Zur Theorie der trilinearen Verwandtschaft dreier einstufiger Grundgebilde.

Von

FRANZ LONDON in Breslau.

Die trilineare Beziehung dreier einstufiger Grundgebilde ist schon wiederholt Gegenstand der Untersuchungen der Geometer gewesen. Zum ersten Male wurde die genannte Beziehung von Herrn August verwendet, der in seiner Dissertation 3 trilinear — oder, wie er sich ausdrückt, duploprojectiv — bezogene Ebenenbüschel zur Erzeugung der Flächen III. O. benützte und auf diese Entstehungsart die Theorie der 27 Graden der Fläche gründete*). Von Herrn Rosanes wurde sodann, gelegentlich einer Untersuchung über abhängige Punktsysteme, die trilineare Verwandtschaft, wenn auch nur beiläufig, behandelt, und wesentliche Eigenschaften derselben zuerst abgeleitet**). Die erste systematische Behandlung unserer Beziehung verdankt man Herrn Schubert, welcher zuerst diese Beziehung „als ein neues Forschungsmittel der synthetischen Geometrie“ betrachtete***), und auch seine Methoden der abzählenden Geometrie zur Bestimmung der auftretenden Anzahlen verwandte†). Ziemlich gleichzeitig fällt der Beginn einer grösseren Reihe von Untersuchungen von Herrn Le Paige — zum Theil in Gemeinschaft mit Herrn Folie — ††), welche zumeist die invarianten-

*) cf. August: *Disquisitiones de superficiebus tertii ordinis*. Diss. inaug. Berol. 1862.

**) cf. Rosanes: Ueber linear-abhängige Punktsysteme (1879) *Crelle's Journ.* Bd. 88.

***) cf. Schubert: Die trilineare Beziehung zwischen 3 einstufigen Grundgebilden (1880) *Math. Ann.* Bd. 17.

†) cf. Schubert: Lösung des auf die trilineare Beziehung ausgedehnten Projectivitätsproblems. Hamburg 1882.

††) Von den zahlreichen Arbeiten von Le Paige über diesen Gegenstand, welche in den Schriften der verschiedensten Akademien und anderer gelehrten Gesellschaften sich vorfinden, seien hier nur die beiden zusammenfassenden Arbeiten erwähnt: *Essais de géom. supér. du III^{ème} ordre*, *Mém. de la société roy. des sciences de Liège* II Ser. Tome X 1883; sowie: Le Paige et M. F. Folie: *Mémoire*

theoretische Untersuchung der trilinearen Formen, aber auch wichtige geometrische Anwendungen zum Gegenstand haben. In neuerer Zeit hat Herr G. Hauck *), welcher sich mit der trilinearen Beziehung ebener Systeme, namentlich für die Zwecke der darstellenden Geometrie, beschäftigte, auch der trilinearen Beziehung dreier einstufiger Grundgebilde eine Arbeit gewidmet.

In den nachfolgenden Untersuchungen wird versucht, tiefer in die *Natur der zweifachen Mannigfaltigkeit* von Tripeln trilinear entsprechender Elemente, welche Mannigfaltigkeit wir als „*Tripelfeld*“ bezeichnen, einzudringen, und besonders deren Beziehungen zu den *einfachen* Tripelmannigfaltigkeiten, den *Tripelreihen*, aufzudecken. Nachdem im ersten Paragraphen die wichtigsten Grundeigenschaften der trilinearen Beziehung zusammengestellt wurden, ist der zweite der Beziehung des Tripelfeldes zu den einfachsten Tripelreihen, den sogenannten *unicursalen Tripelreihen*, welche von den Tripeln entsprechender Elemente dreier projectiver Grundgebilde gebildet werden, gewidmet und die bemerkenswerthe Theorie der in einem Tripelfelde enthaltenen unicursalen Tripelreihen entwickelt. Im dritten Abschnitt sind die wichtigsten Constructionen des Tripelfeldes geleistet, vor allem die aus 7 gegebenen Tripeln, welche auf die einfachsten Constructionen der Projectivität zurückgeführt werden. Der letzte Paragraph behandelt als Anwendung der vorangeschickten Theorie die Erzeugnisse dreier trilinearere Ebenenbüschel; es wird gezeigt, dass dieselben — je nach der Lage ihrer Axen, oder der speciellen Beschaffenheit der trilinearen Beziehung — alle Arten von Flächen III. O., die allgemeinen, sowie die mit 1, 2, 3, 4 Doppelpunkten, die Regelflächen und Kegel III. O. erzeugen; auch die reduciblen Flächen III O. finden auf diese Weise ihre Entstehung, so dass man auch zu einer sehr verwendbaren Erzeugung der Fläche II. O., sowie einer directen Construction derselben aus 9 ihrer Punkte geführt wird. Eine demnächst folgende Untersuchung wird diejenigen Tripelreihen zum Gegenstand haben, welche aus den gemeinsamen Tripeln zweier Tripelfelder bestehen, und welche in der Theorie der ebenen, wie räumlichen elliptischen Curven eine grundlegende Rolle spielen.

sur les courbes de troisième ordre, Mém. de l'acad. roy. de Belg. Tome 43 u. 45, wo sich auch weitere Citate über die sonstigen Untersuchungen des Verf. über diesen Gegenstand vorfinden.

*) cf. Hauck: Die trilineare Beziehung zwischen 3 einstufigen Grundgebilden, Crelle's Journ. Bd. 108.

§ 1.

Die singulären Elemente und die Abbildung des Tripelfeldes.

1) Wir bezeichnen durch Ξ, H, Z drei einstufige Grundgebilde (gerade Punktreihen, Strahlenbüschel, Ebenenbüschel) und durch ξ die Elemente von Ξ , durch η, ζ die von resp. H, Z ; in jedem der 3 Grundgebilde sei ein binäres Coordinatensystem gewählt, und seien $\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2; \zeta_1, \zeta_2$ die homogenen Coordinaten von resp. ξ, η, ζ . Wählt man aus jedem der 3 Grundgebilde je ein Element ξ, η, ζ , so sollen 3 solche Elemente *ein Tripel* genannt werden; die Gesamtheit aller Tripel bildet *eine dreifache Mannigfaltigkeit*. Besteht zwischen den 3 Variablensystemen $\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2; \zeta_1, \zeta_2$ eine homogene *trilineare* — d. h. in jedem der *drei* Variablensysteme *lineare* — Gleichung:

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{ikl} a_{ikl} \xi_i \eta_k \zeta_l = 0 \quad (i, k, l = 1, 2),$$

so giebt es eine zweifache Mannigfaltigkeit von Tripeln ξ, η, ζ , deren Coordinaten dieser Gleichung genügen. Durch die trilineare Gleichung wird also zwischen den Elementen der 3 Grundgebilde eine Beziehung constituirt, welche man nach Herrn Schubert*) als „*trilineare Beziehung dreier einstufiger Grundgebilde*“ oder nach Herrn Le Paige**) als „*Homographie dritter Ordnung zweiten Ranges*“ zu bezeichnen pflegt. Je 3 Elemente ξ, η, ζ , welche in dieser Beziehung einander entsprechen, sollen ein Tripel entsprechender Elemente, oder kürzer, da ihre Coordinaten die trilineare Form $f(\xi, \eta, \zeta)$ annulliren, ein *Nulltripel****) der trilinearen Verwandtschaft bilden. Die Gesamtheit der ∞^2 Nulltripel einer trilinearen Verwandtschaft soll *ein Tripelfeld* genannt und durch F_T bezeichnet werden. Zwei beliebige Elemente auf zwei der drei Grundgebilde werden durch ein eindeutig bestimmtes Element des dritten Grundgebildes zu einem Tripel des Tripelfeldes F_T ergänzt. Zu einem beliebigen Elemente gehört also eine einfache Mannigfaltigkeit von Elementepaaren, welche dasselbe zu einem Tripel von F_T ergänzen; diese Elementepaare bilden entsprechende Elemente *projectiver* Grundgebilde, da ihre Coordinaten einer binären bilinearen Gleichung genügen. Also gilt: *Jedem Elemente eines der drei Grundgebilde wird durch die trilineare Verwandtschaft eine projective Beziehung der beiden andern Grundgebilde*

*) cf. Schubert: Die trilineare Beziehung zwischen 3 einstufigen Grundgebilden, Math. Ann. Bd. XVII, p. 457—472.

**) cf. Le Paige: Essais de géométrie supérieure du troisième ordre. Mém. de la soc. roy. de Liège II Sér. Tome X, 1883.

***) cf. Rosanes: Cr. Journ. Bd. 88, p. 289.

zugeordnet, deren Paare entsprechender Elemente gebildet werden durch die Paare, welche das in Rede stehende Element zu einem Nulltripel ergänzen.

Ist P_ξ die dem Elemente ξ zugeordnete Projectivität, so bildet die Gesamtheit der Projectivitäten P_ξ , welche den einzelnen Elementen ξ von Ξ zugehören, ein lineares System 1^{ter} Stufe, einen Büschel. Durch die trilineare Beziehung werden demnach die Elemente eines jeden der 3 Grundgebilde projectivisch bezogen auf die Elemente eines Projectivitätenbüschels.

Ordnet man die Elemente des einen Grundgebildes projectiv zu den Projectivitäten eines Büschels, dessen Träger die beiden andern Grundgebilde sind, so bilden die ∞^2 Tripel, welche von einem Elemente des ersten Grundgebildes und einem Paare entsprechender Elemente der diesem zugeordneten Projectivität gebildet werden, ein Tripelfeld. Auf diese Weise lässt sich rein geometrisch jedes Tripelfeld erzeugen.

2) Sind 2 Tripelfelder F_T und F'_T gegeben durch die beiden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} f(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i,k,l} a_{ikl} \xi_i \eta_k \zeta_l = 0, \\ f'(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i,k,l} a'_{ikl} \xi_i \eta_k \zeta_l = 0 \end{aligned} \right\} (i, k, l = 1, 2),$$

so besitzen diese eine einfache Mannigfaltigkeit gemeinsamer Tripel; jedes dieser Tripel ist auch jedem Tripelfelde des Büschels $kf + k'f' = 0$ angehörig. Jedes Element eines der 3 Grundgebilde z. B. ξ von Ξ wird durch 2 Elementepaare $\eta'\zeta'$, $\eta''\zeta''$ zu einem gemeinsamen Tripel von F_T und F'_T ergänzt, nämlich durch diejenigen beiden Elementepaare, welche den beiden Projectivitäten P_ξ und P'_ξ gemeinsam sind, welche dem Elemente ξ in F_T und F'_T entsprechen. Eine einfache Mannigfaltigkeit von Tripeln soll fortan „eine Tripelreihe“ heißen. Die von den gemeinsamen Tripeln von F_T und F'_T gebildete Tripelreihe ist so beschaffen, dass jedes Element durch zwei Elementepaare zu einem Tripel der Tripelreihe ergänzt wird; durchläuft also z. B. ξ das zugehörige Grundgebilde Ξ , so durchlaufen die Elementepaare η, ζ , welche mit ξ zusammen ein gemeinsames Tripel von F_T und F'_T bilden, die beiden zugehörigen Grundgebilde H, Z zweimal; aus diesem Grunde wollen wir die Gesamtheit der gemeinsamen Tripel zweier Tripelfelder als *bicursale Tripelreihe* bezeichnen, und einer solchen das Zeichen R_T^2 beilegen. Durch das Attribut „*bicursal*“ bezeichnen wir die Eigenschaft, dass jedes Element durch zwei Elementenpaare zu einem Tripel der Tripelreihe ergänzt wird. Bei einer *unicursalen Tripelreihe* (bezeichnet durch R_T^1) wird demnach jedes Element nur durch ein

einziges Paar zu einem Tripel ergänzt werden; dies tritt ein bei den Tripeln entsprechender Elemente dreier projectiv bezogener Grundgebilde, und — wie man leicht erkennt — nur bei diesen; wir definiren demnach: *Unter einer unicursalen Tripelreihe* (R_T^1) *verstehen wir die Gesamtheit der Tripel entsprechender Elemente dreier projectiver einstufiger Grundgebilde.*

Durch 3 Tripel ist eine R_T^1 eindeutig bestimmt. Eine R_T^2 ist durch 6 Tripel eindeutig bestimmt. Ein Tripelfeld F_T ist durch 7 Tripel eindeutig bestimmt, denn die Gleichung von F_T enthält 8 homogene Coefficienten, welche durch 7 Tripel eindeutig bestimmt werden; durch 6 Tripel wird ein Büschel von F_T bestimmt, dessen gemeinsame Tripel eine R_T^1 bilden, die also ebenfalls durch die 6 Tripel bestimmt wird. Dabei sind die Tripel linear-unabhängig vorausgesetzt; die dazu nothwendigen und hinreichenden Bedingungen werden später angegeben werden.

