Pi(k)} \frac{d^k f x \cdot \varphi x}{dx^k} \sum_{h=0}^{k-1} (-1)^{k-h} k_h x^{k-h} \frac{d^n x^h (\varphi x)^{-1}}{dt^n}.$$

Für $f x = x^\alpha$ und $\varphi x = x^\beta$, wo α und β ganz beliebige Grössen sind, ergibt sich hiernach:

$$\frac{d^n x^\alpha}{dt^n} = (\alpha + \beta) (n + m - \alpha - \beta)_{n+m} \sum_{h=0}^{n+m} (-1)^h (n+m)_n \frac{x^{\alpha+\beta-h}}{\alpha+\beta-h} \frac{d^n x^{h-\beta}}{dt^n}.$$

*) Höhere Diff. S. 162; Math. Ann. B. IV. S. 86.

Stettin, den 14. August 1871.