Risoluzione di alcuni problemi sull'applicabilità delle superficie.

(Di B. CALÒ, a Teramo.)

Ci proponiamo di determinare tutte le possibili coppie di superficie fra loro applicabili per cui è soddisfatta una delle condizioni seguenti:

1.^o che siano eguali le distanze di un punto qualunque della prima da un piano fisso e del punto corrispondente della seconda da un punto fisso;

2.^o che la somma delle distanze di due punti corrispondenti delle due superficie da un punto fisso dello spazio sia costante;

3.^o che la differenza delle distanze di due punti corrispondenti delle due superficie da un punto fisso dello spazio sia costante.

Troveremo che a ciascuna di queste tre condizioni corrisponde una classe d'infinita coppie di superficie fra loro applicabili per cui è soddisfatta la condizione imposta; e ciascuna delle tre classi resta perfettamente definita risultando nota la forma che devono avere le espressioni che rappresentano le coordinate dei punti corrispondenti di una coppia qualunque di superficie appartenente alla classe stessa.

Ognuna delle tre classi dipende da una funzione arbitraria di variabile complessa e contiene infinite coppie di superficie algebriche, che si ottengono scegliendo per la funzione arbitraria una funzione algebrica qualunque; a ciascuna classe appartengono infinite superficie di rotazione intorno ad un asse passante pel punto fisso, che si ottengono prendendo la funzione arbitraria eguale ad una potenza della variabile complessa; in particolare, prendendo la prima potenza, si ottiene, corrispondentemente a ciascuna classe, la soluzione già nota:

1.^o di due paraboloidi di rotazione uguali aventi l'uno per piano direttore il piano fisso e l'altro per fuoco il punto fisso;

2.º di due ellissoidi uguali di rotazione intorno all'asse focale e con un fuoco nel punto fisso;

3.º di due iperboloidi uguali di rotazione a due falde con un fuoco nel punto fisso.

I.

Considerando la prima delle questioni che ci siamo proposte, indichiamo con S_1, S_2 due superficie fra loro applicabili tali che siano eguali le distanze di un punto qualunque di S_1 da un piano fisso ω e del punto corrispondente di S_2 da un punto fisso O , che, senza alterare la generalità, potremo supporre situato nel piano ω . Se indichiamo con ds_1, ds_2 , rispettivamente, gli elementi lineari corrispondenti di S_1, S_2 , scriveremo, come prima condizione alla quale soddisfano le superficie S_1, S_2 , la seguente relazione:

$$ds_1^2 = ds_2^2. \quad (1)$$

Riferiamo i punti di S_1, S_2 ad un sistema di assi coordinati ortogonali (x, y, z) , scegliendo come origine il punto fisso O e come piano xy il piano fisso ω , e siano $M_1 \equiv (x_1, y_1, z_1), M_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ una coppia qualunque di punti corrispondenti su S_1, S_2 ; potremo scrivere intanto:

$$ds_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2; \quad (2)$$

se poi indichiamo con ρ il raggio vettore del punto M_2 rispetto al punto O e consideriamo il punto $P \equiv (X_2, Y_2, Z_2)$, in cui esso incontra la superficie sferica col centro in O e di raggio 1, otterremo della superficie S_2 un'immagine sferica Σ_2 ed avremo:

$$x_2 = \rho X_2, \quad y_2 = \rho Y_2, \quad z_2 = \rho Z_2; \quad (3)$$

e se $d\sigma$ rappresenta l'elemento lineare della sfera Σ_2 , corrispondente all'elemento ds_2 della superficie S_2 , avremo:

$$ds_2^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\sigma^2; \quad (4)$$

tenendo dunque presenti le formole (2), (4), la relazione (1) assumerà la forma:

$$d\rho^2 + \rho^2 d\sigma^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2; \quad (5)$$

inoltre, se la distanza del punto M_1 dal piano ω è eguale alla distanza del

punto M_2 dal punto O , si dovrà avere:

$$z_1 = \rho, \quad (6)$$

e quindi la relazione (5) assumerà la forma:

$$\rho^2 d\sigma^2 = dx_1^2 + dy_1^2; \quad (7)$$

cioè, la relazione di applicabilità fra le superficie S_1 , S_2 stabilisce tra la sfera Σ_2 ed il piano ω una rappresentazione conforme.

