Über die Convergenz bestimmter Integrale mit unendlichen Grenzen.

Von F. Hočevár in Brünn.

1. Unter den Methoden zur Prüfung eines bestimmten Integrals von der Form

$$(1) \quad \int_a^{\infty} f(x) dx$$

in Bezug auf die Bestimmtheit und Endlichkeit seines Wertes oder, kürzer ausgedrückt, in Bezug auf seine Convergenz ist die Verwandlung desselben in eine unendliche Reihe durch Zerlegung des Integrationsintervalles in unendlich viele Theile in vielen Fällen besonders zweckmäßig. Um die Zerlegung auszuführen, schaltet man zwischen den Grenzen a und ∞ eine unbegrenzte Reihe von Zahlen $x_1, x_2, x_3, \dots$ ein, welche den Bedingungen

$$(2) \quad a < x_1 < x_2 < x_3 < \dots$$

$$(3) \quad \text{und } \lim x_n = \infty \text{ für } \lim n = \infty$$

genügen, und gelangt so zur unendlichen Reihe

$$(4) \quad u_1 + u_2 + u_3 + \dots,$$

wenn zur Abkürzung

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx = u_n$$

gesetzt wird. Man pflegt das Integral (1) und die Reihe (4) ohne weiters einander gleichzusetzen und daher auch aus der Convergenz oder Divergenz der Reihe auf die Convergenz, bezw. Divergenz des Integrals zu schließen. Dieses Verfahren wird häufig auch auf Integrale mit endlichen Grenzen angewendet, wenn z. B. die zu integrierende Function im Integrationsintervalle unendlich groß wird oder unendlich oft das Vorzeichen ändert.

Es ist meines Wissens noch nicht bemerkt worden, dass das eben beschriebene und für endliche Werte von n stets zulässige Verfahren zu unrichtigen Resultaten führen kann, wenn n , d. i. die Anzahl der Reihenglieder, unendlich groß wird. So z. B. erhält man aus dem Integral

$$\int_0^{\infty} \sin x \, dx$$

durch die Annahme $x_n = \alpha + 2(n-1)\pi$ die Reihe

$$(1 - \cos \alpha) + 0 + 0 + 0 + \dots,$$

deren Summe je nach der Wahl von α einen beliebigen Wert zwischen 0 und 2 besitzt, während der Wert des gegebenen Integrals zwischen den Grenzen 0 und 2 unbestimmt ist. Auch an dem Integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin Vx}{Vx} \, dx$$

kann man durch Zurückführung desselben auf das vorausgehende Integral oder durch directe Zerlegung mittelst der Zahlen $x_n = [\alpha + 2(n-1)\pi]^2$ ein ähnliches Verhalten nachweisen, obwohl die zu integrierende Function für $\lim x = \infty$ den Grenzwert 0 hat.

Im Nachfolgenden wird nun gezeigt, dass man durch Hinzufügung einer dritten Bedingung bezüglich der Zahlen $x_1, x_2, x_3, \dots$ oder der Function $f(x)$ zu den Bedingungen (2) und (3) stets erreichen kann, dass die Reihe (4) mit dem Integrale (1) dieselben Unbestimmtheitsgrenzen¹⁾ erhält und daher auch über den Wert des Integrals genauen Aufschluss geben kann.

2. Setzt man

$$\int_a^x f(x) \, dx = F(x),$$

so wird bekanntlich das Integral (1) als $\lim F(x)$ für $\lim x = \infty$ und die Summe der Reihe (4) als $\lim F(x_n)$ für $\lim n = \infty$ definiert. Beim ersten Grenzübergange hat die Variable x das Intervall (a, ∞) stetig zu durchlaufen, während sie beim zweiten die Werte $x_1, x_2, x_3, \dots$ sprungweise der Reihe nach annimmt. Wenn die eben erwähnten Grenzwerte nicht existieren, so geben die entsprechenden Unbestimmt-

¹⁾ S. P. du Bois-Reymond, Allgemeine Functionentheorie, pag. 266, ferner O. Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, I, pag. 161 bis 166.