3) Durch die trilineare Beziehung $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$ werde das Tripelfeld F_T dargestellt; dann wird jedem Elemente ξ von Ξ eine Projectivität P_ξ nach dem Vorigen zugeordnet. Alle diese Projectivitäten P_ξ bilden einen Büschel; in diesem Projectivitätenbüschel existiren zwei ausgeartete Individuen, welche den Elementen α_1, α_2 von Ξ zugehören mögen, und die daher durch $P_{\alpha_1}, P_{\alpha_2}$ zu bezeichnen sind. Die Ausartung von P_{α_1} besteht darin, dass 2 Elemente, (β_2 in H), (γ_2 in Z) existiren, deren entsprechende Elemente in Bezug auf P_{α_1} unbestimmt werden, während den übrigen Elementen von H das Element γ_2 , den übrigen Elementen von Z das Element β_2 in Bezug auf P_{α_1} entspricht. Analytisch äussert sich die Degeneration von P_{α_1} darin, dass die bilineare Gleichung von P_{α_1} : $f(\alpha_1, \eta, \zeta) = 0$ eine verschwindende Determinante besitzt, daher ihre linke Seite das Product zweier linearer Factoren wird. Analoges gilt für P_{α_2} ; die Elemente, deren entsprechende Elemente in Bezug auf P_{α_2} unbestimmt werden, seien β_1 (in H) und γ_1 (in Z). Gleichzeitig haben die 4 Elemente $\beta_1, \gamma_1; \beta_2, \gamma_2$ bekanntlich noch die weitere ausgezeichnete Eigenschaft, dass die beiden Paare $\beta_1, \gamma_2; \beta_2, \gamma_1$ gemeinsame Paare aller Projectivitäten P_ξ des Büschels sind. Wir bezeichnen diejenigen Elemente, deren zugeordnete Projectivität degenerirt, als *die singulären Elemente* von F_T . Nach dem vorigen existiren auf jedem der 3 Grundgebilde zwei *singuläre Elemente* von F_T . Die auf Ξ befindlichen singulären Elemente waren α_1, α_2 ; auf H und Z sind es offenbar die oben durch $\beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2$ bezeichneten Elemente; denn β_1 z. B. ist singulär, da die zugehörige Projectivität P_{β_1} degenerirt, indem β_1, γ_2 gemeinsames Paar aller Projectivitäten P_ξ ist, und daher in P_{β_1} dem Element γ_2 alle Elemente ξ von Ξ entsprechen. In den 6 Elementen $\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2$ besitzen wir also bereits die sämmtlichen singulären Elemente. —

Zwei singuläre Elemente auf verschiedenen Grundgebilden mit verschiedenem Index z. B. α_1, β_2 werden durch jedes beliebige Element ξ von Z zu einem Tripel von F_T ergänzt, da $\beta_2 \xi$ ein Paar von P_{α_1} bildet, also $\alpha_1 \beta_2 \xi$ für jedes ξ ein Tripel von F_T ist.

Wir nennen 2 Elemente, für welche dasjenige Element, welches sie zu einem Tripel von F_T ergänzt, unbestimmt wird, ein *singuläres Paar* von F_T . *Zwei singuläre Elemente auf verschiedenen Grundgebilden mit verschiedenem unteren Index bilden ein singuläres Paar.* Andern singuläre Paare giebt es offenbar nicht, so dass wir in $\alpha_1 \beta_2, \beta_1 \gamma_2, \gamma_1 \alpha_2; \alpha_2 \beta_1, \beta_2 \gamma_1, \gamma_2 \alpha_1$ sämtliche singuläre Paare besitzen. Also gilt: *Jedes Tripelfeld besitzt 6 singuläre Paare.*

Zwei Tripelfelder, welche die 6 singulären Elemente und ein beliebiges Tripel gemein haben, sind identisch. Denn 2 solche Tripelfelder besitzen 7 gemeinsame Tripel, da die 6 gemeinsamen singulären Elemente 6 gemeinsame Tripel involviren, nämlich:

$$\alpha_1 \beta_2 \gamma_1, \beta_1 \gamma_2 \alpha_1, \gamma_1 \alpha_2 \beta_1; \alpha_2 \beta_1 \gamma_2, \beta_2 \gamma_1 \alpha_2, \gamma_2 \alpha_1 \beta_2.$$

— Aus der von uns gegebenen geometrischen Definition der singulären Elemente ergibt sich unmittelbar die wichtige Darstellung der trilinearen Form:

$$f(\xi, \eta, \zeta) = k_1(\alpha_1 \xi)(\beta_1 \eta)(\gamma_1 \zeta) + k_2(\alpha_2 \xi)(\beta_2 \eta)(\gamma_2 \zeta),$$

wo:

$$(\alpha_1 \xi) = \alpha_{11} \xi_2 - \alpha_{12} \xi_1$$

gesetzt ist, und α_{11}, α_{12} die Coordinaten von α_1 bedeuten.*) —

4) Das singuläre Tripelfeld. Ist das Büschel projectiver Beziehungen, welches den Elementen eines der 3 Grundgebilde zugeordnet ist — z. B. das den Elementen ξ von Ξ zugeordnete Büschel P_ξ — so beschaffen, dass die beiden, allen Projectivitäten des Büschels gemeinsamen Paare entsprechender Elemente — $\beta_1 \gamma_2, \beta_2 \gamma_1$ — zusammenfallen, so existirt nur eine einzige ausgeartete Projectivität in dem Büschel, und daher auf dem dritten Grundgebilde — Ξ — nur ein einziges singuläres Element. In diesem Falle vereinigen sich also α_1 und α_2 , aber gleichzeitig auch, wie die Entstehung dieser Singularität lehrt, β_1 und β_2, γ_1 und γ_2 . Es existiren in diesem Falle also nur 3 *singuläre Elemente*, auf jedem Grundgebilde eins; diese 3 singulären Elemente seien mit α, β, γ bezeichnet. Man erkennt unmittelbar, dass irgend 2 der 3 singulären Elemente ein singuläres Paar bilden, so dass in diesem Falle nur 3 *singuläre Paare* vorhanden sind. Das Tripel α, β, γ der 3 singulären Elemente soll das *singuläre Tripel* genannt werden, und die in dieser Weise specialisirte trilineare Be-

*) cf. Le Paige, l. c. p. 19. Schubert, l. c. p. 458ff. Bei Herrn Le Paige findet sich eine ausführliche analytische Behandlung der singulären Elemente. —

ziehung soll als *singulär-trilineare Beziehung*, das von ihren Nulltripeln gebildete Tripelfeld, als *singuläres Tripelfeld* bezeichnet werden.

Eine singulär trilineare Beziehung ist durch das singuläre Tripel und drei weitere Tripel eindeutig bestimmt; denn, da das singuläre Tripel $\alpha\beta\gamma$ vier Nulltripel der Beziehung involviert, nämlich, wenn ξ, η, ζ drei beliebige Elemente von resp. Ξ, H, Z bezeichnen: $\alpha, \beta, \gamma; \beta, \gamma, \xi; \gamma, \alpha, \eta; \alpha, \beta, \zeta$, so werden durch das singuläre Tripel und 3 weitere Tripel im Ganzen 7 Nulltripel der Beziehung gegeben sein, wodurch dieselbe eindeutig bestimmt ist. Daraus ergibt sich:

Zwei singuläre Tripelfelder, welche das singuläre Tripel und drei weitere Tripel gemeinsam haben, sind identisch).* —

5) *Trilineare Grundgebilde in reducirter Lage*. Die einfachste trilineare Beziehung von 3 in derselben Ebene gelegenen geraden Punktreihen wird hervorgerufen durch die Tripel von je 3 Punkten, welche in einer Geraden g liegen. Diese trilineare Beziehung dreier gerader Punktreihen wird von Herrn Schubert**) als *geradlinigte trilineare Beziehung* bezeichnet. —

Die einfachste trilineare Beziehung dreier gerader Punktreihen, deren Träger beliebige Geraden des Raumes sind, wird hervorgerufen durch die Tripel von je 3 Punkten, deren Ebene durch einen gegebenen Punkt des Raumes geht.

Die einfachste trilineare Beziehung dreier in derselben Ebene gelegenen Strahlenbüschel wird gebildet durch die Gesamtheit der Tripel von je drei Strahlen, welche sich in einem Punkte schneiden.

Die einfachste trilineare Beziehung dreier Ebenenbüschel mit beliebig im Raume gelegenen Axen wird erhalten durch die Gesamtheit der Tripel von je 3 Ebenen, deren Schnittpunkt auf einer festen Ebene sich befindet. Drei trilineare Ebenenbüschel von solcher Beschaffenheit nennt Herr August***) in *perspectiver Lage* befindlich.

Wir wollen zusammenfassend 3 einstufige Grundgebilde, deren Elemente durch eine der vier eben charakterisirten einfachsten trilinearen Beziehungen verbunden sind, als *in reducirter Lage* befindlich oder kurz als *reducirt-trilineare Grundgebilde* bezeichnen.

6) *Die Abbildung des Tripelfeldes auf die Punkte eines ebenen Punktfeldes*. Es seien Ξ, H, Z drei trilineare Grundgebilde und es mögen die

*) Diese Ausartung des Tripelfeldes wurde zuerst von Herrn Schubert, Math. Ann. Bd. XVII, p. 470, behandelt. Eine ausführliche analytische Behandlung findet sich bei Herrn Le Paige, l. c. sowie in der Arbeit der Herren Folie und Le Paige: Sur les courbes de III ordre, Mémoires de l'académie royale de Belgique 1882. Auch die übrigen Ausartungen des Tripelfeldes sind in den citirten Arbeiten behandelt, weshalb wir hier nur auf diese verweisen.

**) l. c. p. 458.

***) August: Disquisitiones de superf. II ordinis; Inaug.-Diss. Berlin 1862.

Elemente ξ von Ξ projectiv bezogen sein auf die Elemente ξ' eines neuen einstufigen Grundgebildes Ξ' , und ebenso die Elemente von H und Z resp. auf die von H' , Z' , dann bilden die Tripel ξ', η', ξ' , welche den Nulltripeln ξ, η, ξ unserer trilinearen Beziehung in der geschilderten Weise projectivisch zugeordnet sind, ebenfalls die Nulltripel einer trilinearen Beziehung der 3 Grundgebilde Ξ', H', Z' , ihre Gesamtheit constituirt, ebenso wie die der Tripel ξ, η, ξ , ein Tripelfeld F_T' . Auf diesem Wege kann man aus jedem Tripelfeld F_T neue Tripelfelder F_T' herleiten; jedem Tripel von F_T entspricht ein Tripel von F_T' und umgekehrt, so dass F_T und F_T' umkehrbar eindeutig auf einander bezogen erscheinen. Wir wollen F_T' das transformirte Tripelfeld von F_T nennen, und wir werden erkennen, dass jedes nicht singuläre Tripelfeld F_T' aus irgend einem solchen F_T durch derartige Transformation erhalten werden kann. Dazu untersuchen wir, ob es möglich ist, ein gegebenes Tripelfeld F_T so zu transformiren, dass das transformirte Tripelfeld sich in *reducirter Lage* befindet. Hier sei nur der folgende Fall ins Auge gefasst, auf den sich alle übrigen reduciren lassen. Gegeben sind 3 trilineare Grundgebilde Ξ, H, Z , deren Tripel entsprechender Elemente das Tripelfeld F_T constituiren, ferner 3 in derselben Ebene gelegene Strahlenbüschel Ξ', H', Z' , deren Scheitel resp. S_ξ, S_η, S_ζ seien, und welche sich in *reducirt-trilinear*er Beziehung befinden, so dass drei Strahlen ξ', η', ξ' , welche durch einen Punkt gehen, ein Tripel entsprechender Strahlen bilden; das von allen Strahlentripeln ξ', η', ξ' gebildete Tripelfeld sei durch F_T' bezeichnet. Es sollen die Grundgebilde $\Xi, \Xi'; H, H'; Z, Z'$ in solche projective Beziehung gesetzt werden, dass stets 3 Elementen ξ, η, ξ , welche ein Tripel von F_T bilden, 3 Strahlen ξ', η', ξ' entsprechen, die durch einen Punkt gehen, die also ein Tripel von F_T' bilden. Dann ergiebt sich zunächst, dass irgend einem singulären Element von F_T ein singuläres Element von F_T' zuzuordnen ist. Bezeichnen wir den gemeinsamen Strahl S_η, S_ξ der beiden Strahlenbüschel H', Z' als Strahl von H' durch β_1' , als Strahl von Z' durch β_2' , ebenso S_ξ, S_η als Strahl von Z' durch γ_1' , als Strahl von Ξ' durch α_2' , und S_ξ, S_η als Strahl von Ξ' durch α_1' , als Strahl von H' durch β_2' , so sind $\alpha_1', \alpha_2'; \beta_1', \beta_2'; \gamma_1', \gamma_2'$ die 6 singulären Strahlen der 3 in *reducirter Lage* befindlichen trilinearen Strahlenbüschel Ξ', H', Z' . Sind nun $\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2$ die singulären Elemente von F_T und α, β, γ ein beliebiges Tripel von F_T , α', β', γ' ein solches von F_T' , dann beziehen wir die Elemente von Ξ und Ξ', H und H', Z und Z' projectivisch resp. so, dass:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha, \dots) \frown (\alpha_1', \alpha_2', \alpha', \dots),$$

$$(\beta_1, \beta_2, \beta, \dots) \frown (\beta_1', \beta_2', \beta', \dots),$$

$$(\gamma_1, \gamma_2, \gamma, \dots) \frown (\gamma_1', \gamma_2', \gamma', \dots).$$