Scegliamo ora su S_1 a linee coordinate u , v le linee piane parallele ai piani coordinati yz , xz , e sopra S_2 , ω , Σ_2 le linee corrispondenti; ciò equivale a porre:

$$x_1 = u, \quad y_1 = v, \quad (8)$$

essendo u , v due parametri variabili indipendenti; dalla (7) ricaveremo:

$$d\sigma^2 = \frac{1}{\rho^2} (du^2 + dv^2);$$

vale a dire, le linee u , v formano sulla sfera Σ_2 un sistema isoterma; quindi, se indichiamo con $F(\tau)$ una funzione della variabile complessa $\tau = u + iv$, e con $F_0(\tau_0)$ la funzione coniugata della variabile complessa coniugata $\tau_0 = u - iv$, avremo (*):

$$X_2 = \frac{F + F_0}{F F_0 + 1}, \quad Y_2 = \frac{1}{i} \frac{F - F_0}{F F_0 + 1}, \quad Z_2 = \frac{F F_0 - 1}{F F_0 + 1},$$

$$\rho^2 = \frac{(F F_0 + 1)^2}{4} \frac{1}{\frac{dF}{d\tau} \cdot \frac{dF_0}{d\tau_0}}.$$

Queste formole, confrontate colle (3), (6), (8), ci permettono di scrivere le coordinate dei punti M_1 , M_2 nel modo seguente:

$$x_1 = \frac{\tau + \tau_0}{2}, \quad y_1 = \frac{1}{i} \frac{\tau - \tau_0}{2}, \quad z_1 = \frac{F F_0 + 1}{2} \frac{1}{\sqrt{F' \cdot F'_0}}, \quad (9)$$

$$x_2 = \frac{F + F_0}{2} \frac{1}{\sqrt{F' \cdot F'_0}}, \quad y_2 = \frac{F - F_0}{2i} \frac{1}{\sqrt{F' \cdot F'_0}}, \quad z_2 = \frac{F F_0 - 1}{2} \frac{1}{\sqrt{F' \cdot F'_0}}. \quad (10)$$

ove, per semplicità, abbiamo adoperato degli apici, come segno di deriva-

(*) Cfr. BIANCHI L., *Lezioni di geometria differenziale*. Pisa, 1894, pagg. 339, 340.

zione, ed il radicale $\sqrt{F' \cdot F'_0}$ dev'esser preso sempre collo stesso segno, del resto arbitrario.

Abbiamo dunque il seguente risultato:

Se $F(\tau)$ indica una funzione arbitraria della variabile complessa $\tau = u + iv$ ed $F_0(\tau_0)$ è la sua coniugata funzione di $\tau_0 = u - iv$, le formole (9), (10) rappresentano le coordinate dei punti corrispondenti di due superficie S_1, S_2 applicabili l'una sull'altra e tali che la distanza di ciascun punto di S_1 dal piano xy è uguale alla distanza del punto corrispondente di S_2 dall'origine O delle coordinate.

Alla classe di superficie trovata e definita dalle formole (9), (10) appartengono infinite coppie di superficie algebriche, che si otterranno prendendo per $F(\tau)$ una funzione algebrica arbitraria.

Vogliamo ora ricercare se si può scegliere la funzione $F(\tau)$ in modo che entrambe le superficie S_1, S_2 risultino di rotazione e l'asse di rotazione di S_2 passi pel punto fisso O .

