Exemples de la détermination des coniques dans un système donné qui satisfont à une condition donnée.

Par

H. G. ZEUTHEN à Copenhague.

Dans une lettre adressée à M. Klein, qui a été insérée dans le tome XXXVII des *Annalen* p. 461—464, j'ai essayé de rendre compte — si bien que je pouvais le faire en peu de mots — de la véritable signification de l'hypothèse de Chasles sur l'expression $\alpha\mu + \beta\nu$ du nombre des coniques d'un système qui satisfont à une condition donnée, et sur les raisons qui ont nécessité la modification d'Halphen de cette hypothèse. Pour illustrer par un exemple les remarques que j'ai faites à cet égard j'aurais pu renvoyer à ceux dont se sert Halphen dans sa première communication sur la nécessité d'une modification*).

Ces exemples éclairent immédiatement, pourquoi l'hypothèse de Chasles a dans ces cas des exceptions. Je donnerai ici un exemple où la raison de l'exception — étant toujours la même que dans les exemples d'Halphen — est plus voilée, et où par conséquent, avant la découverte d'Halphen, la confiance dont jouissait alors l'hypothèse de Chasles aurait pu encore plus facilement tromper les géomètres.

J'aurai à m'occuper des deux systèmes de coniques que représente, dans un système ordinaire de coordonnées parallèles, l'équation

$$(1) \quad y^2 = px + \frac{p}{2a} x^2$$

suivant qu'on regarde a ou p comme paramètre variable, et du système représenté par l'équation

$$(2) \quad x^2 - y^2 = k(x - a)^2,$$

où k est le paramètre variable.

J'appellerai ces systèmes $(1a)$, $(1p)$ et (2) . On voit sans difficulté qu'ils ont, tous les trois, les caractéristiques $\mu = 1$, $\nu = 1$.

*) Comptes rendus du 4 septembre 1876.

Je désignerai par q le coefficient de x dans l'expression qu'on obtient de y^2 en prenant le diamètre parallèle à la droite $y = \lambda x$ pour axe des x et la tangente en un des points d'intersection de ce diamètre avec la courbe pour axe des y ; alors q est ce qu'on appellerait, dans le langage de la géométrie analytique élémentaire, le paramètre correspondant au diamètre. En désignant par ω l'angle des axes des coordonnées originaires, on déduira l'expression suivante de q^2 de l'équation (1):

$$q^2 = \frac{(4\lambda^2 a^2 + 4\lambda \cos \omega \cdot ap + p^2)^2}{(1 + 2 \cos \omega \cdot \lambda + \lambda^2) p (p - 2\lambda^2 a)},$$

et la suivante de l'équation (2):

$$q^2 = \frac{4k[\lambda^2 - 2\lambda \cdot \cos \omega (k-1) + (k-1)^2]^2}{(1 + 2\lambda \cdot \cos \omega + \lambda^2)(\lambda^2 + k - 1)(k-1)^3} a^2.$$

Ces expressions montrent que dans les trois systèmes (1a), (1p) et (2) les nombres des coniques où le paramètre q a une valeur donnée sont égales, respectivement, à 4, 4 et 5. Or nous avons vu que les trois systèmes ont les mêmes caractéristiques. L'hypothèse de Chasles semble donc demander que les trois nombres soient égaux. Elle conduira en vérité à attribuer au nombre des coniques dans un système (1, 1) où q a une valeur donnée la valeur de 5.

Cependant l'exception que présente le système (1p) n'est qu'apparente. En effet, l'hypothèse en question, qui demande que μ et ν dépendent exclusivement du système, α et β exclusivement de la nouvelle condition, perdra son sens immédiat si l'on ne suppose pas que la nouvelle condition soit indépendante du système. Même avant 1876 un géomètre qui croyait à la justesse de l'hypothèse se garderait donc de l'appliquer immédiatement à un cas particulier avant de s'être assuré que cette indépendance a lieu dans ce cas. A cet effet, il devait avant tout considérer la question d'un point de vue projectif. Alors il remarquerait tout de suite que le système (1p) contient une conique ($p = \infty$) à un point double à l'infini, et qu'il a par conséquent des rapports assez intimes avec la détermination du paramètre q . Cette dépendance suffit pour expliquer qu'en formant une équation qui n'a égard qu'aux coniques propres on a perdu une des 5 solutions indiquées par l'hypothèse de Chasles.

