

## SUR UN THÉORÈME DE M. BRUNS

PAR

SOPHIE KOWALEVSKI

à STOCKHOLM.

Dans son mémoire *De proprietate quadam functionis potentialis corporum homogeneorum*<sup>1</sup> M. BRUNS a démontré le théorème suivant: Soit  $T$  un corps solide homogène limité par une surface fermée  $S$ , définie par une équation analytique  $W(x, y, z) = 0$ . Si l'on désigne par  $V_a$  la fonction analytique qui coïncide avec le potentiel de  $T$  dans chaque point intérieur à ce corps, cette fonction peut être développée dans le voisinage de chaque point régulier  $x_1, y_1, z_1$  de la surface  $S$ , en une série de puissances entières et positives de  $x - x_1, y - y_1, z - z_1$ . Il en résulte que cette fonction analytique  $V_a$  existe aussi à l'intérieur de  $T$ . Pour démontrer ce théorème important M. BRUNS démontre d'abord l'existence d'une fonction analytique  $U$ , satisfaisant à l'équation

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4k\pi$$

et jouissant des propriétés suivantes:

1) Sur toute la surface  $S$ , on a

$$U = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$

2) Dans chaque point régulier de la surface  $S$ ,  $U$  peut être développée suivant les puissances entières et positives de  $x - x_1, y - y_1, z - z_1$ .

---

<sup>1</sup> Dissertation inaugurale, Berlin 1871.

*Acta mathematica*. 15. Imprimé le 13 mai 1890.

Dans la note présente je vais m'occuper d'une transformation de l'équation différentielle  $\Delta U$  en un système de coordonnées curvilignes, qui fait ressortir immédiatement l'existence d'une pareille fonction  $U$ .

Soit  $x_1, y_1, z_1$  les coordonnées d'un point quelconque de la surface  $S$ ;  $\xi, \eta, \zeta$  les cosinus des angles que la normale extérieure en ce point,  $s$  fait avec les axes de  $x, y, z$ , et posons

$$x = x_1 + \xi s,$$

$$y = y_1 + \eta s,$$

$$z = z_1 + \zeta s,$$

où la signification géométrique de  $s$  est évidente. Les coordonnées  $x_1, y_1, z_1$  de chaque point de la surface  $S$  peuvent être représentées comme fonctions analytiques monodromes de deux variables  $u, v$ . La surface  $S$  n'ayant ni angles ni arêtes,  $\xi, \eta, \zeta$  sont aussi des fonctions monodromes de  $u$  et de  $v$ .

$x, y, z$  sont donc des fonctions monodromes de  $u, v, s$ . Le réciproque n'a pas en général lieu. Mais on peut toujours trouver deux surfaces fermées  $S_1$  et  $S_2$  dont l'une enveloppe la surface  $S$  et l'autre en est enveloppée, et telles qu'à chaque point de l'espace limité par  $S_1$  et  $S_2$  correspond toujours un, et seulement un système de valeurs  $u, v, s$ , dans lequel le module de  $s$  ne surpasse pas une certaine quantité positive  $\delta$ .

Transformons l'expression à différences partielles  $\Delta U$  dans ces nouvelles coordonnées  $u, v, s$ .

La formule bien connue pour cette transformation est la suivante:<sup>1</sup>

Si l'on pose

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = Pdu^2 + Qdv^2 + Rds^2 + 2pdvds + 2qduds + 2rdu dv,$$

$$\Omega = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial s} \end{vmatrix}, \quad \begin{aligned} \Omega^2 E &= QR - p^2, & \Omega^2 e &= qr - pP, \\ \Omega^2 E_1 &= RP - q^2, & \Omega^2 e_1 &= rp - qQ, \\ \Omega^2 E_2 &= PQ - r^2, & \Omega^2 e_2 &= pq - rR, \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Voir JACCOBI, *Gesammelte Werke*, T. 2, p. 199.