Poichè sono uguali le distanze di un punto di S_1 dal piano ω e del punto corrispondente di S_2 dal punto O , ad un parallelo di S_2 dovrà corrispondere in S_1 una linea piana parallela al piano ω , ma questa dev'essere al tempo stesso un parallelo per S_1 , perciò l'asse di rotazione di S_1 dovrà esser perpendicolare al piano ω ; senza dunque alterare la generalità, potremo assumere come asse comune di rotazione delle due superficie l'asse z ; ciò posto, una rotazione di S_1 intorno all'asse z equivale a cambiare τ in $e^{i\alpha} \cdot \tau$, essendo α l'ampiezza della rotazione; e per questo cambiamento intanto

$$z_1 = \frac{F F_0 + 1}{2} \frac{1}{\sqrt{F' \cdot F'_0}},$$

non dovrà variare; inoltre, siccome ad una rotazione di S_1 intorno all'asse z deve corrispondere una rotazione di S_2 intorno allo stesso asse, neppure

$$z_2 = \frac{F F_0 - 1}{2} \frac{1}{\sqrt{F' \cdot F'_0}},$$

deve variare; ne segue che la funzione $F(\tau)$ dev'esser scelta in modo che per il cambiamento di τ in $e^{i\alpha} \cdot \tau$ l'espressione $F(\tau) \cdot F_0(\tau_0)$ rimanga immutata; e perciò $F(\tau)$ dovrà avere la forma seguente:

$$F(\tau) = G \tau^k,$$

essendo k una costante reale e G una costante qualunque (*).

(*) Cfr. BIANCHI L., *Lezioni di geom. diff.*; pagg. 351, 352.

Se indichiamo con G_0 la quantità coniugata di G e poniamo $G G_0 = a^2$, sarà a una costante reale e l'equazione della curva meridiana di S_1 sarà:

$$z_1 = \frac{1}{2k} \left\{ a r_1^{1+k} + \frac{1}{a} r_1^{1-k} \right\},$$

essendo r_1 il raggio variabile del parallelo di S_1 ; è l'equazione della curva meridiana di S_2 sarà:

$$z_2 = \frac{1}{2k} \left\{ a (k r_2)^{1+k} - \frac{1}{a} (k r_2)^{1-k} \right\},$$

essendo r_2 il raggio variabile del parallelo di S_2 .

Ponendo per k un numero razionale qualunque, le due curve risulteranno razionali; in particolare ponendo $k = 1$, avremo le due curve meridiane rappresentate dalle equazioni:

$$r = \frac{2}{a} \left(z_1 - \frac{1}{2a} \right), \quad r_2 = \frac{2}{a} \left(z_2 + \frac{1}{2a} \right),$$

cioè S_1, S_2 saranno due paraboloidi uguali di rotazione, dei quali il primo avente come piano direttore il piano xy ed il secondo avente il fuoco nell'origine O .

II.

Passiamo agli altri due problemi che ci siamo proposti e che considereremo contemporaneamente; indichiamo, cioè, con S_1, S_2 due superficie fra loro applicabili tali che sia costante la somma o la differenza delle distanze di due punti corrispondenti delle due superficie da un punto O fisso nello spazio.

Se indichiamo con ds_1, ds_2 rispettivamente gli elementi lineari corrispondenti di S_1, S_2 , scriveremo, come prima condizione alla quale soddisfano le superficie S_1, S_2 , la seguente relazione:

$$ds_1^2 = ds_2^2. \quad (1)$$

Riferiamo i punti di S_1, S_2 ad un sistema di assi coordinati ortogonali (x, y, z) coll'origine nel punto fisso O e siano $M_1 \equiv (x_1, y_1, z_1), M_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ una coppia qualunque di punti corrispondenti su S_1, S_2 ; se poi indichiamo con ρ_1, ρ_2 i raggi vettori dei punti M_1, M_2 rispetto al punto O e consideriamo i punti $P_1 \equiv (X_1, Y_1, Z_1), P_2 \equiv (X_2, Y_2, Z_2)$ in cui essi raggi re-

spettivamente incontrano la superficie sferica col centro in O e di raggio 1, otterremo delle due superficie S_1, S_2 , rispettivamente, delle immagini sferiche che indicheremo con Σ_1, Σ_2 ; ed avremo:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \rho_1 X_1, & y_1 &= \rho_1 Y_1, & z_1 &= \rho_1 Z_1, \\ x_2 &= \rho_2 X_2, & y_2 &= \rho_2 Y_2, & z_2 &= \rho_2 Z_2; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