Den Elementen ξ, η, ζ eines jeden Tripels von F_T entsprechen dann in Bezug auf diese 3 projectiven Beziehungen 3 Strahlen ξ', η', ζ' derart, dass die Gesamtheit aller dieser Tripel ξ', η', ζ' ein Tripelfeld constituiren, welches mit dem in reducirter Lage befindlichen Tripelfeld F_T (nach 3)) identisch ist, da beide Tripelfelder die singulären Elemente und ein Tripel α', β', γ' gemeinsam haben. Mithin sind die Grundgebilde $\Xi, \Xi'; H, H'; Z, Z'$ in der gewünschten Weise projectivisch auf einander bezogen, so dass die gegebene trilineare Beziehung in die reducirte-trilineare Beziehung der 3 Strahlenbüschel transformirt ist. Also gilt: *Die Tripel eines jeden Tripelfeldes F_T lassen sich umkehrbar eindeutig transformiren in die Tripel desjenigen Tripelfeldes F_T , dessen Tripel gebildet werden von je 3 Strahlen ξ', η', ζ' , welche durch einen Punkt gehen, und resp. den 3 in derselben Ebene gelegenen Strahlenbüscheln Ξ', H', Z' angehören.* Damit ergibt sich auch unmittelbar, dass irgend 2 nicht singuläre Tripelfelder in einander transformirbar sind. — Ferner folgt, dass jedem Tripel ξ', η', ζ' eindeutig der Schnittpunkt P' dieser 3 Strahlen zugeordnet ist und umgekehrt, so dass die Tripel ξ', η', ζ' umkehrbar eindeutig auf die Punkte P' einer Ebene bezogen sind; nur in den Punkten S_ξ, S_η, S_ζ , den Scheiteln der 3 Strahlenbüschel, hört die Eindeutigkeit der Beziehung auf, da diesen Punkten unendlich viele Tripel entsprechen. Mithin lassen sich auch die Tripel ξ, η, ζ eines beliebigen (nicht singulären) Tripelfeldes F_T umkehrbar eindeutig auf die Punkte P' eines ebenen Punktfeldes abbilden. Ist es gelungen ein Tripelfeld F_T auf diese Weise auf die Punkte einer Ebene abzubilden, so lässt sich unmittelbar die Gesamtheit aller Tripel von F_T construiren und zu jedem Elementenpaar das dritte Element hinzufinden, welches dasselbe zu einem Tripel von F_T ergänzt. —

Jeder Curve der Ebene von Ξ', H', Z' entspricht eine Tripelreihe, welche dem Tripelfelde angehört. Den Punkten der 3 Geraden $S_\eta S_\xi, S_\zeta S_\xi, S_\xi S_\eta$ entsprechen diejenigen Tripel, welche aus einem der 3 singulären Paare $\alpha_1, \beta_2; \beta_1, \gamma_2; \gamma_1, \alpha_2$ und einem beliebigen Elemente des dritten Grundgebildes bestehen. Den Geraden durch einen der 3 Punkte S_ξ, S_η, S_ζ entsprechen diejenigen Tripelreihen, deren Tripel gebildet werden aus einem Elemente des einen Grundgebildes und denjenigen Elementenpaaren der beiden andern, die dasselbe zu einem Tripel von F_T ergänzen. Die Tripelreihen, welche den anderen Geraden, sowie sonstigen Curven der Ebene entsprechen, werden wir später zu betrachten haben.

7) *Die Abbildung des singulären Tripelfeldes.* Die im Vorigen gezeigte Abbildung der Tripel eines Tripelfeldes F_T auf die Punkte einer Ebene gilt nur für nicht singuläre Tripelfelder, da die 3 reducirte-trilinearen Strahlenbüschel Ξ', H', Z' so lange ihre Scheitel S_ξ, S_η, S_ζ

nicht in gerader Linie liegen, nicht singulär sind. Liegen aber $S_{\xi}, S_{\eta}, S_{\zeta}$ in gerader Linie, so wird nunmehr die zugehörige reducirt-trilineare Beziehung eine singuläre, da die beiden singulären Strahlen in jedem Strahlenbüschel in die Verbindungslinie der 3 Scheitel $S_{\xi}, S_{\eta}, S_{\zeta}$ zusammenfallen; wir wollen diese Verbindungslinie, welche jedem der 3 Strahlenbüschel angehört, als Strahl von Ξ' mit α' , als solchen von H', Z' resp. mit β', γ' bezeichnen. Sind Ξ, H, Z 3 zu resp. Ξ', H', Z' projective Grundgebilde; so sind die Tripel ξ, η, ξ , welche den Tripeln ξ', η', ξ' von 3 Strahlen durch einen Punkt P' entsprechen, die Nulltripel einer singulär-trilinearen Beziehung der 3 Grundgebilde Ξ, H, Z ; die 3 Elemente α, β, γ , welche resp. den in der Geraden $S_{\xi}S_{\eta}S_{\zeta}$ vereinigten Elementen α', β', γ' entsprechen, bilden das singuläre Tripel dieser Beziehung, so dass wir auf diesem Wege zur Erzeugung singulär-trilinearer Grundgebilde gelangen. Wir fragen nun umgekehrt: Wenn eine beliebige singulär-trilineare Beziehung der 3 Grundgebilde Ξ, H, Z gegeben ist, lassen sich 3 in derselben Ebene gelegene zu resp. Ξ, H, Z projective Strahlenbüschel Ξ', H', Z' , deren Scheitel $S_{\xi}, S_{\eta}, S_{\zeta}$ in gerader Linie liegen, auffinden, so dass stets 3 Strahlen ξ', η', ξ' , welche einem Nulltripel ξ, η, ξ der singulär-trilinearen Beziehung entsprechen, durch einen Punkt P' ihrer Ebene gehen? Wir nehmen die beiden Strahlenbüschel Ξ', H' mit den Scheiteln S_{ξ}, S_{η} beliebig in derselben Ebene an, und bezeichnen durch ξ_1', ξ_2', ξ_3' und $\eta_1', \eta_2', \eta_3'$ je drei beliebige Strahlen von resp. Ξ', H' , durch P_1', P_2', P_3' resp. die Schnittpunkte von ξ_1' und η_1', ξ_2' und η_2', ξ_3' und η_3' ; zwischen den Elementen von Ξ, Ξ' , wie denen von H, H' setzen wir nun je eine beliebige projective Beziehung fest, bei welcher α, α' resp. β, β' Paare entsprechender Elemente sein sollen, wo wieder $\alpha = S_{\xi}S_{\eta}, \beta = S_{\eta}S_{\xi}$ sei. Bezeichnen wir mit ξ_1, ξ_2, ξ_3 die entsprechenden Elemente von ξ_1', ξ_2', ξ_3' , mit η_1, η_2, η_3 die von $\eta_1', \eta_2', \eta_3'$ und seien ξ_1, ξ_2, ξ_3 diejenigen Elemente von Z , welche resp. $\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2, \xi_3\eta_3$ zu einem Tripel der gegebenen singulär-trilinearen Beziehung von Ξ, H, Z ergänzen, so können wir stets *linear* einen Punkt S_{ζ} auf $S_{\xi}S_{\eta}$ so construiren, dass:

$$S_{\zeta}(S_{\xi}, P_1', P_2', P_3') \cap (\gamma, \xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Ist Z' das Strahlenbüschel, welches S_{ζ} zum Scheitel hat, und in derselben Ebene, wie Ξ', H' , gelegen ist, so beziehen wir die 3 Strahlenbüschel $S_{\xi}, S_{\eta}, S_{\zeta}$ projectivisch auf die 3 Grundgebilde Ξ, H, Z so, dass:

$$(\alpha', \xi_1', \xi_2', \xi_3', \dots) \cap (\alpha, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots),$$

$$(\beta', \eta_1', \eta_2', \eta_3', \dots) \cap (\beta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots),$$

$$(\gamma', \xi_1', \xi_2', \xi_3', \dots) \cap (\gamma, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots),$$

wo $\xi_1' = S_{\zeta}P_1', \xi_2' = S_{\zeta}P_2', \xi_3' = S_{\zeta}P_3'$ gesetzt ist, und $\gamma' = S_{\zeta}S_{\xi}$.

Dann bilden die Tripel ξ, η, ξ , welche den Tripeln von 3 Strahlen ξ', η', ξ' durch einen Punkt P' entsprechen, die Nulltripel einer singulären-trilinearen Beziehung, welche mit der gegebenen singulär-trilinearen Beziehung der 3 Geraden Ξ, H, Z das singuläre Tripel α, β, γ und die 3 Tripel ξ_1, η_1, ξ_1 ; ξ_2, η_2, ξ_2 ; ξ_3, η_3, ξ_3 gemein hat, also nach 4) mit ihr identisch ist. Es ergibt sich also, dass wir jedem Tripel ξ, η, ξ des gegebenen singulären Tripelfeldes ein Strahlentripel ξ', η', ξ' der 3 Strahlenbüschel Ξ', H', Z' zuordnen können, dessen 3 Strahlen sich in einem Punkte P' schneiden. Mithin ist jedem Tripel ξ, η, ξ ein Punkt P' der Ebene zugeordnet und umgekehrt, so dass wir folglich auch die Tripel eines singulären Tripelfeldes auf die Punkte eines ebenen Punktfeldes abbilden können. —

§ 2.

Das Tripelfeld und seine Beziehung zu den unicursalen Tripelreihen.

1) Sind die Elemente von 3 einstufigen Grundgebilden Ξ, H, Z projectivisch auf einander bezogen, so ist jedem Elemente irgend eines der 3 Grundgebilde in jedem der beiden andern Grundgebilde ein bestimmtes Element eindeutig zugeordnet. Die Gesammtheit der Tripel von je 3 derartig zugeordneten Elementen bildet eine einfache Mannigfaltigkeit und wurde von uns (§ 1, 2) als *unicursale Tripelreihe* bezeichnet; wir wollen ihr das Zeichen R_T^1 beilegen.

Durch 3 Tripel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ ist eine unicursale Tripelreihe eindeutig bestimmt, da sich die beiden einem beliebigen Elemente ξ von Ξ entsprechenden Elemente η, ξ aus der Doppelverhältnissgleichheit:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \xi) \wedge (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \eta) \wedge (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \xi)$$

ergeben.

Wählen wir das Coordinatensystem auf Ξ so, dass die 3 Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ resp. die Coordinaten 1, 0; 0, 1; 1, 1 erhalten und analog für die beiden andern Grundgebilde, so wird R_T^1 dargestellt durch die Gleichungen:

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\xi_1}{\xi_2}$$

oder durch die 3 bilinearen Gleichungen:

$$\eta_1 \xi_2 - \eta_2 \xi_1 = 0, \quad \xi_1 \xi_2 - \xi_2 \xi_1 = 0, \quad \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 = 0,$$

von denen aber jede eine Folge der beiden anderen ist. —

Seien die 3 Grundgebilde durch die trilineare Gleichung

$$f(\xi, \eta, \xi) = \sum_{i,k,l=1,2} a_{ikl} \xi_i \eta_k \xi_l = 0$$

in trilineare Beziehung gesetzt, so fragen wir nach den gemeinsamen Tripeln des von den Nulltripeln dieser Beziehung gebildeten Tripelfeldes F_T und einer unicursalen Tripelreihe R_T^1 auf denselben Grundgebilden. Denken wir uns, wie oben das Coordinatensystem gewählt, so dass:

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\zeta_1}{\zeta_2}$$

die Gleichungen von R_T^1 sind, dann erhalten wir die gemeinsamen Tripel von F_T und R_T^1 , wenn wir in $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$,

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\zeta_1}{\zeta_2}$$

setzen; dann wird:

$$\sum_{k,l} a_{ikl} \xi_i \xi_k \xi_l = a_{111} \xi_1^3 + (a_{112} + a_{121} + a_{211}) \xi_1^2 \xi_2 + (a_{221} + a_{212} + a_{122}) \xi_1 \xi_2^2 + a_{222} \xi_2^3 = 0.$$

Sind $\xi_1', \xi_2'; \xi_1'', \xi_2''; \xi_1''', \xi_2'''$ die 3 Wurzeln dieser cubischen Gleichung, und ist:

$$\frac{\xi_1'}{\xi_2'} = \frac{\eta_1'}{\eta_2'} = \frac{\xi_1'}{\xi_2'}; \quad \frac{\xi_1''}{\xi_2''} = \frac{\eta_1''}{\eta_2''} = \frac{\xi_1''}{\xi_2''}; \quad \frac{\xi_1'''}{\xi_2'''} = \frac{\eta_1'''}{\eta_2'''} = \frac{\xi_1'''}{\xi_2'''},$$

dann sind $\xi', \eta', \zeta'; \xi'', \eta'', \zeta''; \xi''', \eta''', \zeta'''$ die gemeinsamen Tripel von F_T und R_T^1 ; die Anzahl derselben ist also im Allgemeinen 3, die jedoch eventuell sämmtlich oder theilweise zusammenfallen können. Also gilt: *Ein Tripelfeld und eine unicursale Tripelreihe haben im Allgemeinen drei gemeinsame Tripel.* Gleichzeitig erkennt man: *Ein Tripelfeld F_T , welches mit einer unicursalen Tripelreihe R_T^1 mehr als drei Tripel gemein hat, enthält alle Tripel von R_T^1 ; wir sagen, dass in diesem Falle die R_T^1 in dem Tripelfeld F_T enthalten ist.* —