on a les relations suivantes

$$\begin{aligned}\Omega^2 &= PQR - Pp^2 - Qq^2 - Rr^2 + 2pqr, \\ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 &= E\left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)^2 + E_1\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)^2 + E_2\left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)^2 \\ &+ 2e\frac{\partial U}{\partial v}\frac{\partial U}{\partial s} + 2e_1\frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial s} + 2e_2\frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial v}, \\ \Omega\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right\} &= \frac{\partial}{\partial u}\left\{\Omega\left(E\frac{\partial U}{\partial u} + e_2\frac{\partial U}{\partial v} + e_1\frac{\partial U}{\partial s}\right)\right\} \\ &+ \frac{\partial}{\partial v}\left\{\Omega\left(e_2\frac{\partial U}{\partial u} + E_1\frac{\partial U}{\partial v} + e\frac{\partial U}{\partial s}\right)\right\} \\ &+ \frac{\partial}{\partial s}\left\{\Omega\left(e_1\frac{\partial U}{\partial u} + e\frac{\partial U}{\partial v} + E_2\frac{\partial U}{\partial s}\right)\right\}.\end{aligned}$$

Il s'agit donc de calculer les valeurs de  $P, Q, R, p, q, r$ .

On a

$$dx = dx_1 + sd\xi + \xi ds,$$

$$dy = dy_1 + sd\eta + \eta ds,$$

$$dz = dz_1 + sd\zeta + \zeta ds.$$

$\xi, \eta, \zeta$  étant les cosinus des angles que la normale extérieure au point  $x_1, y_1, z_1$  fait avec les axes des coordonnées, on doit avoir

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

$$\xi d\xi + \eta d\eta + \zeta d\zeta = 0,$$

$$\xi dx_1 + \eta dy_1 + \zeta dz_1 = 0.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}dx^2 + dy^2 + dz^2 &= dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 + 2s(dx_1 d\xi + dy_1 d\eta + dz_1 d\zeta) \\ &+ s^2(d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2) + ds^2.\end{aligned}$$

En adoptant les désignations de GAUSS,<sup>1</sup> je pose

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= a, & \frac{\partial x_1}{\partial v} &= a', & E &= a^2 + b^2 + c^2, \\ \frac{\partial y_1}{\partial u} &= b, & \frac{\partial y_1}{\partial v} &= b', & F &= aa' + bb' + cc', & \omega &= \sqrt{EG - F^2}, \\ \frac{\partial z_1}{\partial u} &= c, & \frac{\partial z_1}{\partial v} &= c', & G &= a'^2 + b'^2 + c'^2, \\ \alpha &= \frac{\partial a}{\partial u}, & \alpha' &= \frac{\partial a}{\partial v} = \frac{\partial a'}{\partial u}, & \alpha'' &= \frac{\partial a'}{\partial v}, \\ \beta &= \frac{\partial b}{\partial u}, & \beta' &= \frac{\partial b}{\partial v} = \frac{\partial b'}{\partial u}, & \beta'' &= \frac{\partial b'}{\partial v}, \\ \gamma &= \frac{\partial c}{\partial u}, & \gamma' &= \frac{\partial c}{\partial v} = \frac{\partial c'}{\partial u}, & \gamma'' &= \frac{\partial c'}{\partial v}. \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} dx_1 &= a du + a' dv, & dy_1 &= b du + b' dv, & dz_1 &= c du + c' dv, \\ dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 &= E du^2 + 2F du dv + 2G dv^2, \\ d\xi dx_1 + d\eta dy_1 + d\zeta dz_1 &= -(\xi d^2 x_1 + \eta d^2 y_1 + \zeta d^2 z_1); \end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned} d^2 x_1 &= \alpha du^2 + 2\alpha' du dv + \alpha'' dv^2, \\ d^2 y_1 &= \beta du^2 + 2\beta' du dv + \beta'' dv^2, \\ d^2 z_1 &= \gamma du^2 + 2\gamma' du dv + \gamma'' dv^2, \end{aligned}$$

et en posant

$$\begin{aligned} A &= bc' - cb', \\ B &= ca' - ac', \\ C &= ab' - ba', \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{A}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{A}{\omega}, \\ \eta &= \frac{B}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{B}{\omega}, \\ \zeta &= \frac{C}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{C}{\omega}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> *Disquisitiones generales circa superficies curvas.*

Donc, en posant

$$D = A\alpha + B\beta + C\gamma,$$

$$D' = A\alpha' + B\beta' + C\gamma',$$

$$D'' = A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'',$$

on a

$$\xi d^2x_1 + \eta d^2y_1 + \zeta d^2z_1 = \frac{Ddu^2 + 2D'uv + D''v^2}{\omega}.$$