Pour distinguer avec sûreté les cas auxquels on peut appliquer l'hypothèse de Chasles de ceux où cette application n'est pas permise, on avait pourtant besoin d'une *définition nette de l'indépendance nécessaire*. C'est un des mérites de la théorie d'Halphen d'en contenir une.

Même sans aucune définition de l'indépendance, on n'aurait su hésiter à déclarer le système (1a) indépendant de la droite à l'infini et

de tout ce qui a rapport à la définition de la valeur de q . En effet, les conditions du système sont identiques à celles d'avoir en un point donné un contact du troisième ordre avec une conique donnée.

Quelle est donc ici la raison de l'exception de l'hypothèse de Chasles, ou bien, quelle est la cinquième conique du système (1a) qu'on obtienne en donnant à la question une des formulations grâce auxquelles on sait à présent rendre le théorème de Chasles exact. C'est la conique infiniment aplatie et à sommets confondus qui correspond à $a = 0$. N'ayant pas fait les restrictions contenues à une telle formulation, et ne sachant pas même avant la découverte d'Halphen que les coniques singulières dont je viens de parler puissent avoir autre influence sur le nombre cherché que celles qui résultent du fait qu'elles appartiennent à la fois aux coniques aplaties et aux coniques à point double, un géomètre auquel on proposerait la question avant 1876 ne devait regarder cette conique singulière comme appartenant aux coniques cherchées que dans le cas où q^2 a la valeur entièrement déterminée

$\frac{p^2}{1 + 2 \cos \omega \lambda + \lambda^2}$ qui correspond à cette conique ($a = 0$). L'hypothèse de Chasles lui aurait donc fait croire qu'il y ait, dans le système (1a), 5 coniques propres dont le paramètre q a une autre valeur donnée. On se serait donc trompé en regardant l'hypothèse de Chasles comme un théorème exprimant un résultat immédiatement applicable.

Note.

Ces exemples serviront peut-être à éloigner une partie des malentendus de ma lettre à M. Klein qui auront pu se communiquer de la réponse de M. Study (t. XL, p. 559—562) à quelque lecteur des *Annalen*. On aura vu, du moins, que je ne m'occupe, ici et dans ma lettre, que des raisons qui ont nécessité une modification de l'hypothèse de Chasles, et qui ont en réalité porté Halphen à l'entreprendre, et non pas de la théorie et des moyens techniques, grâce auxquels il a formulé cette modification et en démontré la suffisance. Je n'ai donc pas même eu lieu de me rendre coupable d'aucun malentendu de cette théorie. On aura vu encore que je dis — et que la connexion de mes idées demande — le contraire de ce que M. Study veut, à la p. 560 en bas, que je démontre par un renvoi à la littérature.

Cependant je n'insisterai ici ni à ces malentendus ni aux autres qu'on trouve dans la réponse. Le faire dans une étendue qui me mettrait à l'abri de tout malentendu nouveau serait abuser de l'hospitalité des *Annalen* quand même je n'ai écrit ma première lettre que sur l'invitation expresse du rédacteur. Et je n'ai pas besoin d'y insister. Il me suffit de voir de la réponse, que M. Study reconnaît: 1^o qu'on

a besoin de sa formulation — ou d'une formulation semblable — de la question de Chasles pour en justifier la réponse $\alpha\mu + \beta\nu$, et 2° que la formulation d'Halphen, qui ne conduit pas toujours à cette réponse, en est une autre formulation raisonnable*). Or l'hypothèse de Chasles ne suppose aucune formulation particulière de la question; par conséquent elle *demande que toute formulation raisonnable conduise à $\alpha\mu + \beta\nu$ solutions*. Il était donc nécessaire pour en faire un théorème qu'il ne serait pas dangereux *d'appliquer* aux questions particulières, d'en modifier soit la question soit la réponse. Halphen a modifié la réponse; M. Study, qui a sauvé la réponse, doit avoir modifié la question.

