14. Zur Frage: Was bleibt in einem permanenten Magneten konstant?

von R. Gans und R. H. Weber.

Diese Frage ist in neuerer Zeit wiederholt behandelt¹⁾ worden mit sehr verschiedenem Resultat. Sie bietet für die Technik ein gewisses Interesse und es ist deshalb von Wichtigkeit, sie theoretisch und experimentell klarzulegen.

Im allgemeinsten Falle bleibt selbstverständlich in einem permanenten Magneten nichts konstant, denn durch Magnetisieren und Entmagnetisieren lassen sich alle magnetischen Größen, selbst die Permeabilität, verändern.

Wir beschränken uns deshalb auf so kleine Feldänderungen, daß man von der Hysteresis absehen kann, und fragen also: Was bleibt in einem permanenten Magneten konstant, wenn der magnetische Widerstand im Bereiche seines Feldes (und damit das Feld selbst) verändert wird?

1. Allgemeine Definitionen.

Den magnetischen Widerstand w_m definieren wir analog dem elektrischen in bekannter Weise. Ist l die Länge einer Kraftröhre im Innern eines Mediums D von der Permeabilität μ , q der laufende Querschnitt, ds ein Längenelement der Kraftröhre, so ist der Widerstand des Volumens unseres Mediums D , das von dieser Kraftröhre erfüllt ist:

$$(1) \quad w_m = \int_l \frac{ds}{\mu q}.$$

1) F. Emde, Elektrotechn. Zeitschr. 24. p. 949. 1903; H. Weichsel, l. c. 25. p. 34. 1904; R. Hiecke, l. c. p. 35 u. p. 205; M. Korndörfer, l. c. p. 101; J. Busch, l. c. p. 118 u. p. 309; H. Eichel, Hallenser Dissertation 1903.

Der Widerstand für mehrere Krafttröhren, und damit für einen von Kraftlinien erfüllten Raum, setzt sich aus diesen Elementarwiderständen ebenso zusammen wie der elektrische Widerstand. Es ist also zur Kenntnis des Widerstandes die Kenntnis des Verlaufes der Kraftlinien erforderlich. Einfach wird der Ausdruck nur, wenn ein homogenes Magnetfeld einen zylindrischen Raum parallel der Achse durchsetzt. Es ist dann

$$w_m = \frac{l}{\mu \cdot q},$$

wenn q den Querschnitt des Zylinders, l seine Länge bedeutet.

O. Heaviside¹⁾ hat zur Darstellung der Vorgänge in permanenten Magneten eine konstante eingeprägte magnetische Kraft herangezogen. E. Cohn²⁾ hat die wahre Magnetisierung, d. h. das magnetische Moment der Volumeneinheit als konstant gewählt. Daß diese beiden Annahmen auf dasselbe herauskommen, haben Abraham und Föppl³⁾ vor kurzem erwähnt.

Unter der wahren Magnetisierung verstehen wir das magnetische Moment der Volumeneinheit, wenn der Magnet sich mit seinem Felde im Vakuum befindet. Darüber lagert sich die induzierte Magnetisierung, die auftritt, wenn die Permeabilität in der Umgebung sich ändert.

Die Magnetisierung J steht mit dem magnetischen Moment K in der Relation:

$$K_x = \int_{\tau} J_x d\tau.$$

Es ist also J ein Vektor, den wir uns, wie die Kraftlinien, durch Magnetisierungslinien dargestellt denken können. Im Innern eines Magneten verlaufen diese Linien im großen Ganzen vom negativen Pol zum positiven. Im Außenraum gibt es keine Magnetisierungslinien.

1) Vgl. z. B. H. A. Lorentz, Math. Enc. 5, 2. Heft 1. p. 101.

2) E. Cohn, Das elektromagnetische Feld. Leipzig 1900.

3) M. Abraham u. A. Föppl, Theorie der Elektrizität 1. p. 389. 1904.

4) E. Cohn, l. c. p. 185.

Wir wollen weiter einen Vektor

$$(2) \quad B = \mu M + J$$

definieren, die „Induktion“. Dieser Vektor ist überall im Raume vorhanden. Er geht im Außenraume von selbst in die magnetische Polarisierung μM über; die Induktionslinien gehen im Außenraum also in die Kraftlinien über. Die Induktionslinien sind geschlossene Kurven, wie die Strömungslinien eines elektrischen Stromes.

2. Magnetomotorische Kraft eines Stahlmagneten.

Wir denken uns eine Induktionsröhre AaB und definieren die magnetomotorische Kraft E_m dadurch, daß der Induktionsfluß an einer beliebigen Stelle a , d. h. die Anzahl Induktionslinien (B), die den Querschnitt hier durchsetzen, gegeben sein soll durch:

$$(3) \quad q_a B = \frac{E_m}{w_i + w_a},$$

worin w_a der Widerstand der Kraft-röhre AaB nach (1) ist. Es soll ebenso

$$w_i = \int_B^A \frac{ds}{q \mu}$$

den inneren Widerstand bezeichnen. q ist der laufende Querschnitt dieser Röhre, die als unendlich dünn zu betrachten ist. Also wird

$$q_a B = \frac{E_m}{\int_A^B \frac{ds}{q \mu_0} + \int_B^A \frac{ds}{q \mu}} = \frac{E_m}{w_i + w_a}.$$

$q \cdot B$ ist aber eine Konstante über die ganze Länge der Induktionsröhre, somit folgt:

$$E_m = \int_A^B \frac{B}{\mu_0} ds + \int_B^A \frac{B}{\mu} ds$$

oder

$$E_m = \int_0 \frac{B}{\mu} ds \quad (\text{zu integrieren über eine geschlossene } B\text{-Linie})$$

$$(4) \quad = \int_0 M_s ds + \int_B^A \frac{J_s}{\mu} ds,$$

denn außerhalb des Magneten ist $J=0$.