heitsgrenzen jene Schranken an, innerhalb deren das Integral (1) und die Reihe (4) unbestimmt sind. Die gesuchte Beziehung zwischen den den beiden Grenzübergängen entsprechenden Unbestimmtheitsgrenzen ergibt sich aus dem folgenden Satze über Grenzwerte von Functionen:

Ist $F(x)$ eine für alle Werte von x im Intervalle (a, b) eindeutig definierte Function und a eine endliche, b hingegen eine endliche oder unendlich große Zahl, wird ferner das Intervall (a, b) durch die Zahlen $x_1, x_2, x_3, \dots$ gemäß den Bedingungen

$$(5) \quad a < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < b,$$

$$(6) \quad \lim x_n = b \text{ für } \lim n = \infty$$

in unendlich viele Theile zerlegt, so liegen die dem Grenzübergange $\lim F(x_n)$ für $\lim n = \infty$ entsprechenden Unbestimmtheitsgrenzen zwischen den dem Grenzübergange $\lim F(x)$ für $\lim x = b$ entsprechenden Unbestimmtheitsgrenzen oder sie fallen mit denselben zusammen. Letzteres findet sicher dann statt,

wenn $F(x)$ in allen Intervallen, welche auf eine
(7) angebbare Zahl der Reihe $x_1, x_2, x_3, \dots$ folgen, monoton¹⁾ verläuft.

Dieser, wie ich glaube, neue Satz kann auf folgende Art bewiesen werden:

Die obere und die untere Grenze jener Werte von $F(x)$, welche allen dem Intervalle (x, b) angehörnden Werten des Argumentes entsprechen, sollen mit $G(x)$ bzw. $K(x)$ bezeichnet werden. Diese Functionen ändern sich monoton, wenn x das Intervall (a, b) stetig wachsend durchläuft, und haben somit für $\lim x = b$ bestimmte Grenzwerte, welche die obere, bzw. untere Unbestimmtheitsgrenze von $F(x)$ für $\lim x = b$ heißen und mit O , bzw. U bezeichnet werden.

Die obere und die untere Grenze der Functionswerte $F(x_n)$, welche allen dem Intervalle (x, b) angehörnden Zahlen der Reihe $x_1, x_2, x_3, \dots$ entsprechen, sollen mit $G_1(x)$, bzw. $K_1(x)$ bezeichnet werden. Auch diese Functionen ändern sich monoton, wenn x das Intervall (a, b) stetig wachsend durchläuft, und haben somit für $\lim x = b$ bestimmte Grenzwerte, welche die obere, bzw. untere Unbestimmtheitsgrenze von $F(x_n)$ für $\lim n = \infty$ heißen und mit O_1 , bzw. U_1 bezeichnet werden sollen.

Lässt man nun von den Functionswerten, zu denen $G(x)$ als obere und $K(x)$ als untere Grenze gehören, beliebig viele weg, so

¹⁾ Als monoton in einem Intervalle bezeichnet man nach C. Neumann eine Function, welche entweder nie ab- oder nie zunimmt, wenn die Variable das Intervall in einem bestimmten Sinne durchläuft. Dabei ist nicht ausgeschlossen, dass die Function bei dieser Änderung der Variablen im ganzen Intervalle oder in einzelnen Theilen desselben constant bleibt.

ist die obere Grenze der übrigbleibenden Functionswerte gewiss nicht größer als $G(x)$ und die untere nicht kleiner als $K(x)$. Hieraus folgt, da selbstverständlich $G_1(x) \geq K_1(x)$ ist,

$$G(x) \geq G_1(x) \geq K_1(x) \geq K(x),$$

somit für $\lim x = b$

$$\lim G(x) \geq \lim G_1(x) \geq \lim K_1(x) \geq \lim K(x)$$

oder

$$(8) \quad O \geq O_1 \geq U_1 \geq U.$$

Damit ist der erste Theil des Satzes bewiesen.