Il reste à calculer en  $u, v$  l'expression de

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2.$$

Mais on a

$$d\xi = \frac{(A^2 + B^2 + C^2)dA - A(AdA + BdB + CdC)}{\omega^3},$$

$$d\eta = \frac{(A^2 + B^2 + C^2)dB - B(AdA + BdB + CdC)}{\omega^3},$$

$$d\zeta = \frac{(A^2 + B^2 + C^2)dC - C(AdA + BdB + CdC)}{\omega^3}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 &= \frac{(A^2 + B^2 + C^2)(dA^2 + dB^2 + dC^2) - (AdA + BdB + CdC)^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2} \\ &= \frac{(BdC - CdB)^2 + (CdA - AdC)^2 + (AdB - BdA)^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2}. \end{aligned}$$

Mais on a

$$A = bc' - cb' \text{ etc.},$$

$$dA = (b\gamma' + c'\beta - c\beta' - b'\gamma)du + (b\gamma'' + c'\beta' - c\beta'' - b'\gamma')dv \text{ etc.}$$

Par conséquent

$$BdC - CdB = (D'a - Da)du + (D''a - D'a')dv,$$

$$CdA - AdC = (D'b - Db)du + (D''b - D'b')dv,$$

$$AdB - BdA = (D'c - Dc)du + (D''c - D'c')dv.$$

et en posant

$$\begin{aligned} L &= ED'^2 - 2FDD' + GD^2, \\ L' &= ED'D'' - F(DD'' + D'^2) + GDD', \\ L'' &= ED''^2 - 2FD'D'' + GD'^2, \\ d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 &= \frac{Ldu^2 + 2L'dudv + L''dv^2}{\omega^4}. \end{aligned}$$

Tous les éléments qui entrent dans l'expression transformée de  $dx^2 + dy^2 + dz^2$  sont maintenant calculés et l'on trouve en posant

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = Pdu^2 + Qdv^2 + Rds^2 + 2pdvds + 2qdsdu + 2rdudv,$$

$$P = E - 2s\frac{D}{\omega} + s^2\frac{L}{\omega^4}, \quad p = 0,$$

$$Q = G - 2s\frac{D''}{\omega} + s^2\frac{L''}{\omega^4}, \quad q = 0,$$

$$R = 1, \quad r = F - 2s\frac{D'}{\omega} + s^2\frac{L'}{\omega^4}.$$

En posant donc

$$\Omega^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial s} \end{vmatrix}^2 = PQR - Pp^2 - Qq^2 - Rr^2 + 2pqs,$$

et en définissant les quantités  $E, E_1, E_2, e, e_1, e_2$  comme plus haut on a

$$\begin{aligned} \Omega^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \Omega \left( E \frac{\partial U}{\partial u} + e_2 \frac{\partial U}{\partial v} + e_1 \frac{\partial U}{\partial s} \right) \right\} \\ &+ \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \Omega \left( e_2 \frac{\partial U}{\partial u} + E_1 \frac{\partial U}{\partial v} + e \frac{\partial U}{\partial s} \right) \right\} \\ &+ \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \Omega \left( e_1 \frac{\partial U}{\partial u} + e \frac{\partial U}{\partial v} + E_2 \frac{\partial U}{\partial s} \right) \right\}. \end{aligned}$$

L'équation différentielle transformée  $\Delta u = -4k\pi$  prend donc la forme suivante, (vu que  $E_2 = 1$ )

$$\Omega \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + A_1 \frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + B_1 \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} + a_1 \frac{\partial U}{\partial u} + b_1 \frac{\partial U}{\partial v} + c_1 \frac{\partial U}{\partial s} = -4k\pi\Omega^2.$$

Les quantités  $A_1, B_1, a_1, b_1, c_1$  sont, comme on le voit immédiatement, des fonctions entières de second degré en  $s$  dont les coefficients sont des fonctions de  $u$  et de  $v$  qui dans le voisinage de chaque système de valeurs  $u_0, v_0$  correspondant à un point  $x_1, y_1, z_1$  de la surface  $S$  peuvent être développées en séries de puissances positives et entières de  $u - u_0, v - v_0$ .