Je laisse donc les malentendus et me tourne à un endroit qui se réfère du moins à quelque chose que j'ai dite. A la p. 561 M. Study commence par rappeler que je dis qu'une conique infiniment aplatie à sommets coïncidents dans un système dépend des trois conditions qui déterminent la droite et le sommet et d'une quatrième constante finie: la valeur limite de $\frac{a^m}{b^n}$, a et b étant les demi-axes (ou mieux des quantités analogues qu'on peut déterminer d'une manière projective) et m et n des exposants convenablement choisis. Il y ajoute la remarque que la conique singulière dépend alors aussi d'une cinquième constante: le rapport $\frac{m}{n}$ qui peut prendre toute valeur rationnelle (comme nous ne parlons que de systèmes algébriques, je ne parlerai pas ici de ses propos sur les systèmes transcendants). Il en tire immédiatement la conclusion que je fais dépendre une conique particulière d'autant de constantes qu'une conique générale.

Il me semble qu'avant de tirer une conclusion qui me laisse si peu de bon sens, il aurait été naturel d'essayer du moins de trouver une explication du paradoxe apparent. Il y en aurait d'autant plus de raison que le rapport $\frac{m}{n}$, qui ne varie pas en tout cas d'une manière continue, ne peut servir à la détermination d'une série continue de coniques ou de systèmes. Je suppose hardiment que M. Study n'a pas fait cet essai; car (s'il n'est pas de son côté un malentendu de mes pensées que je n'ai pas découvert) il y aurait réussi presque aussi facilement qu'il explique à ses élèves qu'en déterminant les constantes de l'intégrale d'une équation différentielle d'ordre n au moyen de valeurs correspondantes de $x, y, y' \dots y^{(n-1)}$, on ne fait pas dépendre cette intégrale de $n + 1$ constantes. L'explication serait même facilitée par mes expressions: «convenablement choisis».

*) Selon moi elle conduit à la réponse complète de la question de Chasles, et montre ainsi à quelle réponse conduira toute autre formulation raisonnable, y compris celle de M. Study.

L'importance de la possibilité de trouver dans un système des valeurs rationnelles quelconques, non seulement du rapport $\frac{m}{n}$ — qui ne joue ici aucune rôle particulière — mais de m et n , ne m'était du reste point inconnue. C'est, en effet, elle qui l'a rendu impossible à Halphen de remplacer l'expression $\alpha\mu + \beta\nu$ par une nouvelle expression composée d'un nombre *fini* de termes qui soit applicable à tous les systèmes possibles et à toutes les conditions indépendantes du système.

Il me reste encore d'appuyer à des renvois littéraires la remarque dans ma note à la p. 462 (du t. XXXVII), ce que demande M. Study avec quelque raison. Il trouvera sans doute le plus facilement l'interprétation en question dans la démonstration de l'hypothèse de Chasles due aux MM. Schubert et Hurwitz*). Peut-être une remarque dans ma note, qui ne se réfère qu'aux démonstrations antérieures à la théorie d'Halphen, l'a-t-elle porté à ne la chercher pas là. Cependant ce renvoi ne justifie pas encore ma supposition que «la même interprétation se soit présentée à tous ceux qui se sont occupés de la théorie des caractéristiques».