Das erste Integral verschwindet, wenn keine Ströme die Krafttröhre durchsetzen. Es ist somit

$$E_m = \int_B^A \frac{J_s}{\mu} ds,$$

$$q_a \mu_0 M_a = \frac{\int_B^A \frac{J_s}{\mu} ds}{u_i + w_a}.$$

Man erkennt in unserer Definition der magnetomotorischen Kraft (3) die Analogie mit der elektromotorischen Kraft E . Es ist

$$(5) \quad E = \int_0 (E_s - K_s) ds,$$

worin K nur an den Stellen auftritt, wo irgendwelche Inhomogenität vorliegt. Es ist $\int E_s ds = 0$, wenn kein veränderliches Magnetfeld die Kurve s durchsetzt. Dann ist also

$$E = - \int_0 K_s ds.$$

Es folgt aus unseren Darlegungen: *Wenn die Permeabilität des Stahlmagneten bei den vorgenommenen Veränderungen des äußeren Widerstandes als konstant angesehen werden darf, so bedingt die Konstanz der Magnetisierung die Konstanz der magnetomotorischen Kraft.*

Würde anstatt (2) die Gleichung

$$(2') \quad B = \mu(M + J)$$

gelten, und die eingeprägte Kraft J konstant sein, so wäre

also in unseren Ausführungen überall μJ anstatt J zu setzen. Dann würde die Konstanz der magnetomotorischen Kraft auch bei Veränderlichkeit von μ gelten.

3. Permanenter Magnetismus und die Maxwellschen Gleichungen.

Kurz zusammenfassen läßt sich das Vorige in den beiden Maxwellschen Gleichungen

$$(6) \quad c \cdot \text{rot } \mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{A}.$$

$$(7) \quad -c \cdot \text{rot } \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Hierin ist

$$(8) \quad \mathbf{A} = \lambda (\mathbf{E} - \mathbf{K}) \quad (\text{vgl. (5)}),$$

$$(9) \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{M} + \mathbf{J} \quad (\text{vgl. (2)})$$

oder

$$(9') \quad \mathbf{B} = \mu (\mathbf{M} + \mathbf{J}) \quad (\text{vgl. (2')}),$$

$$(10) \quad \mathbf{D} = \varepsilon (\mathbf{E} - \mathbf{K}).$$

Genau so, wie sich aus (6) und (8) für stationäre Ströme das Ohmsche Gesetz ergibt¹⁾, so ergibt sich dasselbe von uns abgeleitete Analogon (Gleichung (3) und (4)) aus (7) und (9) bez. (9').

4. Gibt es wahren Magnetismus?

Nach Drude²⁾ und anderen gibt es keinen wahren Magnetismus, während Cohn³⁾ seine Einführung für zulässig und zweckmäßig erklärt. H. A. Lorentz⁴⁾ weist darauf hin, daß beide Annahmen identisch sind und sich nur formal unterscheiden.

Wir können nämlich $\mathbf{M}$ und $\mathbf{E}$ auf den linken Seiten von (6) und (7) durch (9') und (10) eliminieren und erhalten

$$(6') \quad c \cdot \text{rot} \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu} - \mathbf{J} \right) = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{A},$$

$$(7') \quad -c \cdot \text{rot} \left(\frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} + \mathbf{K} \right) = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

1) Vgl. E. Cohn, l. c. p. 138.

2) P. Drude, Physik des Äthers, p. 52. Stuttgart 1899.

3) E. Cohn, l. c., Einleitung.

4) H. A. Lorentz, l. c. p. 101.

In (6') brauchen wir nur B durch $\mu M'$ zu ersetzen, so haben wir

$$(6'') \quad c \cdot \text{rot}(M' - J) = \frac{\partial D}{\partial t} + A.$$

Hier wäre jetzt $\mu M'$ quellenfrei, dafür ist das Linienintegral $\int_0 M'_s ds$ nicht mehr Null, sondern gleich $\int_0 J_s ds$, konstant für einen permanenten Magneten. Diese Darstellung ist auch bei „Abraham und Föppl“ gewählt. Dort ist die eingeprägte Kraft $-J$ mit $\mathfrak{S}_s$ bezeichnet.

Die Analogie zwischen magnetomotorischer und elektromotorischer Kraft tritt in den Maxwellschen Gleichungen deutlich hervor. Physikalisch streng ist sie jedoch nicht. Die Größe K existiert nur an Stellen irgendwelcher Inhomogenität. Ein entsprechendes Glied beim Magnetismus ist unbekannt. Dafür tritt das Glied $-J/\mu$ bez. $-J$ auf, zu dem wir ein strenges Analogon im elektrischen Felde definieren könnten, die „Elektrisierung“. Wir könnten dann entsprechend den Folgerungen dieses Abschnittes über den wahren Magnetismus den Schluß ziehen: Es gibt keine wahre Elektrizität.

Die Einführung der Elektrisierung geschieht nicht, weil im elektrischen Felde die Bedingung $\sum e = 0$ für jedes Volumenelement nicht vorliegt, deren Analogon beim Magnetismus die Einführung der Magnetisierung wünschenswert macht.

Tübingen, im Oktober 1904.

(Eingegangen 18. Dezember 1904.)