inoltre, se $d\sigma_1$ rappresenta l'elemento lineare della sfera Σ_1 , corrispondente all'elemento ds_1 della superficie S_1 , e se $d\sigma_2$ rappresenta l'elemento lineare della sfera Σ_2 , corrispondente all'elemento ds_2 della superficie S_2 , avremo:

$$d\sigma_1^2 = d\rho_1^2 + \rho_1^2 d\sigma_1^2, \quad d\sigma_2^2 = d\rho_2^2 + \rho_2^2 d\sigma_2^2, \quad (3)$$

per le quali formole la relazione (1) assumerà la forma:

$$d\rho_1^2 + \rho_1^2 d\sigma_1^2 = d\rho_2^2 + \rho_2^2 d\sigma_2^2; \quad (4)$$

inoltre, se è costante la somma o la differenza delle distanze dei punti M_1, M_2 dal punto O , dovrà essere corrispondentemente:

$$\rho_1 = \mp \rho_2 + c, \quad (5)$$

essendo c una quantità costante; ne segue che $d\rho_1^2 = d\rho_2^2$ e perciò la relazione (4) diviene:

$$\rho_1^2 d\sigma_1^2 = \rho_2^2 d\sigma_2^2; \quad (6)$$

cioè, la relazione di applicabilità fra le superficie S_1, S_2 stabilisce tra le due sfere Σ_1, Σ_2 una rappresentazione conforme.

Scegliamo ora su S_1 a linee coordinate u, v un sistema di linee a cui corrisponda sulla sfera Σ_1 un sistema isotermo qualunque, p. es., il sistema che si ottiene ponendo:

$$X_1 = \frac{\tau + \tau_0}{\tau \tau_0 + 1}, \quad Y_1 = \frac{1}{2} \frac{\tau - \tau_0}{\tau \tau_0 + 1}, \quad Z_1 = \frac{\tau \tau_0 - 1}{\tau \tau_0 + 1}, \quad (7)$$

ove $\tau = u + iv$, $\tau_0 = u - iv$; e scegliamo sulla superficie S_2 e sulla sfera Σ_2 a linee coordinate le linee corrispondenti; avremo allora:

$$d\sigma_1^2 = \frac{4}{(\tau \tau_0 + 1)^2} d\tau \cdot d\tau_0,$$

e dalla (6) ricaveremo:

$$d\sigma_2^2 = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2 \frac{4}{(\tau \tau_0 + 1)^2} d\tau \cdot d\tau_0,$$

vale a dire, le linee u, v formano anche sulla sfera Σ_2 un sistema isotermo;

quindi se indichiamo con $F(\tau)$ una funzione della variabile complessa τ e con $F_0(\tau_0)$ la funzione coniugata della variabile complessa coniugata τ_0 , avremo:

$$\left. \begin{aligned} X_2 &= \frac{F + F_0}{F F_0 + 1}, & Y_2 &= \frac{1}{i} \frac{F - F_0}{F F_0 + 1}, & Z_2 &= \frac{F F_0 - 1}{F F_0 + 1} \\ \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^2 \frac{4}{(\tau \tau_0 + 1)^2} &= \frac{4}{(F F_0 + 1)^2} \frac{dF}{d\tau} \cdot \frac{dF_0}{d\tau_0}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Da quest'ultima equazione ricaviamo:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\tau \tau_0 + 1}{F F_0 + 1} \cdot \sqrt{F' \cdot F'_0}, \quad (9)$$

ove F' , F'_0 rappresentano le derivate di F , F_0 rispetto a τ , τ_0 , e pel radicale $\sqrt{F' \cdot F'_0}$ possiamo limitarci a considerare una delle sue determinazioni.

