Eine Bemerkung zu zwei Sätzen von Lamé und Bertrand.

Von † F. Machovec in Karolinenthal.

Es ist bekannt, dass die Polarebenen eines Punktes a bezüglich einer Schaar confocaler Flächen 2. Grades ein Ebenenbüschel Σ 3. Ordnung bilden, dessen Achsensystem dem gemeinschaftlichen Axencomplexe jener Flächen angehört. Alle in jeder Ebene ρ dieses Büschels enthaltenen Achsen, d. h. die Geraden, in welchen diese Ebene von den Ebenen des Büschels geschnitten wird, umhüllen eine Parabel P_2 . Durch den Punkt a gehen drei Flächen der Schaar, welche wir mit $\varphi'_2, \varphi''_2, \varphi'''_2$ und ihre Normalen im Punkte a mit N', N'', N''' bezeichnen wollen. Die Ebenen $N' N'' \equiv \rho'''$, $N'' N''' \equiv \rho'$ und $N''' N' \equiv \rho''$, als Berührungsebenen der Flächen φ'_2 , resp. φ'_2 und φ'_2 im Punkte a , liegen auch in dem Ebenenbüschel Σ und die zu diesen Ebenen gehörenden Parabeln P'_2 , resp. P'_2, P'_2 berühren die Normalen N', N'' und N''' in den Hauptkrümmungsmittelpunkten s' und s'_1, s'' und s'_1, s''' und s'_1 der Flächen φ'_2 , resp. φ'_2, φ'_2 in Punkte a . Die Bezeichnung sei so gewählt, dass z. B. die Berührungspunkte der Parabel P'_2 mit den Geraden N' und N''' mit s'_1 und s''' bezeichnet werden, woraus die übrigen Bezeichnungen durch cyklische Permutation der oberen Indices abgeleitet werden.

Ist nun ρ die Polarebene des Punktes a bezüglich einer beliebigen Fläche φ_2 der Schaar, so gilt die Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$N'(\rho \rho' \rho'' \rho''') = N''(\rho \rho' \rho'' \rho''') = N'''(\rho \rho' \rho'' \rho'''),$$

weil die Achsen des Ebenenbüschels Σ von seinen Ebenen in projectivischen Punktreihen (in diesem speciellen Falle sind die Reihen ähnlich) geschnitten werden. Bei der oben gewählten Bezeichnung ist aber

$$\begin{aligned} \text{der Punkt } N' \rho' &\equiv N'' \rho'' \equiv N''' \rho''' \equiv a \\ \text{,,} \quad \text{,,} \quad N' \rho'' &\equiv s', \quad N' \rho''' \equiv s'_1 \text{ etc.,} \end{aligned}$$

so dass man aus der obigen Gleichung die Gleichung

$$(r' a s' s_1') = (r'' s_1'' a s'') = (r''' s''' s_1''' a)$$

erhält, worin $r^{(k)}$ den Durchschnittspunkt der Normale $N^{(k)}$ mit der Ebene ρ bezeichnet.

Setzt man nun der Kürze wegen das Doppelverhältnis

$$(a r^{(k)} s^{(k)} s^{(k)}) = \lambda^{(k)},$$

so geht die voranstehende Gleichung in

$$\frac{1}{\lambda'} = 1 - \lambda'' = \frac{\lambda'''}{\lambda''' - 1}$$

über, woraus sehr leicht die drei Gleichungen

$$(a) \quad \frac{1}{\lambda'} + \lambda'' = 1, \quad \frac{1}{\lambda''} + \lambda''' = 1, \quad \frac{1}{\lambda'''} + \lambda' = 1$$

abgeleitet werden können.

Aus je zwei von diesen Gleichungen erhält man durch Elimination des Ausdruckes $1 - \lambda^{(k)}$, z. B. aus der ersten und zweiten durch Elimination von $1 - \lambda''$, die Gleichung

$$(b) \quad \lambda' \lambda'' \lambda''' = -1.$$

Die Gleichungen (a) und (b) drücken eine allgemeinere Relation zwischen den Hauptkrümmungsradien der drei durch einen Punkt gehenden confocalen Flächen in diesem Punkte aus, als die Gleichungen von Bertrand und Lamé.

Nimmt man nämlich anstatt der Fläche φ_2 den im Unendlichen liegenden Focalkegelschnitt der Schaar, so tritt an Stelle der Ebene ρ die unendlich ferne Ebene des Raumes und es wird:

$$\lambda^{(k)} = \frac{r^{(k)}}{r_1^{(k)}},$$

wobei $r^{(k)}$ und $r_1^{(k)}$ die Hauptkrümmungsradien der Fläche $\varphi_2^{(k)}$ im Punkte a bezeichnen. Die Gleichungen (a) und (b) gehen dann in die bekannten Gleichungen von Bertrand und Lamé über.