La surface  $S$  est représentée dans les coordonnées que nous considérons par l'équation

$$s = 0.$$

La fonction  $U$  doit être égale à zéro dans chaque point de cette surface. Il en est de même de toutes ses dérivées de premier ordre.

Si le coefficient  $\Omega$  de  $\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}$  dans l'équation différentielle transformée n'est pas égal à zéro pour aucun système de valeurs  $u_0, v_0$  correspondant à un point de la surface  $S$ , il existera une seule fonction  $U$  satisfaisant à la condition

$$(U)_{s=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)_{s=0} = 0,$$

et cette fonction pourra être représentée par une série convergente<sup>1</sup> procédant selon les puissances entières positives de  $s, u - u_0, v - v_0$ .

Cette fonction sera évidemment celle que nous cherchons. Il faut donc examiner plus attentivement la valeur de  $\Omega$ .

On a

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= PQ - r^2 = \left(E - 2s \frac{D}{\omega} + s^2 \frac{L}{\omega^4}\right) \left(G - 2s \frac{D'}{\omega} + s^2 \frac{L''}{\omega^4}\right) - \left(F - 2s \frac{D'}{\omega} + s^2 \frac{L'}{\omega^4}\right)^2 \\ &= EG - F^2 - \frac{2s}{\omega} (ED' - 2FD' + GD) + \frac{s^2}{\omega^4} [EL'' - 2FL' + GL + 4\omega^2(DD' - D'^2)] \\ &\quad - 2 \frac{s^3}{\omega^5} (LD'' - 2L'D' + L''D) + \frac{s^4}{\omega^8} (LL'' - L'^2). \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> Voir mon mémoire *Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen*, Journal für Mathematik, T. 80.

En désignant par  $\rho_1$  et  $\rho_2$  les deux rayons de courbure dans le point de la surface dont les coordonnées sont  $x_1, y_1, z_1$ , on a

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2} = \frac{DD'' - D'^2}{\omega^4}, \quad \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{ED'' - 2FD' + GD}{\omega^3}.$$

On trouve de plus facilement les relations suivantes

$$EL'' - 2FL' + GL = (ED'' - 2FD' + GD)^2 - 2(EG - F^2)(DD'' - D'^2),$$

$$LD'' - 2L'D' + L''D = (ED'' - 2FD' + GD)(DD'' - D'^2),$$

$$LL'' - L'^2 = (EG - F^2)(DD'' - D'^2)^2.$$

En portant ces valeurs dans l'expression de  $\Omega$  on trouve

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= \omega^2 \left[ 1 - 2s \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) + s^2 \left( \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{4}{\rho_1\rho_2} \right) - \frac{2s^3}{\rho_1\rho_2} \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) + \frac{s^4}{\rho_1^2\rho_2^2} \right] \\ &= \omega^2 \left( 1 - \frac{s}{\rho_1} \right)^2 \left( 1 - \frac{s}{\rho_2} \right)^2. \end{aligned}$$

Ni la quantité  $\omega = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ , ni aucun des deux rayons de courbure  $\rho_1, \rho_2$  ne peuvent être égaux à zéro dans un point de la surface pour lequel la direction de la normale est déterminée.  $\Omega$  n'est donc point égal à zéro pour aucun système de valeurs  $s_0, u_0, v_0$  tel que le module de  $s_0$  est moindre qu'une certaine quantité  $\delta$ , et qu'aux valeurs  $u_0, v_0$  corresponde un point  $x_1, y_1, z_1$  de la surface  $S$ .  $\frac{1}{\Omega}$  peut donc être développé selon les puissances entières positives de  $u - u_0, v - v_0, s - s_0$ . Mais au système de valeurs  $s_0, u_0, v_0$  correspond un point  $x, y, z$  compris dans l'espace  $\theta$  limité par les surfaces  $S_1$  et  $S_2$ . Vu que dans le voisinage de chacun de ces points les quantités  $u - u_0, v - v_0, s - s_0$  peuvent être développées selon les puissances entières positives de  $x - x_0, y - y_0, z - z_0$ , la fonction  $U$  peut donc aussi être représentée par une série semblable.

C. Q. F. D.