Nimmt man weiter an, dass in der Zahlenreihe $x_1, x_2, x_3, \dots$ ein Glied x_m bestimmt werden kann, so dass $F(x)$ in allen auf x_m folgenden Intervallen $(x_m, x_{m+1}), (x_{m+1}, x_{m+2}), \dots$ monoton verläuft, so ist von den Functionswerten $F(x_m)$ und $F(x_{m+1})$ der eine die obere und der andere die untere Grenze aller zum Intervalle (x_m, x_{m+1}) gehörenden Functionswerte. Lässt man also alle diese Functionswerte mit Ausnahme von $F(x_m)$ und $F(x_{m+1})$ weg, so ist $G(x_m)$ noch immer die obere und $K(x_m)$ die untere Grenze der im Intervalle (x_m, b) übrigbleibenden Functionswerte. Dies gilt auch dann noch, wenn man sämtliche dem Intervalle (x_m, b) entsprechenden Functionswerte mit Ausnahme der den Argumenten $x_m, x_{m+1}, \dots, x_n, \dots$ entsprechenden weglässt. Es ist daher

$$G(x_m) = G_1(x_m), K(x_m) = K_1(x_m)$$

und allgemein für alle n , welche größer als m sind,

$$G(x_n) = G_1(x_n), K(x_n) = K_1(x_n).$$

Daraus folgt für $\lim n = \infty$

$$(9) \quad \lim G(x_n) = \lim G_1(x_n) = O_1, \lim K(x_n) = \lim K_1(x_n) = U_1.$$

Aus $\lim G(x) = O$ für $\lim x = b$ folgt nun, dass bei diesem Grenzübergange die beiden Unbestimmtheitsgrenzen von $G(x)$ den gemeinsamen Wert O erhalten. Nach dem ersten, bereits bewiesenen Theile des eben behandelten Satzes erhalten daher auch die beiden Unbestimmtheitsgrenzen von $G(x_n)$ für $\lim n = \infty$ den gemeinsamen Wert O . Es ist also für $\lim n = \infty$

$$\lim G(x_n) = O, \lim K(x_n) = U$$

und schließlich mit Rücksicht auf die Relationen (9)

$$O = O_1 \geq U_1 = U,$$

wodurch auch der zweite Theil des Satzes bewiesen ist.

Aus dem ersten, allgemeineren Theile des Satzes, bei dessen Ableitung die Voraussetzung (7) nicht benützt wird, erhält man u. A. durch Specialisierung folgende Sätze:

Aus $O = U$ folgt $O_1 = U_1$ und aus $O_1 > U_1$ folgt $O > U$. Hingegen sind die Umkehrungen, welche den Annahmen $O_1 = U_1$ oder $O > U$ entsprechen würden, nicht allgemein zulässig, wenn nicht gleichzeitig die Voraussetzung (7) erfüllt ist. Die beiden eben abgeleiteten Folgesätze kann man in folgender Weise aussprechen:

Hat die Function $F(x)$ für $\lim x = b$ einen bestimmten Grenzwert, so kann man denselben berechnen, indem man die Variable x eine den Bedingungen (5) und (6) entsprechende und sonst beliebige Zahlenreihe $x_1, x_2, x_3, \dots$ durchlaufen lässt.

Hat die Function $F(x_n)$ für $\lim n = \infty$ unter denselben Voraussetzungen bezüglich der Zahlen x_n keinen bestimmten Grenzwert, so gilt dasselbe von der Function $F(x)$ bei stetig erfolgendem Grenzübergang $\lim x = b$.

Die Umkehrungen dieser beiden Sätze sind nicht allgemein richtig.