2) *Die in einem Tripelfeld enthaltenen unicursalen Tripelreihen.* Wir fragen nunmehr, ob in einem gegebenen Tripelfeld F_T stets unicursale Tripelreihen R_T^1 enthalten sind. Ist R_T^1 in F_T enthalten, so ist jedes Tripel von R_T^1 auch Tripel von F_T . Sind nun, wie früher (cf. § 1, 3), die singulären Elemente von F_T : $\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2$, so dass $\alpha_1\beta_2, \beta_1\gamma_2, \gamma_1\alpha_2; \alpha_2\beta_1, \beta_2\gamma_1, \gamma_2\alpha_1$ die 6 singulären Paare bilden, so wollen wir dasjenige Elementepaar aus H, Z betrachten, welches mit α_1 zusammen ein Tripel von R_T^1 bildet. Da dieses Paar α_1 auch zu einem Tripel von F_T ergänzt, alle Elementepaare aber, welche mit dem singulären Elemente α_1 ein Tripel von F_T bilden, entweder das Element β_2 oder das Element γ_2 enthalten, so wird demjenigen Tripel von R_T^1 , welchem auf Ξ das Element α_1 angehört, entweder auf H das Element β_2 , oder auf Z das Element γ_2 angehören, so dass entweder α_1, β_2 und ein bestimmtes (von γ_2 verschiedenes)

Element von Z , oder α_1, γ_2 und ein bestimmtes (von β_2 verschiedenes) Element von H dasjenige Tripel von R_T^1 bilden, dessen Element auf Ξ das singuläre Element α_1 ist. Dem Element α_1 ist demnach in einer in F_T enthaltenen R_T^1 jedenfalls das eine oder andere derjenigen Elemente (β_2, γ_2) zugeordnet, welche mit α_1 zusammen ein singuläres Paar bilden. Wir wollen den Fall in's Auge fassen, dass das Element α_1 durch β_2 und ein bestimmtes (von γ_2 verschiedenes) Element von Z zu einem Tripel von R_T^1 ergänzt wird. Dann wird ebenfalls entweder β_1 oder γ_1 unter denjenigen beiden Elementen enthalten sein, welche α_2 zu einem Tripel von R_T^1 ergänzen. Fassen wir den Fall in's Auge, dass α_2 durch β_1 und ein bestimmtes (von γ_1 verschiedenes) Element von Z zu einem Tripel von R_T^1 ergänzt wird, dann wird die projective Beziehung, welche in Folge von R_T^1 zwischen den Elementen von Ξ und H besteht, die Paare α_1, β_2 und α_2, β_1 als Paar entsprechender Elemente enthalten; diese projective Beziehung wird also demjenigen Büschel angehören, dessen Projectivitäten P_ζ in F_T den Elementen ζ von Z zugeordnet sind; denn wir erkannten cf. § 1. 1, dass durch F_T die Elemente ζ von Z projectiv zugeordnet werden den Projectivitäten P_ζ , welche die Elementepaare α_1, β_2 und α_2, β_1 gemein haben, cf. § 1. 3, und welche ein Büschel bilden. Es wird daher auch ein Element ξ_0 von Z existiren, welchem in F_T die in Rede stehende projective Beziehung entspricht, welche in Folge von R_T^1 die Elemente von Ξ und H verknüpft; es wird demnach ξ_0 die sämtlichen Paare dieser Projectivität zu einem Tripel von F_T ergänzen; da nun andererseits auch derjenige Punkt auf Z , welcher ein Paar unserer Projectivität zu einem Tripel von R_T^1 ergänzt, dasselbe Paar zu einem Tripel von F_T ergänzen muss, weil alle Tripel von R_T^1 auch solche von F_T sein sollen, so fallen alle diese Punkte mit ξ_0 zusammen, so dass wir erkennen, dass die projective Beziehung, in welche Ξ, Z und ebenso H, Z durch R_T^1 gesetzt werden, bei unserer Annahme eine *ausgeartete* Projectivität wird. Also ergibt sich, dass bei der Annahme, dass in der (in F_T enthaltenen) R_T^1 dem Elemente α_1 das Element β_2 , und dem Elemente α_2 das Element β_1 entspreche, die unicursale Tripelreihe R_T^1 gebildet wird von der Gesamtheit solcher Tripel von F_T , für welche das auf Z befindliche Element ξ_0 für alle Tripel dasselbe ist. Solche ausgeartete unicursale Tripelreihen wollen wir aber fortan von der Betrachtung ausschliessen, und nur *eigentliche* R_T^1 betrachten, d. h. solche bei denen 2 beliebige Tripel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ aus 6 distincten Elementen bestehen. —

Damit nun F_T eine eigentliche R_T^1 enthalte, dürfen also den Elementen α_1 und α_2 in R_T^1 *nicht* gleichzeitig resp. die Elemente β_2 und β_1 entsprechen; nehmen wir daher an, es entspreche in R_T^1 dem Elemente α_1 das Element β_2 von H , dann bleibt nur noch die Annahme übrig, dass dem Elemente α_2 das Element γ_1 von Z entspreche,

da wir sahen, dass unter den Elementen, welche in R_T^1 das Element α_2 zu einem Tripel ergänzen, entweder β_1 , oder γ_1 auftreten mussten. Es entspricht somit bei der Annahme, dass in R_T^1 dem Elemente α_1 auf H das Element β_2 entspricht, dem Elemente γ_1 das Element α_2 . Um die Zuordnung der singulären Elemente von F_T vollständig zu erhalten, haben wir noch das Element β_1 zu untersuchen; diesem muss in R_T^1 entweder auf Z das Element γ_2 oder auf Ξ das Element α_2 entsprechen, das letztere haben wir, falls R_T^1 eine *eigentliche* unicursale Tripelreihe sein soll, als unzulässig erkannt, also ist dem Element β_1 das Element γ_2 auf Z in R_T^1 zugeordnet. Daraus ergibt sich: Ist R_T^1 eine in F_T enthaltene unicursale Tripelreihe, und ist dem singulären Elemente α_1 das singuläre Element β_2 auf H in Bezug auf R_T^1 zugeordnet, so ist dem Elemente β_1 das Element γ_2 auf Z , dem Element γ_1 das Element α_2 auf Ξ zugeordnet.

Oder: Ist α_1, β_2 ein Paar entsprechender Elemente in derjenigen projectiven Beziehung, welche — in Folge der in F_T enthaltenen R_T^1 — die Elemente von Ξ und H verknüpft, so sind auch β_1, γ_2 und γ_1, α_2 Paare entsprechender Elemente in den analogen zwischen H, Z und Z, Ξ bestehenden Projectivitäten. —

Vollständig analoges gilt auch für den anderen bisher nicht berücksichtigten Fall, dass dem singulären Elemente α_1 das singuläre Element γ_2 von Z in Bezug auf die in F_T enthaltene R_T^1 entspricht; in diesem Falle müssen auch $\alpha_2, \beta_1; \beta_2, \gamma_1$ entsprechende Elementepaare derjenigen projectiven Beziehungen sein, welche die Elemente von Ξ, H resp. von H, Z in Folge von R_T^1 verknüpfen. Demnach ergibt sich: Ist eine unicursale Tripelreihe R_T^1 in einem Tripelfelde F_T enthalten, so müssen in den 3 projectiven Beziehungen, durch welche — vermittelt R_T^1 — die Elemente von $\Xi, H; H, Z; Z, \Xi$ verknüpft sind, entweder resp. die singulären Paare $\alpha_1, \beta_2; \beta_1, \gamma_2; \gamma_1, \alpha_2$, oder resp. die singulären Paare $\alpha_2, \beta_1; \beta_2, \gamma_1; \gamma_2, \alpha_1$ entsprechende Paare bilden. Wir haben also 2 verschiedene Arten von in F_T enthaltenen R_T^1 zu unterscheiden; *erstens* solche, bei denen $\alpha_1, \beta_2; \beta_1, \gamma_2; \gamma_1, \alpha_2$ resp. entsprechende Paare der obigen projectiven Beziehungen sind; *zweitens* solche, bei denen $\alpha_2, \beta_1; \beta_2, \gamma_1; \gamma_2, \alpha_1$ resp. entsprechende Paare dieser 3 Projectivitäten sind. Eine R_T^1 der ersten Art soll als eine (1, 2)- R_T^1 , eine solche der zweiten Art soll als (2, 1)- R_T^1 bezeichnet werden. — Wir können nunmehr aber auch erkennen, dass jedes Tripelfeld F_T unicursale Tripelreihen R_T^1 enthält, und es gelingt die Gesamtheit der in F_T enthaltenen R_T^1 in unzweideutiger Weise herauszuheben. Sind nämlich ξ_1, η_1, ξ_1 und ξ_2, η_2, ξ_2 irgend 2 Tripel von F_T , so fragen wir, ob es eine unicursale Tripelreihe R_T^1 giebt, welche die beiden Tripel ξ_1, η_1, ξ_1 und ξ_2, η_2, ξ_2 enthält, und welche dem Tripelfelde F_T angehört; wir untersuchen zunächst, ob es eine solche

R_T^1 von der (1, 2)-Art giebt. Falls eine solche R_T^1 existirt, so müssen nach dem Vorigen in derjenigen Projectivität, durch welche mittels R_T^1 die Elemente von Ξ und H verknüpft sind, die 3 Elemente ξ_1, ξ_2, α_1 resp. den 3 Elementen η_1, η_2, β_2 entsprechen, wodurch also diese projective Beziehung festgelegt ist. Ebenso müssen in der analogen projectiven Beziehung der Elemente von H zu den von Z die Elemente η_1, η_2, β_1 den Elementen ξ_1, ξ_2, γ_2 entsprechen, und analog in der projectiven Beziehung von Z und Ξ die Elemente ξ_1, ξ_2, γ_1 den Elementen ξ_1, ξ_2, α_2 . Bezeichnen wir nun durch ξ_{12} und ξ_{21} diejenigen Elemente von Ξ resp. Z , welche durch die Doppelverhältnissgleichheiten:

$$(\xi_1, \xi_2, \alpha_1, \xi_{12}) \propto (\eta_1, \eta_2, \beta_2, \beta_1) \propto (\xi_1, \xi_2, \xi_{12}, \gamma_2)$$

eindeutig bestimmt sind, so sind die 4 Tripel:

$$\xi_1, \eta_1, \xi_1; \quad \xi_2, \eta_2, \xi_2; \quad \alpha_1, \beta_2, \xi_{12}; \quad \xi_{12}, \beta_1, \gamma_2$$

wegen der obigen Doppelverhältnissgleichheit derselben unicursalen Tripelfelde R_T^1 angehörig, sie sind aber offenbar auch Nulltripel von F_T , also besitzen F_T und R_T^1 vier gemeinsame Tripel, also ist R_T^1 dem Tripelpaare F_T angehörig; diese in F_T enthaltene R_T^1 ist offenbar von der (1, 2)-Art und, wie ihre Construction lehrt, die *einzige* dieser Art, welche die beiden gegebenen Tripel ξ_1, η_1, ξ_1 und ξ_2, η_2, ξ_2 enthält, also: Es existirt eine eindeutig bestimmte unicursale Tripelreihe der (1, 2)-Art, welche 2 beliebige Tripel von F_T enthält, und welche dem Tripelfelde F_T angehört. Ganz analog ergiebt sich, dass *genau eine* R_T^1 der (2, 1)-Art existirt, welche die beiden Tripel ξ_1, η_1, ξ_1 und ξ_2, η_2, ξ_2 enthält und dem Tripelfelde angehört, so dass wir folgenden Satz aussprechen können:

Sind ξ_1, η_1, ξ_1 und ξ_2, η_2, ξ_2 zwei beliebige Tripel eines Tripelfeldes F_T , so existiren genau 2 unicursale Tripelreihen, welchen die Tripel $\xi_1, \eta_1, \xi_1; \xi_2, \eta_2, \xi_2$ angehören, und die in dem Tripelfeld enthalten sind, und zwar ist stets die eine derselben von der (1, 2)-Art, die andere von der (2, 1)-Art. — Hieraus ergiebt sich nun unmittelbar, dass die Gesammtheit aller in F_T enthaltenen R_T^1 zwei zweifache Mannigfaltigkeiten bilden; in der einen dieser zweifachen Mannigfaltigkeiten sind nur R_T^1 der (1, 2)-Art, in der andern nur solche der (2, 1)-Art enthalten. Da durch irgend 2 Tripel von F_T genau eine — in F_T enthaltene — R_T^1 von jeder der beiden Arten bestimmt ist, so werden wir die beiden zweifachen Mannigfaltigkeiten als *lineare* oder kurz als *Netze* bezeichnen, und zwar werden wir dasjenige Netz, welches nur Tripelreihen der (1, 2)-Art enthält, als (1, 2)-Netz, das andere als (2, 1)-Netz bezeichnen. Somit ergiebt sich:

In jedem Tripelfelde sind 2 Netze von unicursalen Tripelreihen enthalten, von denen das eine nur R_T^1 der (1, 2)-Art, das andere nur

solche der $(2, 1)$ -Art enthält. Jedes Tripelpaar des Tripelfeldes gehört genau je einer R_T^1 eines jeden der beiden Netze an.