L'equazione (9) combinata colla (5) ci dà:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= \frac{c(\tau \tau_0 + 1) \sqrt{F' \cdot F'_0}}{(\tau \tau_0 + 1) \sqrt{F' \cdot F'_0} \pm (F F_0 + 1)}, \\ \rho_2 &= \frac{c(F F_0 + 1)}{(\tau \tau_0 + 1) \sqrt{F' \cdot F'_0} \pm (F F_0 + 1)}; \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ove il doppio segno che precede la quantità $(F F_0 + 1)$ si riferisce al doppio problema di cui ci occupiamo e precisamente il segno $+$ corrisponde al caso in cui sia costante la somma $\rho_1 + \rho_2$, il segno $-$ al caso in cui sia costante la differenza $\rho_1 - \rho_2$.

Infine dalle formole (2), (7), (8), (10) possiamo dedurre per le coordinate dei punti M_1 , M_2 le espressioni seguenti:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{c \sqrt{F' \cdot F'_0}}{(\tau \tau_0 + 1) \sqrt{F' \cdot F'_0} \pm (F F_0 + 1)} \cdot (\tau + \tau_0), \\ y_1 &= \frac{c \sqrt{F' \cdot F'_0}}{(\tau \tau_0 + 1) \sqrt{F' \cdot F'_0} \pm (F F_0 + 1)} \cdot \frac{\tau - \tau_0}{i}, \\ z_1 &= \frac{c \sqrt{F' \cdot F'_0}}{(\tau \tau_0 + 1) \sqrt{F' \cdot F'_0} \pm (F F_0 + 1)} \cdot (\tau \tau_0 - 1), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= \frac{c}{(\tau \tau_0 + 1) \sqrt{F' F'_0 \pm (F F_0 + 1)}} \cdot (F + F_0), \\ y_2 &= \frac{c}{(\tau \tau_0 + 1) \sqrt{F' F'_0 \pm (F F_0 + 1)}} \cdot \frac{F - F_0}{i}, \\ z_2 &= \frac{c}{(\tau \tau_0 + 1) \sqrt{F' F'_0 \pm (F F_0 + 1)}} \cdot (F F_0 - 1). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Abbiamo dunque il seguente risultato:

Se $F(\tau)$ indica una funzione arbitraria della variabile complessa $\tau = u + iv$ ed $F_0(\tau_0)$ è la sua coniugata funzione di $\tau = u - iv$, le formole (11), (12) rappresentano le coordinate dei punti di due superficie S_1, S_2 applicabili l'una sull'altra e tali che è costante la somma o la differenza delle distanze di due punti corrispondenti dall'origine delle coordinate, secondochè davanti alla quantità $(F F_0 + 1)$, nelle formole stesse, si prende il segno $+$ o il segno $-$.

Alle due classi di superficie trovate e definite dalle formole (11), (12) appartengono infinite coppie di superficie algebriche, che si otterranno prendendo per $F(\tau)$ una funzione algebrica arbitraria.

Per ricercare ora se la funzione $F(\tau)$ può esser scelta in modo che le due superficie S_1, S_2 risultino ambedue di rotazione intorno ad un asse passante pel punto fisso O , supporremo, senza alterare la generalità, che S_1, S_2 abbiano per asse di rotazione comune l'asse z ; ciò posto, una rotazione di S_1 intorno all'asse z equivale a cambiare τ in $e^{i\alpha} \cdot \tau$, essendo α l'ampiezza della rotazione; e per questo cambiamento z_1 e z_2 non dovranno variare; ciò porta che $F(\tau) \cdot F_0(\tau_0)$ deve pure rimanere immutato, quindi, come già abbiamo trovato nel § I,

$$F(\tau) = G \tau^k,$$

essendo k una costante reale e G una costante qualunque.

Ponendo per k un numero razionale qualunque, le due curve meridiane risulteranno razionali; in particolare ponendo $k = 1$, le due superficie S_1, S_2 risulteranno due elissoidi uguali di rotazione intorno all'asse focale e con un fuoco nel punto fisso, oppure due iperboloidi uguali di rotazione a due falde e con un fuoco nel punto fisso, secondochè nelle formole (11), (12) davanti alla quantità $(F F_0 + 1)$ prendiamo il segno $+$ o il segno $-$.

Teramo, 22 Ottobre 1899.