3. Da ein bestimmtes Integral als Function seiner oberen Grenze aufgefasst in jenen Intervallen des Argumentes (d. i. der oberen Grenze) monoton verläuft, in denen die Function unter dem Integralzeichen das Vorzeichen nicht ändert, so ergeben sich durch Specialisierung der oben bewiesenen Sätze die folgenden:

Verwandelt man das Integral (1) durch Zerlegung des Integrationsintervalles entsprechend den Bedingungen (2) und (3) in die unendliche Reihe (4), so liegen die Unbestimmtheitsgrenzen dieser Reihe zwischen jenen des Integrals oder fallen mit denselben zusammen. Letzteres findet sicher dann statt,

wenn die Function unter dem Integralzeichen in allen Intervallen (x_m, x_{m+1}) , (x_{m+1}, x_{m+2}) , $\dots$, welche (10) auf eine angebbare Zahl x_m der Reihe $x_1, x_2, x_3, \dots$ folgen, das Vorzeichen nicht ändert.

Um z. B. die Unbestimmtheitsgrenzen des Integrals

$$\int_0^{\infty} \sin x dx$$

zu berechnen, hat man also $x_n = n\pi$ zu setzen und erhält so die Reihe

$$2 - 2 + 2 - 2 + \dots$$

mit den Unbestimmtheitsgrenzen 0 und 2. Diese Zahlen sind also auch die Unbestimmtheitsgrenzen des gegebenen Integrals.

Aus dem ersten Theile des vorausgehenden Satzes ergeben sich durch Specialisierung die nachstehenden Sätze:

Hat das Integral (1) einen bestimmten endlichen oder unendlichen Wert, so ist dieser zugleich die Summe der entsprechenden Reihe (4), wenn die Zahlen $x_1, x_2, x_3, \dots$ den Bedingungen (2) und (3) genügen.

Unter denselben Bedingungen bezüglich der Zahlen $x_1, x_2, x_3, \dots$ folgt aus der Divergenz der Reihe (4) auch die Divergenz des Integrals (1).

Die Umkehrungen dieser beiden Sätze sind nicht allgemein zulässig, wenn nicht gleichzeitig die Bedingung (10) erfüllt ist.

Die im Vorausgehenden gewonnenen Resultate lassen sich auch in der folgenden Weise aussprechen:

Ändert $f(x)$ von einem angebbaren Werte des Argumentes an das Vorzeichen nicht mehr und genügen die Zahlen $x_1, x_2, x_3, \dots$ den Bedingungen (2) und (3), so besteht immer die Gleichung:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx + \dots \text{ in 'inf.}$$

Folgen hingegen auf jeden noch so großen Wert des Argumentes Zeichenwechsel von $f(x)$, so besteht die vorausgehende Gleichung nicht immer, wenn nur die Bedingungen (2) und (3) erfüllt sind; sie ist jedoch stets richtig, wenn auch die Bedingung (10) erfüllt ist.

Wenn in dem letzten Falle das Integral und die Reihe unbestimmt sind, so ist obige Gleichung so aufzufassen, dass die Unbestimmtheitsgrenzen des Integrals und der Reihe gleich sind.

4. Schließlich führe ich noch einen Satz an, aus welchem hervorgeht, dass die in dieser Arbeit behandelte Methode namentlich zum Nachweise der bedingten Convergenz von bestimmten Integralen geeignet ist:

Wenn $f(x)$ bei wachsendem Argument ohne Aufhören zwischen positiven und negativen Werten oscilliert und die Zahlen $x_1, x_2, x_3, \dots$ den Bedingungen (2), (3) und (10) genügen, wenn ferner die Reihe (4), welche in diesem Falle aus positiven und negativen Gliedern besteht, nur bedingt convergiert, so ist auch das Integral (1) nur bedingt convergent, d. h. es hat

einen bestimmten endlichen Wert, während das Integral

$$(11) \quad \int_a^{\infty} |f(x)| dx$$

unendlich groß ist.

Unter den gemachten Voraussetzungen ist nämlich die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ convergent und die Reihe $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots$ divergent. Daher ist nach den unter 3. bewiesenen Sätzen das Integral (1) convergent und das Integral (11) divergent, w. z. b. w.

Einige Anwendungen der hier abgeleiteten Sätze gedenke ich in einer später folgenden Arbeit nachzutragen.