Wir fragen nunmehr, ob 2 in einem Tripelfelde enthaltene R_T^1 gemeinsame Elemente haben, und in welcher Anzahl. Betrachten wir zunächst zwei unicursale Tripelreihen derselben Art $R_T^1, \bar{R}_T^1$, etwa von der $(1, 2)$ -Art. Dieselben können höchstens ein gemeinsames Tripel besitzen, da 2 Tripel von F_T stets nur einer in F_T enthaltenen R_T^1 der $(1, 2)$ -Art angehören, wie wir soeben erkannten. Betrachten wir die beiden projectiven Beziehungen, durch welche die Elemente von Ξ und H in Folge von R_T^1 und $\bar{R}_T^1$ verknüpft sind. Ein gemeinsames Tripel von R_T^1 und $\bar{R}_T^1$ muss offenbar auf Ξ und H Elemente besitzen, die diesen beiden Projectivitäten gemeinsam sind. Diese beiden Projectivitäten haben 2 gemeinsame Paare entsprechender Elemente, das eine ist α_1, β_2 , da R_T^1 und $\bar{R}_T^1$ dem $(1, 2)$ -Netz angehören, das andere sei mit ξ'_1, η' bezeichnet. Ist ξ' dasjenige Element von Z , welches ξ', η' zu einem Tripel von F_T ergänzt, so ist ξ', η', ξ' ein gemeinsames Tripel von R_T^1 und $\bar{R}_T^1$; denn dasjenige Element von Z , welches ξ', η' zu einem Tripel von R_T^1 oder von $\bar{R}_T^1$ ergänzt, muss ξ', η' auch zu einem Tripel von F_T ergänzen, da alle Tripel von R_T^1 und $\bar{R}_T^1$ in F_T enthalten sind; es muss also mit ξ' identisch sein, so dass ξ', η', ξ' gemeinsames Tripel von R_T^1 und $\bar{R}_T^1$ ist. Daraus ergibt sich, dass R_T^1 und $\bar{R}_T^1$ stets ein gemeinsames Tripel besitzen, dessen Construction gleichzeitig geleistet ist. Also: *Zwei in F_T enthaltene R_T^1 derselben Art haben stets ein gemeinsames Tripel.* — Betrachten wir nunmehr 2 in F_T enthaltene unicursale Tripelreihen R_T^1 und $\bar{R}_T^1$ von verschiedener Art und fragen nach deren gemeinsamen Tripeln. Fassen wir wiederum die 2 projectiven Beziehungen in's Auge, welche durch R_T^1 und $\bar{R}_T^1$ zwischen den Elementen von Ξ und H vermittelt werden, so muss ein gemeinsames Tripel von R_T^1 und $\bar{R}_T^1$ auf Ξ und H Elemente besitzen, welche diesen beiden projectiven Beziehungen gemeinsam sind. Nun besitzen diese beiden Projectivitäten 2 gemeinsame Paare ξ', η' und ξ'', η'' ; sind ξ', ξ'' die beiden Elemente von Z , welche resp. ξ', η' und ξ'', η'' zu einem Tripel von F_T ergänzen, so ergibt sich genau, wie im vorigen Falle, dass ξ', η', ξ' und ξ'', η'', ξ'' gemeinsame Tripel von R_T^1 und $\bar{R}_T^1$ sind, und zwar die einzigen. Also gilt:

Zwei in F_T enthaltene R_T^1 verschiedener Art besitzen zwei gemeinsame Tripel. — Hält man ein Tripel α, β, γ von F_T fest und betrachtet die in F_T enthaltenen R_T^1 , welchen das Tripel α, β, γ angehört, so ergibt sich:

Es existiren zwei Schaaren (einfache, lineare Mannigfaltigkeiten) von unicursalen Tripelreihen, welche das Tripel α, β, γ enthalten, und

dem Tripelfeld F_T angehören. Die eine Schaar enthält nur R_T^1 der (1, 2)-Art, die andere nur solche der (2, 1)-Art. Jedes Tripel ξ, η, ζ von F_T gehört genau einer R_T^1 aus jeder der beiden Schaairen an, zwei R_T^1 aus verschiedenen Schaairen haben — abgesehen von α, β, γ — ein gemeinsames Tripel; zwei R_T^1 derselben Schaar haben kein gemeinsames Tripel. Es gilt also hier genau analoges, wie für die beiden Schaairen von Geraden, welche sich auf einer Fläche II^{ter} Ordnung befinden; wir werden dieselben in der That auf derartige Schaairen von R_T^1 eindeutig beziehen. —

Wir denken uns das Tripelfeld F_T in der § 1.6) dargestellten Weise umkehrbar eindeutig abgebildet auf die Punkte P' einer Ebene, indem wir die 3 Grundgebilde Ξ, H, Z projectivisch beziehen auf 3 in jener Ebene befindliche Strahlenbüschel Ξ', H', Z' in der Weise, dass stets 3 Elementen ξ, η, ζ eines Tripels von F_T 3 Strahlen ξ', η', ζ' entsprechen, die sich in einem Punkte P' schneiden. Wir fragen nach denjenigen Punkten P' der Ebene, welche den Tripeln einer in F_T enthaltenen R_T^1 entsprechen. Diese Punkte müssen die Eigenschaft haben, dass sie mit den resp. Scheiteln $S_{\xi'}, S_{\eta'}, S_{\zeta'}$ der Strahlenbüschel Ξ', H', Z' verbunden, projective Strahlenbüschel liefern. Sie müssen also sämtlich entweder auf einer Geraden g der Ebene der Abbildung liegen, oder auf einem Kegelschnitt K , welcher $S_{\xi'}, S_{\eta'}, S_{\zeta'}$ enthält. Fassen wir eine unicursale Tripelreihe von F_T der (1, 2)-Art in's Auge, so ist in der durch diese R_T^1 zwischen den Elementen von Ξ und H vermittelten projectiven Beziehung α_1, β_2 ein Paar entsprechender Elemente, also müssen auch in der projectiven Beziehung der zugeordneten Strahlen von Ξ', H' die Elemente $\alpha_1' = S_{\xi'} S_{\eta'}, \beta_2' = S_{\xi'} S_{\eta'}$ einander entsprechen, so dass die beiden projectiven Strahlenbüschel Ξ', H' ihren gemeinsamen Strahl entsprechend gemein haben, also perspectivisch sind, und demnach die Schnittpunkte P' entsprechender Strahlen auf einer Geraden liegen, welche das Bild der betrachteten R_T^1 der (1, 2)-Art ist. Also ergibt sich, dass die in F_T befindlichen R_T^1 der (1, 2)-Art auf die Geraden der Ebene abgebildet werden, und zwar umkehrbar eindeutig, wie sich unmittelbar ergibt. Auf dieselbe Weise ergibt sich, dass die Kegelschnitte durch $S_{\xi'}, S_{\eta'}, S_{\zeta'}$ die Bilder der in F_T enthaltenen R_T^1 der (2, 1)-Art sind. Demnach ist das Netz der Kegelschnitte durch $S_{\xi'}, S_{\eta'}, S_{\zeta'}$ das Bild des (2, 1)-Netzes der in F_T enthaltenen R_T^1 , während das Netz aller Geraden der Ebene das Bild des (1, 2)-Netzes ist. Man erkennt nun auch unmittelbar aus der Abbildung, dass 2 R_T^1 desselben Netzes ein gemeinsames Tripel, 2 R_T^1 aus verschiedenen Netzen aber 2 gemeinsame Tripel besitzen. —

3) *Construction der gemeinsamen Tripel eines Tripelfeldes und einer unicursalen Tripelreihe.* Ist F_T ein gegebenes Tripelfeld und R_T^1 eine nicht in F_T enthaltene unicursale Tripelreihe, so sahen wir § 2.1),

dass F_T und R_T^1 3 gemeinsame Tripel besitzen, die wir nunmehr construiren wollen. Durch R_T^1 werden die Elemente von H und Z projectiv bezogen; ist η, ξ ein Paar entsprechender Elemente dieser projectiven Beziehung, so existirt ein Element ξ von Ξ , welches η, ξ zu einem Tripel von F_T ergänzt, und ein anderes Element ξ_1 , welches η, ξ zu einem Tripel von R_T^1 ergänzt; fallen ξ und ξ_1 zusammen, so ist das so zusammengesetzte Tripel eines der 3 gemeinsamen Tripel von F_T und R_T^1 . Die Elementepaare ξ, ξ_1 , die man in Ξ auf diese Weise erhält, constituiren in Ξ eine Correspondenz, deren Natur wir kurz betrachten wollen. Denken wir uns das Coordinatensystem wieder, wie in § 2. 1), so gewählt, dass die R_T^1 die Gleichungen

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\xi_1}{\xi_2}$$

besitzt, und ist

$$f(\xi, \eta, \xi) = \sum_{i, k, l=1, 2} a_{ikl} \xi_i \eta_k \xi_l = 0$$

die Gleichung von F_T , so wird das einem Paare η, ξ entsprechender Elemente, für welche also

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\xi_1}{\xi_2}$$

ist, in $f = 0$ zugeordnete Element ξ die Gleichung:

$$f(\xi, \eta, \eta) = \sum_{i, k, l=1, 2} a_{ikl} \xi_i \eta_k \eta_l = 0$$

besitzen, während das Element ξ_1 , welches in R_T^1 das Paar η, ξ zu einem Tripel ergänzt, die Gleichung besitzt:

$$\frac{\xi_1^1}{\xi_2^1} = \frac{\eta_1}{\eta_2},$$

durch Elimination von η_1, η_2 ergibt sich also:

$$\sum a_{ikl} \xi_i \xi_k^1 \xi_l^1 = 0$$

als Gleichung der von uns betrachteten Beziehung zwischen ξ und ξ_1 . Wir erkennen unmittelbar, dass dies die Gleichung einer ein-zwei-deutigen Verwandtschaft ist; diese besitzt bekanntlich 3 Doppelemente, deren Construction von Herrn Emil Weyr*) angegeben worden ist. Die Ausführung dieser Construction beansprucht die Construction der 3 letzten Schnittpunkte zweier Kegelschnitte, von denen man einen Schnittpunkt kennt, und für welche ausserdem je 4 Punkte gegeben sind, so dass diese beiden Kegelschnitte vollständig bekannt sind. Bekanntlich lässt sich dieses Grundproblem aller cubischen Constructions-

*) cf. Emil Weyr: Theorie der mehrdeutigen Elementargebilde, Leipzig 1869, p. 51 ff., p. 74.

aufgaben mit alleiniger Hilfe des Lineals, des Cirkels und eines festen — im Voraus beliebig gezeichneten — Kegelschnitts ausführen*), so dass auch damit die Construction unseres vorliegenden cubischen Problems unter Anwendung der genannten Hilfsmittel als gelöst zu betrachten ist. Ist eines der 3 gemeinsamen Tripel von R_T^1 und F_T bekannt, so lassen sich die beiden anderen allein mit Cirkel und Lineal construiren; sind zwei derselben gegeben, so erfolgt die Construction des letzten mit alleiniger Hilfe des Lineals**), wie man durch entsprechende Modificirung der obigen allgemeinen Construction unmittelbar erkennt.

4) *Construction der 3 dreifachen Elemente dreier in einander liegender trilinearer Grundgebilde.* Denken wir uns die Träger der 3 einstufigen Grundgebilde Ξ, H, Z , deren Elemente durch

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i,k,l=1,2} a_{ikl} \xi_i \eta_k \zeta_l = 0$$

in trilineare Beziehung gesetzt sind, zusammenfallend, so dass ξ, η, ζ Elemente eines und desselben Grundgebildes bedeuten, so kommt es dreimal vor, dass die 3 Elemente ξ, η, ζ , welche ein Tripel von $f=0$ bilden, zusammenfallen; denn dazu muss ξ der cubischen Gleichung:

$$\sum a_{ikl} \xi_i \xi_k \xi_l = 0$$

genügen. Bezeichnen wir mit ξ_1, ξ_2, ξ_3 diese drei dreifachen Elemente der 3 in einander liegenden trilinearen Grundgebilde Ξ, H, Z , so lässt sich deren Construction auf die vorige Construction der 3 gemeinsamen Elemente eines F_T und einer R_T^1 unmittelbar zurückführen. Denn denken wir uns die 3 Grundgebilde Ξ, H, Z als 3 gerade Punktreihen auf demselben Träger g — ein Fall, auf den sich alle übrigen Fälle durch projective Zuordnung zurückführen lassen — und wählen wir 3 Punkte α, β, γ in derselben Ebene mit g , so bilden die Strahlentripel $\alpha\xi, \beta\eta, \gamma\zeta$, welche α, β, γ resp. mit den Punkten ξ, η, ζ eines Tripels des auf g liegenden Tripelfeldes verbinden, ebenfalls die Tripel einer zwischen den Strahlen der 3 Strahlenbüschel α, β, γ bestehenden trilinearen Beziehung. Verbinden wir noch α, β, γ mit den sämtlichen Punkten π von g , so bilden die Strahlentripel $\alpha\pi, \beta\pi, \gamma\pi$ die Tripel einer unicursalen Tripelreihe. Das von den Tripeln $\alpha\xi, \beta\eta, \gamma\zeta$ gebildete Tripelfeld und die von den Tripeln $\alpha\pi, \beta\pi, \gamma\pi$ gebildete R_T^1 , besitzen 3 gemeinsame Tripel, deren Construction wir im vorigen Abschnitt gelehrt haben. Die 3 Strahlen eines solchen Tripels schneiden sich in einem auf g gelegenen Punkte, da das Tripel der R_T^1 $\alpha\pi, \beta\pi, \gamma\pi$

*) cf. H. I. St. Smith: Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadr. Annali di math. Ser. III, Tom. II.