Avant d'y suppléer je rappellerai que l'interprétation dont il s'agit du théorème de Chasles se trouve à la p. 66 du tome XXVII des *Annalen*, et que M. Study n'en exécute pas l'application à une démonstration géométrique du théorème qui ferait pendant à sa démonstration analytique. Si je ne me trompe pas, cette démonstration suivrait à peu près la marche suivante. En regardant les coniques seulement comme lieux de leurs points, on trouve dans un système $\alpha\mu$ coniques qui satisfont à une nouvelle condition, α étant un nombre entier qui ne dépend que de celle-ci (formule de M. de Jonquières). Ce nombre comprend un certain nombre de fois, β , toutes les λ coniques infiniment applaties du système dont les sommets ne satisfont pas à la nouvelle condition, β étant un nombre entier (≥ 0) qui ne dépend que de la nouvelle condition. Le nombre λ étant égal à $2\mu - \nu$ on trouvera par soustraction un nombre $\alpha\mu + \beta\nu$ de coniques.

Si cette transcription ne repose pas sur un malentendu de ma part, l'interprétation contient la seule explication que je connaisse du rapport des formules de Chasles et de M. de Jonquières. En 1865 j'ai donné dans l'introduction de ma thèse doctorale**) cette même raison pour abandonner la théorie de Jonquières. Cette introduction manque toutefois dans la traduction en français de la thèse qui a été inséré dans les *Nouvelles Annales* de 1866, parce que le rédacteur de

*) Schubert. *Abzählende Geometrie* p. 286—87.

**) *Nyt Bidrag til Læren om Systemer af Keglesnit, der ere underkastede 4 Betingelser.*

ce journal la regardait comme superflue, les formules, dont je faisais usage ensuite: $\lambda = 2\mu - \nu$ et celle qui y correspond par le principe de dualité, étant déjà connues par les travaux de Chasles. De mon côté, je crois qu'il avait tort, parce que l'explication dont je viens de parler était *encore* nouvelle; mais elle ne pouvait tarder à se présenter à ceux qui suivaient la polémique de Chasles et de M. de Jonquières. De même qu'elle est le point de départ de ma détermination des caractéristiques μ et ν de systèmes de coniques, et plus tard de courbes cubiques et quartiques, elle l'est sans doute aussi de celles des MM. Schubert et Maillard.

Dans ces circonstances je ne voulais revenir à cette interprétation avant de pouvoir y fonder une véritable démonstration du théorème de Chasles. Ce qui m'a empêché de le faire, c'est, si ma mémoire ne me trompe pas, que je ne savais pas comment m'assurer que les degrés de multiplicité des différentes coniques applaties dans le nombre λ sont toujours proportionnels à ceux dont elles se présentent dans le nombre qu'il faut soustraire de $\alpha\mu$ pour avoir le nombre cherché. La théorie d'Halphen m'a montré que ce scrupule était bien fondé, la proportionnalité n'ayant plus lieu lorsque les sommets de la conique applatie se confondent.

Ces remarques montreront que l'opinion que j'ai énoncée sur l'interprétation en question est de très ancienne date. Sans avoir cette opinion je n'aurais pas négligé de trouver une occasion de faire connaître aussi hors de ma patrie une explication du rapport des théories de Chasles et de Jonquières qui aurait eu sa valeur même sans conduire à une démonstration de l'hypothèse de Chasles. C'est une explication de la même nature du rapport des théories de Chasles et d'Halphen que j'ai trouvé utile de donner dans ma lettre à M. Klein suppléée par le présent article.*)

Copenhague, le 1. octobre 1892.

*) Nachdem in der zwischen den Herren Study und Zeuthen schwebenden Streitfrage beide Autoren ihre Ansicht erneut ausführlich dargelegt haben, kann die Redaction der mathematischen Annalen von ihrem Standpuncte aus die Discussion um so mehr als abgeschlossen ansehen, als die beiderseitigen Ansichten in sachlicher Hinsicht nicht mehr so sehr differiren, — hat doch Hr. Study die Correctheit sämmtlicher Entwicklungen von Halphen ausdrücklich zugestanden und andererseits Hr. Zeuthen wiederholt Study's eigenen Standpunct als einen möglichen anerkannt.