**) cf. E. Weyr, a. a. O.

angehört; sind π_1, π_2, π_3 diese 3 Punkte auf g , so liefern sie die gesuchten dreifachen Elemente.

5) *Das Tripelfeld mit singulärem Tripel und die unicursalen Tripelreihen.* Sei nunmehr

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i,k,l=1,2} a_{ikl} \xi_i \eta_k \zeta_l = 0$$

die Gleichung eines singulären Tripelfeldes, wo also eine Invariante, gebildet aus den Coefficienten a_{ikl} , die von Herrn Le Paige*) als Discriminante von f bezeichnet wird, verschwindet. Ferner sei eine unicursale Tripelreihe R_T^1 gegeben durch die Gleichungen:

$$\varrho \xi_i = \alpha_i + k \alpha'_i, \quad \sigma \eta_i = \beta_i + k \beta'_i, \quad \tau \zeta_i = \gamma_i + k \gamma'_i \quad (i = 1, 2),$$

wo ϱ, σ, τ Proportionalitätsfactoren, k einen Parameter bedeuten; durchläuft k alle reellen Werthe, so geben die zugehörigen Werthe von ξ_i, η_i, ζ_i ($i = 1, 2$) die Coordinaten aller Tripel von R_T^1 ; zu diesen Tripeln gehören auch α, β, γ und α', β', γ' . Die gemeinsamen Tripel von R_T^1 mit dem singulären Tripelfelde ergeben sich, wenn man die obigen Werthe von ξ_i, η_i, ζ_i in $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$ einsetzt und die zugehörigen Werthe von k bestimmt; dann wird:

$$\begin{aligned} f(x + k\alpha', \beta + k\beta', \gamma + k\gamma') &= \sum_{i,k,l=1,2} a_{ikl} (\alpha_i + k\alpha'_i) (\beta_k + k\beta'_k) (\gamma_l + k\gamma'_l) \\ &= \sum a_{ikl} \alpha_i \beta_k \gamma_l + k \sum a_{ikl} (\alpha'_i \beta_k \gamma_l + \alpha_i \beta'_k \gamma_l + \alpha_i \beta_k \gamma'_l) \\ &\quad + k^2 \sum a_{ikl} (\alpha_i \beta'_k \gamma'_l + \alpha'_i \beta_k \gamma'_l + \alpha'_i \beta'_k \gamma_l) \\ &\quad + k^3 \sum a_{ikl} \alpha'_i \beta'_k \gamma'_l = 0. \end{aligned}$$

Oder:

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta, \gamma) + k \{f(\alpha', \beta, \gamma) + f(\alpha, \beta', \gamma) + f(\alpha, \beta, \gamma')\} \\ + k^2 \{f(\alpha, \beta', \gamma') + f(\alpha', \beta, \gamma') + f(\alpha', \beta', \gamma)\} \\ + k^3 f(\alpha', \beta', \gamma') = 0. \end{aligned}$$

Dieser in k cubischen Gleichung genügen 3 Werthe, welche zu den 3 auch hier gemeinsamen Tripeln von R_T^1 und dem singulären Tripelfeld führen. Fassen wir nunmehr jedoch den Fall in's Auge, dass das *singuläre Tripel* von F_T zu den gemeinsamen Tripeln von F_T und R_T^1 gehöre. Es bedeute nunmehr α, β, γ das singuläre Tripel; dann wird in der obigen Gleichung $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ sein, da das singuläre Tripel dem Tripelfelde $f = 0$ angehört; es wird aber auch

$$f(\alpha', \beta, \gamma) = 0, \quad f(\alpha, \beta', \gamma) = 0, \quad f(\alpha, \beta, \gamma') = 0$$

sein, weil jedes Elementenpaar $\beta, \gamma; \gamma, \alpha; \alpha, \beta$ des singulären Tripels

*) cf. Le Paige: Essais sur la géométrie de troisième ordre, l. c. p. 17.

α, β, γ durch jedes beliebige Element des dritten Grundgebildes zu einem Nulltripel von $f=0$ ergänzt wird. Die obige cubische Gleichung für k besitzt also die Doppelwurzel $k=0$, d. h. das singuläre Tripel zählt als gemeinsames Tripel eines Tripelfeldes und einer unicursalen Tripelreihe doppelt, da die übrigen gemeinsamen Tripel sich aus der in k linearen Gleichung:

$$\{f(\alpha, \beta', \gamma') + f(\alpha', \beta, \gamma') + f(\alpha', \beta', \gamma)\} + f(\alpha', \beta', \gamma') \cdot k = 0$$

bestimmen. Es besitzen daher F_T und R_T^1 ausser dem singulären Tripel α, β, γ nur noch ein einziges gemeinsames Tripel, also ergibt sich:

Eine unicursale Tripelreihe, welche mit einem singulären Tripelfeld das singuläre Tripel gemein hat, besitzt ausserdem mit demselben nur noch ein einziges gemeinsames Tripel. Wir wollen dieses eindeutig bestimmte gemeinsame Tripel, welches R_T^1 , abgesehen von dem singulären Tripel α, β, γ , mit F_T gemeinsam hat, *construieren*. Ist η, ξ ein Paar entsprechender Elemente derjenigen projectiven Beziehung, welche mittels R_T^1 zwischen den Elementen von H und Z besteht, und ist ξ dasjenige Element von Ξ , welches η, ξ zu einem Tripel von F_T und ξ_1 dasjenige, welches η, ξ zu einem Tripel von R_T^1 ergänzt, so bilden alle diese Paare ξ, ξ_1 entsprechende Elemente einer projectiven Beziehung, da jedem ξ *nur ein* ξ_1 entspricht und umgekehrt. Die Doppelemente dieser projectiven Beziehung führen uns zu den gemeinsamen Tripeln von F_T und R_T^1 ; das eine Doppelement ist das singuläre Element α auf Ξ , das andere ist linear construierbar, wenn dieses singuläre Element α und hinreichende Bestimmungsstücke für F_T und R_T^1 , und damit auch für die obige Projectivität zwischen den Elementen ξ, ξ_1 gegeben sind. —

6) *Die in einem singulären Tripelfelde enthaltenen unicursalen Tripelreihen.* Aus dem in voriger Nr. abgeleiteten Satze ergibt sich unmittelbar, dass falls eine R_T^1 mit dem singulären Tripelfeld ausser dem singulären Tripel noch mehr als ein Tripel gemein hat, dann R_T^1 ganz in F_T enthalten ist. Also gilt: Sind $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ zwei beliebige Tripel des singulären Tripelfeldes F_T und ist α, β, γ das singuläre Tripel, so ist die durch die 3 Tripel

$$(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots) \wedge (\beta, \beta_1, \beta_2, \dots) \wedge (\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots)$$

bestimmte unicursale Tripelreihe in F_T enthalten. Wir erkennen gleichzeitig, dass weitere in F_T enthaltene R_T^1 , welchen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ angehören, nicht existiren, so dass wir auf diese Weise bereits die Gesammtheit der in F_T enthaltenen R_T^1 erhalten. Dazu brauchen wir nur zu zeigen, dass jede in F_T enthaltene R_T^1 das singuläre Tripel enthalten muss. In der That betrachten wir diejenigen beiden Elemente β', γ' von H resp. Z , welche das singuläre Element α von Ξ

zu einem Tripel der in F_T enthaltenen R_T^1 ergänzen; da α, β', γ' auch ein Tripel von F_T bilden, da ferner für alle Elementenpaare η, ξ , welche α zu einem Tripel von F_T ergänzen, entweder $\eta = \beta$, oder $\xi = \gamma$ sein muss, so muss entweder $\beta' = \beta$, oder $\gamma' = \gamma$ sein. Nehmen wir zunächst den Fall $\beta' = \beta$; wir fragen nunmehr nach demjenigen Elementepaar α'', β'' , welches das singuläre Element γ von Z zu einem Tripel von R_T^1 ergänzt; für dasselbe muss aus genau denselben Gründen, wie oben, entweder $\alpha'' = \alpha$ oder $\beta'' = \beta$ sein; ist $\alpha'' = \alpha$, so ist also α das in Ξ entsprechende Element von γ in Bezug auf R_T^1 , und oben sahen wir, dass β das in H entsprechende Element von α in Bezug auf R_T^1 war, also ist unter der gemachten Annahme α, β, γ ein Tripel von R_T^1 . Dasselbe ergibt sich bei der Annahme, dass $\beta'' = \beta$ ist; dann entspricht in R_T^1 dem Element γ das Element β von H ; und diesem auf Ξ das Element α ; also ist auch in diesem Falle α, β, γ ein Tripel von R_T^1 . Zu genau demselben Resultate gelangen wir auf völlig analogem Wege, wenn wir die andere Annahme machen, dass nämlich nicht $\beta' = \beta$, sondern $\gamma' = \gamma$ sei. Daher können wir den Satz aussprechen:

Jeder in einem singulären Tripelfeld enthaltenen unicursalen Tripelreihe gehört das singuläre Tripel des Tripelfeldes an. Da wir sahen, dass jede R_T^1 , welche 2 beliebige Tripel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ und das singuläre Tripel enthält, vollständig in F_T enthalten ist, wir aber jetzt bewiesen haben, dass jede in F_T enthaltene R_T^1 das singuläre Tripel enthält, so ergibt sich, dass eine und nur eine R_T^1 existiert, welcher 2 beliebige Tripel von F_T angehören, und welche in F_T enthalten ist; im Gegensatz zu dem nicht singulären Tripelfeld, wo stets 2 derartige R_T^1 vorhanden waren. Also ist bewiesen: *In einem singulären Tripelfelde ist nur ein Netz von unicursalen Tripelreihen enthalten, welchen sämtlich das singuläre Tripel angehört. Für das singuläre Tripelfeld reduciren sich demnach die beiden Netze des allgemeinen Falles auf ein einziges.* —

§ 3.

Lineare Constructionen des Tripelfeldes.

Durch 7 Tripel ist ein Tripelfeld (nach § 1. 2) im Allgemeinen eindeutig bestimmt; es wird demnach für die constructive Behandlung der trilinearen Verwandtschaft als fundamental das Problem sich ergeben:

Aus 7 gegebenen Tripeln die übrigen Tripel des durch sie bestimmten Tripelfeldes linear zu construiren. Wir wollen hier eine völlig elementare Lösung dieses Problems geben, bei welcher nur die einfachsten Constructionen projectiver Gebilde zur Verwendung kommen. Wir werden erkennen, dass das in Rede stehende Problem unmittelbar die

Ausführung fundamentaler Constructionsaufgaben aus der Theorie der Flächen II^{ter} und III^{ter} Ordnung gestattet. Zuvor seien kurz die Fälle behandelt, wo unter den 7 gegebenen Tripeln solche auftreten, bei welchen zwei ihrer Elemente ein singuläres Paar bilden; auf diese einfacheren Fälle lässt sich das allgemeine Problem unmittelbar reduciren. Ein singuläres Paar repräsentirt uns 2 Tripel des Tripelfeldes F_T , da es durch irgend 2 — also durch alle — Elemente des dritten Grundgebildes zu je einem Tripel von F_T ergänzt wird.

1) Von einem Tripelfeld F_T kennt man die singulären Elemente $\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2$ und ein Tripel ξ_1, η_1, ξ_1 ; es sollen die übrigen Tripel linear construirt werden. *)

a) Um zu einem beliebigen Elemente ξ von Ξ alle Elementenpaare η, ζ zu construiren, welche ξ zu einem Tripel von F_T ergänzen, haben wir nur die zu ξ in F_T zugeordnete Projectivität P_ξ zu construiren, von welcher β_1, γ_2 und β_2, γ_1 2 Paare entsprechender Elemente bilden, so dass nur noch ein drittes Paar entsprechender Elemente aufzufinden ist. Ein solches ergibt sich unmittelbar folgendermassen: Die dem Punkte ξ_1 zugeordnete Projectivität P_{ξ_1} ist offenbar:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \xi_1, \dots) \wedge (\beta_2, \beta_1, \eta_1, \dots);$$

suchen wir in P_{ξ_1} das Element η , welches dem Element ξ entspricht, so dass:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \xi_1, \xi) \wedge (\beta_2, \beta_1, \eta_1, \eta),$$

so bilden ξ, η, ξ_1 ein Tripel von F_T und es ist also η, ξ_1 ein Paar entsprechender Elemente von P_ξ und somit:

$$(\beta_1, \beta_2, \eta, \dots) \wedge (\gamma_2, \gamma_1, \xi_1, \dots)$$

die dem Element ξ in F_T zugeordnete Projectivität P_ξ , die daher durch Construction des *einzigen* Elementes η herstellbar wird, und unmittelbar gestattet, alle Elementenpaare η, ζ , welche das beliebige Element ξ von Ξ zu einem Tripel ergänzen, aufzufinden. —

b) *Zweite Construction.* Es seien S_ξ, S_η, S_ζ , die beliebig gewählten Scheitel dreier in derselben Ebene befindlichen Strahlenbüschel, welche wir folgendermassen auf die 3 Grundgebilde Ξ, H, Z resp. projectivisch beziehen:

$$\left. \begin{aligned} (\alpha_1, \alpha_2, \xi_1, \dots) \wedge (\alpha'_1, \alpha'_2, \xi'_1, \dots) \\ (\beta_1, \beta_2, \eta_1, \dots) \wedge (\beta'_1, \beta'_2, \eta'_1, \dots) \\ (\gamma_1, \gamma_2, \xi_1, \dots) \wedge (\gamma'_1, \gamma'_2, \xi'_1, \dots) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \alpha'_1 &= \beta'_2 = S_\xi \cdot S_\eta, \\ \beta'_1 &= \gamma'_2 = S_\eta \cdot S_\zeta, \\ \gamma'_1 &= \alpha'_2 = S_\zeta \cdot S_\xi; \end{aligned}$$

und ferner, wenn P einen beliebigen Punkt der Ebene $S_\xi \cdot S_\eta \cdot S_\zeta$ bedeutet, $\xi'_1 = S_\xi \cdot P$, $\eta'_1 = S_\eta \cdot P$, $\xi'_1 = S_\zeta \cdot P$. Auf diese Weise ist nach § 1.6) die gesuchte trilineare Beziehung (F_T) eindeutig auf die 3 reducirt-

*) cf. Schubert, a. a. O.

trilinearen Strahlenbüschel S_{ξ} , S_{η} , S_{ζ} , resp. auf die Punkte ihrer Ebene bezogen. Man kann nun unmittelbar irgend 2 Elemente ξ , η linear durch ein drittes Element ξ zu einem Tripel von F_T ergänzen, dazu haben wir nur die Strahlen ξ' , η' durch resp. S_{ξ} , S_{η} zu construiren, welche resp. durch

$(\alpha_1, \alpha_2, \xi_1, \xi) \wedge (\alpha'_1, \alpha'_2, \xi'_1, \xi')$, $(\beta_1, \beta_2, \eta_1, \eta) \wedge (\beta'_1, \beta'_2, \eta'_1, \eta')$ eindeutig defnirt sind; ist P der Schnittpunkt von ξ' und η' und $S_{\zeta}P = \xi'$ gesetzt, so ist das gesuchte Element ξ eindeutig bestimmt durch die projective Beziehung:

$$(\gamma'_1, \gamma'_2, \xi'_1, \xi') \wedge (\gamma_1, \gamma_2, \xi_1, \xi), \quad -$$

2) Von einem Tripelfeld F_T sind gegeben die beiden singulären Paare $\beta_1\gamma_2, \beta_2\gamma_1$ und 3 Tripel ξ_1, η_1, ξ_1 ; ξ_2, η_2, ξ_2 ; ξ_3, η_3, ξ_3 ; es sollen die übrigen Tripel von F_T linear construirt werden. a) Wir führen diese Aufgabe auf die vorige zurück, indem wir die beiden noch fehlenden Elemente α_1, α_2 construiren, was mit alleiniger Hilfe des Lineals möglich ist. Zunächst ergibt sich, dass die zu ξ_1 zugeordnete Projectivität P_{ξ_1} defnirt ist durch:

$$(\beta_1, \beta_2, \eta_1, \dots) \wedge (\gamma_2, \gamma_1, \xi_1, \dots)$$

ebenso ist P_{ξ_2} defnirt durch:

$$(\beta_1, \beta_2, \eta_2, \dots) \wedge (\gamma_2, \gamma_1, \xi_2, \dots)$$

und P_{ξ_3} durch

$$(\beta_1, \beta_2, \eta_3, \dots) \wedge (\gamma_2, \gamma_1, \xi_3, \dots).$$

Wir construiren nun diejenigen beiden Elemente η_{12}, η_{13} , welche durch:

$$(\beta_1, \beta_2, \eta_2, \eta_{12}) \wedge (\gamma_2, \gamma_1, \xi_2, \xi_1)$$

resp, durch

$$(\beta_1, \beta_2, \eta_3, \eta_{13}) \wedge (\gamma_2, \gamma_1, \xi_3, \xi_1)$$

eindeutig bestimmt sind; dann ergänzen η_{12}, ξ_1 das Element ξ_2 zu einem Tripel, da η_{12}, ξ_1 entsprechende Elemente von P_{ξ_2} sind, und ebenso ergänzen η_{13}, ξ_1 das Element ξ_3 zu einem Tripel, mithin ist die Projectivität:

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) \wedge (\eta_1, \eta_{12}, \eta_{13}, \dots)$$

die zu ξ_1 in F_T zugeordnete Projectivität P_{ξ_1} . Die beiden singulären Paare α_1, β_2 und α_2, β_1 gehören allen Projectivitäten P_{ξ} an, welche den Elementen ξ von Z in F_T zugeordnet sind, sie sind also auch Paare entsprechender Elemente der von uns aufgefundenen Projectivität P_{ξ_1} und mithin werden α_1, α_2 linear construierbar; da sie bestimmt sind durch die projective Beziehung:

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \alpha_1, \alpha_2) \wedge (\eta_1, \eta_{12}, \eta_{13}, \beta_2, \beta_1).$$

Dadurch ist unsere Aufgabe auf die vorige zurückgeführt. —

b) Auch hier können wir das gesuchte Tripelfeld auf die Strahlentripel dreier trilinearen Strahlenbüschel in reducirter Lage eindeutig

umkehrbar beziehen, und so, wie sub. 1. b), die Construction von F_T in übersichtlicher Weise leisten. Sind nämlich S_ξ, S_η, S_ζ die 3 beliebig gewählten Scheitel dreier in derselben Ebene befindlichen Strahlenbüschel, und sind η'_1, ξ'_1 zwei beliebige Strahlen resp. durch S_η, S_ζ , deren Schnittpunkt $(\eta'_1, \xi'_1) = P_1$ ist, dann construiren wir die Strahlen η'_2, η'_3 durch S_η und ξ'_2, ξ'_3 durch S_ζ , für welche die projectiven Beziehungen:

$$(\beta_1, \beta_2, \eta_1, \eta_2, \eta_3) \wedge (\beta'_1, \beta'_2, \eta'_1, \eta'_2, \eta'_3)$$

und

$$(\gamma_1, \gamma_2, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \wedge (\gamma'_1, \gamma'_2, \xi'_1, \xi'_2, \xi'_3)$$

bestehen, wobei wieder;

$$\alpha'_1 = \beta'_2 = S_\xi S_\eta, \quad \beta'_1 = \gamma'_2 = S_\eta S_\zeta, \quad \gamma'_1 = \alpha'_2 = S_\zeta S_\xi$$

gesetzt ist.

Sind nun die Schnittpunkte von η'_2 und ξ'_2 resp. von η'_3 und ξ'_3 durch P_2, P_3 bezeichnet, und

$$S_\xi P_1 = \xi'_1, \quad S_\xi P_2 = \xi'_2, \quad S_\xi P_3 = \xi'_3$$

gesetzt, dann führen die 3 Projectivitäten:

$$(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \dots) \wedge (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots),$$

$$(\eta'_1, \eta'_2, \eta'_3, \dots) \wedge (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots),$$

$$(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \dots) \wedge (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots)$$

die 3 reducirt-trilinearen Strahlenbüschel S_ξ, S_η, S_ζ in die gesuchte trilineare Beziehung der 3 Grundgebilde Ξ, H, Z über. Denn die auf diese Weise trilinear bezogenen Grundgebilde Ξ, H, Z haben offenbar $\xi_1, \eta_1, \xi_1; \xi_2, \eta_2, \xi_2; \xi_3, \eta_3, \xi_3$ zu Tripeln und β_1, γ_2 und β_2, γ_1 zu singulären Paaren. Die beiden letzten singulären Elemente α_1, α_2 ergeben sich linear aus der projectiven Beziehung:

$$(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \alpha'_1, \alpha'_2) \wedge (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \alpha_1, \alpha_2). \quad -$$

3) Von einem Tripelfeld F_T sind gegeben 5 Tripel ξ_i, η_i, ξ_i ($i=1,2,3,4,5$) und ein singuläres Paar β_1, γ_2 ; es sollen die übrigen Tripel und die übrigen singulären Elemente linear construirt werden. Wir schlagen hier wieder den in den früheren Aufgaben befolgten Weg ein, 3 trilineare Strahlenbüschel S_ξ, S_η, S_ζ in reducirter Lage aufzufinden, welche auf die 3 gegebenen Grundgebilde Ξ, H, Z projectivisch so bezogen sind, dass 3 Strahlen ξ', η', ξ' von resp. S_ξ, S_η, S_ζ , welche durch einen Punkt gehen, 3 Elemente ξ, η, ξ entsprechen, welche ein Tripel des gesuchten Tripelfeldes F_T bilden. Zu diesem Zwecke wählen wir die beiden Strahlenbüschel mit den Scheiteln S_η und S_ζ in ein und derselben Ebene ganz willkürlich, und ferner die Strahlen η'_1, η'_2 durch S_η und ξ'_1, ξ'_2 durch S_ζ ganz beliebig; nunmehr construiren wir linear die 3 Strahlen $\eta'_3, \eta'_4, \eta'_5$ durch S_η

und die Strahlen ξ'_3, ξ'_4, ξ'_5 durch $S_{\xi'}$, für welche die projectiven Beziehungen gelten:

$$\left. \begin{aligned} (\beta_1 \eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 \eta_5) \wedge (\beta'_1 \eta'_1 \eta'_2 \eta'_3 \eta'_4 \eta'_5) \\ (\gamma_2 \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 \xi_5) \wedge (\gamma'_1 \xi'_1 \xi'_2 \xi'_3 \xi'_4 \xi'_5) \end{aligned} \right\} \text{ dabei sei wiederum: } \beta'_1 = \gamma'_2 = S_{\eta'} S_{\xi'}.$$

Bezeichnen wir noch den Schnittpunkt von η'_i mit ξ'_i durch P_i ($i = 1, 2, \dots, 5$), und construiren wir denjenigen eindeutig bestimmten Punkt $S_{\xi'}$, für welchen:

$$S_{\xi'}(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5) \wedge (\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 \xi_5)$$

ist, und welcher allein mit Hilfe des Lineals construierbar ist*), dann werden, wenn wir:

$$S_{\xi'} P_i = \xi'_i \quad (i = 1, 2, \dots, 5)$$

und

$$\alpha'_1 = \beta'_2 = S_{\xi'} S_{\eta'}, \quad \alpha'_2 = \gamma'_1 = S_{\xi'} S_{\xi'}$$

setzen, die 3 Strahlenbüschel $S_{\xi'}$, $S_{\eta'}$, $S_{\xi'}$ durch die 3 projectiven Beziehungen:

$$\begin{aligned} (\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \dots) \wedge (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots), \\ (\eta'_1, \eta'_2, \eta'_3, \dots) \wedge (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots), \\ (\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \dots) \wedge (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) \end{aligned}$$

in der gewünschten Weise auf die 3 Grundgebilde Ξ, H, Z bezogen.

Denn es bilden die Tripel ξ, η, ξ , welche 3 Strahlen ξ', η', ξ' durch resp. $S_{\xi'} S_{\eta'} S_{\xi'}$, die durch einen Punkt gehen, entsprechen, ein Tripelfeld F_T , welchem nach unserer Construction die 5 Tripel ξ_i, η_i, ξ_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) und das singuläre Paar β_1, γ_2 angehören, welches also das gesuchte ist; zu einem beliebigen Elementepaar ξ, η können wir nunmehr unmittelbar das Element ξ construiren, welches ξ, η zu einem Tripel von F_T ergänzt; denn construiren wir zunächst die beiden Elemente ξ', η' , für welche:

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi) \wedge (\xi'_1 \xi'_2, \xi'_3 \xi'), \quad (\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta) \wedge (\eta'_1 \eta'_2 \eta'_3 \eta'),$$

bezeichnen wir den Schnittpunkt von ξ' mit η' durch P und setzen $S_{\xi'} P = \xi'$, dann ist das gesuchte Element ξ linear bestimmt durch die projective Beziehung:

$$(\xi'_1 \xi'_2 \xi'_3 \xi') \wedge (\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi).$$

Wir können ferner die noch fehlenden singulären Elemente unmittelbar mit alleiniger Hilfe des Lineals construiren, und damit unsere Aufgabe auf die Aufgabe 1 zurückführen. Denn es sind zunächst α_1, α_2 linear bestimmt durch:

$$(\xi'_1 \xi'_2 \xi'_3 \alpha'_1 \alpha'_2) \wedge (\xi_1 \xi_2 \xi_3 \alpha_1 \alpha_2),$$

*) cf. Sturm: Das Problem der Projectivität, Math. Ann. Bd. II, p. 535.

und ebenso β_2 und γ_1 durch:

$$(\eta_1' \eta_2' \eta_3' \beta_2') \wedge (\eta_1 \eta_2 \eta_3 \beta_2), \quad (\xi_1' \xi_2' \xi_3' \gamma_1') \wedge (\xi_1 \xi_2 \xi_3 \gamma_1).$$

4) Von einem Tripelfeld F_T sind gegeben 2 Elemente ξ_1, ξ_2 von Ξ und die durch F_T ihnen zugeordneten Projectivitäten P_{ξ_1}, P_{ξ_2} und ein Tripel ξ_3, η_3, ζ_3 ; es sollen die übrigen Tripel von F_T linear construirt werden*)

Zunächst kennt man alle Elementepaare, welche ξ_1 sowohl, wie ξ_2 , zu einem Tripel von F_T ergänzen, und man kann zu ξ_1 (und ebenso zu ξ_2) und irgend einem Element der beiden andern Grundgebilde stets das dritte Element finden, welches mit den beiden ersten ein Tripel von F_T bildet; dasselbe ist offenbar das dem zweiten Element in P_{ξ_1} entsprechende Element. Sodann kann man auch die zu η_3 in F_T zugeordnete Projectivität P_{η_3} angeben; denn sind ξ_{13}, ξ_{23} diejenigen Elemente von Z , welche ξ_1, η_3 resp. ξ_2, η_3 zu einem Tripel von F_T ergänzen, und, welche, wie eben bemerkt, linear construierbar sind, so ist die Projectivität P_{η_3} offenbar gegeben durch die Beziehung

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) \wedge (\xi_{13}, \xi_{23}, \xi_3, \dots).$$

Nunmehr kann man auch die Projectivität P_{ξ_0} , welche einem beliebigen Element ξ_0 von Z durch F_T zugeordnet ist, construiren; sind nämlich $\eta_{10}, \eta_{20}, \xi_{30}$ diejenigen, nach dem Vorigen linear construibaren, Elemente, welche resp. ξ_1, ξ_0 ; ξ_2, ξ_0 ; η_3, ξ_0 zu einem Tripel von F_T ergänzen, so ist die Projectivität P_{ξ_0} gegeben durch die Beziehung

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_{30}, \dots) \wedge (\eta_{10}, \eta_{20}, \eta_3, \dots).$$

Nunmehr kann man jedes beliebige Element ξ von Z und jedes beliebige Element eines der beiden andern Grundgebilde zu einem Tripel von F_T ergänzen, man hat nur zu dem zweiten Element in Bezug auf die bekannte Projectivität P_ξ das entsprechende zu construiren. Dann kann man auch zu jedem beliebigen Element ξ von Ξ (und ebenso für H) die zugehörige Projectivität P_ξ (resp. P_η) auffinden; denn sind ξ', ξ'', ξ''' drei beliebige Elemente von Z , und η', η'', η''' diejenigen, in der eben beschriebenen Weise, construibaren Elemente von H , welche resp. $\xi\xi', \xi\xi'', \xi\xi'''$ zu einem Tripel von F_T ergänzen, so ist P_ξ gegeben durch die Beziehung

$$(\eta', \eta'', \eta''', \dots) \wedge (\xi', \xi'', \xi''', \dots).$$

Damit kann man irgend 2 auf verschiedenen Grundgebilden gelegene Elemente zu einem Tripel von F_T ergänzen, also das ganze Tripelfeld construiren. —

*) Unter Verwendung einer *quadratischen* Construction sind die beiden singulären Paare β_1, γ_2 ; β_2, γ_1 als gemeinsame Paare von P_{ξ_1} und P_{ξ_2} direct construierbar, und damit ist die Aufgabe auf Aufgabe 2 zurückgeführt. —

5) Von einer bicursalen Tripelreihe R_T^2 sind 6 Tripel gegeben, es sollen die übrigen Tripel gefunden werden. Sind 6 Tripel ξ_i, η_i, ζ_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) gegeben, so giebt es eine einfache lineare Mannigfaltigkeit von Tripelfeldern, einen Büschel, welche diese 6 Tripel enthalten, und welchen im Ganzen eine einfache Mannigfaltigkeit von Tripel gemeinsam sind; die Gesamtheit dieser gemeinsamen Tripel eines F_T -Büschels nannten wir eine *bicursale Tripelreihe* R_T^2 und erkannten, dass R_T^2 durch die 6 Tripel ξ_i, η_i, ζ_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) i. A. eindeutig bestimmt war (cf. § 1. 2); wir wissen, dass jedes Element ξ von Ξ durch 2 Elementepaare η, ζ und η', ζ' zu einem Tripel von R_T^2 ergänzt wird, und wollen nun diese beiden Elementepaare construiren. Sind nämlich F_T und F'_T zwei Tripelfelder, welche dem obigen Büschel angehören, und welche daher R_T^2 enthalten, so sind die gesuchten beiden Elementepaare η, ζ und η', ζ' die beiden gemeinsamen Paare der beiden Projectivitäten P_ξ und P'_ξ , welche in resp. F_T, F'_T dem Elemente ξ zugeordnet sind. Wählen wir nun für F_T dasjenige Tripelfeld, für welches η_1, ζ_1 ein singuläres Paar ist, und welchem die 5 Tripel $\xi_2, \eta_2, \zeta_2, \dots, \xi_6, \eta_6, \zeta_6$ angehören, und welches offenbar R_T^2 enthält, da es die 6 Tripel ξ_i, η_i, ζ_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) enthält, so ist für dieses Tripelfeld nach (3) die zu ξ gehörige Projectivität P_ξ linear construierbar. Wählen wir ferner für F'_T dasjenige Tripelfeld, welchem η_6, ζ_6 als singuläres Paar und $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \dots, \xi_5, \eta_5, \zeta_5$ als Tripel angehören, so ist auch für dieses die dem Element ξ zugeordnete Projectivität P'_ξ construierbar; mithin ergeben sich $\eta, \zeta; \eta', \zeta'$ als die beiden gemeinsamen Paare der beiden bekannten Projectivitäten P_ξ, P'_ξ und sind also mittels Zirkel und Lineal construierbar. *)

Ist eines der beiden Paare — etwa η, ζ — bekannt, so ist das zweite η', ζ' *linear construierbar*. Im Besonderen lassen sich also die Paare η_i, ζ_i ($i = 1, \dots, 6$), welche die 2^{ten} — von η_i, ζ_i verschiedenen — Paare bilden, welche ξ_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) zu einem Tripel von R_T^2 ergänzen, auf diesem Wege *linear construiren*. —

6) Von einem Tripelfelde F_T sind die 7 Tripel ξ_i, η_i, ζ_i ($i = 1, 2, \dots, 7$)

*) Die Auffindung der beiden gemeinsamen Paare zweier Projectivitäten lässt sich leicht auf bekannte Constructionen zurückführen. Sind z. B. die Strahlen der beiden Strahlenbüschel R, S in zweifacher Weise projectivisch bezogen, durch die Projectivitäten P und P' , so bilden die Schnittpunkte je zweier Strahlen, die sich in Bezug auf P entsprechen, einen Kegelschnitt K , und ebenso die Schnittpunkte der in Bezug auf P' entsprechenden Strahlen ein Kegelschnitt K' ; K und K' gehen beide durch R und S und schneiden sich in noch zwei weiteren Punkten T, U , welche mit R und S verbunden die gesuchten gemeinsamen Paare RT, ST und RU, SU von P und P' liefern. Die Construction von T und U geschieht mittels Zirkel und Lineal (cf. Steiner: Ges. Werke Bd. I, p. 517). Ist T bekannt, so findet man U linear. —

gegeben, welche nicht derselben bicursalen Tripelreihe angehören, es sollen die übrigen Tripel von F_T linear construirt werden.*)

Betrachten wir die bicursale Tripelreihe R_T^2 , welche durch die 6 Tripel $\xi_1, \eta_1, \xi_1; \dots; \xi_6, \eta_6, \xi_6$ bestimmt ist, und deren sämtliche Tripel in dem gesuchten Tripelfelde enthalten sind; nach (5) können wir das zweite — von η_1, ξ_1 verschiedene — Elementepaar η'_1, ξ'_1 linear construiren, welches mit ξ_1 ein Tripel von R_T^2 bildet; und ebenso das zweite — von η_2, ξ_2 verschiedene — Elementepaar η'_2, ξ'_2 , welches mit ξ_2 ein Tripel von R_T^2 bildet; die beiden Tripel ξ_1, η'_1, ξ'_1 und ξ_2, η'_2, ξ'_2 sind ebenfalls dem gesuchten Tripelfelde F_T angehörig. Betrachten wir nun die bicursale Tripelreihe $\bar{R}_T^2$, welche durch die 6 Tripel $\xi_1, \eta_1, \xi_1; \dots; \xi_5, \eta_5, \xi_5; \xi_7, \eta_7, \xi_7$ bestimmt ist, und construiren wir auch in Bezug auf $\bar{R}_T^2$ die beiden Elementepaare η''_1, ξ''_1 und η''_2, ξ''_2 , welche — abgesehen von resp. η_1, ξ_1 und η_2, ξ_2 — die Elemente ξ_1, η_1 resp. zu einem Tripel von $\bar{R}_T^2$ ergänzen, so haben wir in der projectiven Beziehung

$$(\eta_1, \eta'_1, \eta''_1, \dots) \wedge (\xi_1, \xi'_1, \xi''_1, \dots)$$

die Projectivität P_{ξ_1} , welche in F_T dem Elemente ξ_1 zugeordnet ist; und ebenso in der projectiven Beziehung

$$(\eta_2, \eta'_2, \eta''_2, \dots) \wedge (\xi_2, \xi'_2, \xi''_2, \dots)$$

die dem Elemente ξ_2 in Bezug auf F_T zugeordnete Projectivität P_{ξ_2} . Demnach kennt man von F_T die Elemente ξ_1, ξ_2 und die ihnen in F_T zugeordneten Projectivitäten P_{ξ_1}, P_{ξ_2} , sowie ein Tripel ξ_3, η_3, ξ_3 , wodurch die weitere Construction, auf die in (4) behandelte Aufgabe zurückgeführt ist. — Die singulären Paare β_1, γ_2 und β_2, γ_1 ergeben sich als gemeinsame Paare von P_{ξ_1}, P_{ξ_2} , die beiden noch fehlenden singulären Elemente α_1, α_2 findet man linear nach (2); sind die singulären Elemente bestimmt, so folgen die übrigen Tripel von F_T sehr einfach aus (1); dieselben lassen sich aber auch direct und *mit alleiniger Hilfe des Lineals* aus (4) construiren, wenn auch etwas umständlicher. —

Anmerkung: Sind von den gegebenen Tripeln 4 derselben unicursalen Tripelreihe R_T^1 angehörig, also die ganze R_T^1 in F_T enthalten, so sind die 6 singulären Elemente linear construierbar. In der That, wenn:

$$(\xi_4 \xi_5 \xi_6 \xi_7) \wedge (\eta_4 \eta_5 \eta_6 \eta_7) \wedge (\xi_4 \xi_5 \xi_6 \xi_7),$$

so hat die nach dem Vorigen linear construierbare Projectivität P_{ξ_4} mit der Projectivität

$$(\eta_4 \eta_5 \eta_6 \eta_7 \dots) \wedge (\xi_4 \xi_5 \xi_6 \xi_7 \dots)$$

*) Vgl. Le Paige: Note sur l'homographie du troisième ordre; Bull. de l'acad. roy. de Belgique 3^{me} Ser. Tom. V 1883. wo die betr. Construction mit Hilfe von Constructionen der Fläche II. O. geleistet wird, während es uns darauf ankam, die Construction mit den einfachsten Mitteln aufzubauen, um sie dann ihrerseits zur Construction der Flächen II. und III. Ordnung zu verwenden.

erstens das Elementepaar η_1', ξ_1' gemeinsam, für welches

$$(\xi_4 \xi_5 \xi_6 \xi_1) \wedge (\eta_4 \eta_5 \eta_6 \eta_1') \wedge (\xi_4 \xi_5 \xi_6 \xi_1'),$$

und zweitens eines der beiden singulären Paare, das wir mit β_1, γ_2 bezeichnen wollen, und das linear construierbar ist; dann sind aber nach (3) alle weiteren singulären Elemente linear construierbar. —

7) Von einem singulären Tripelfeld F_T sind gegeben das singuläre Tripel α, β, γ und drei weitere Tripel ξ_1, η_1, ξ_1 ; ξ_2, η_2, ξ_2 ; ξ_3, η_3, ξ_3 ; es sollen die übrigen Tripel gefunden werden*). — Wir sahen § 1. 7), dass sich 3 Strahlenbüschel Ξ', H', Z' in derselben Ebene, deren Scheitel S_ξ, S_η, S_ζ in gerader Linie liegen, auffinden lassen, welche resp. auf die 3 gegebenen Grundgebilde Ξ, H, Z projectivisch so bezogen sind, dass:

$$(\alpha, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) \wedge (\alpha', \xi_1', \xi_2', \xi_3', \dots),$$

$$(\beta, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots) \wedge (\beta', \eta_1', \eta_2', \eta_3', \dots),$$

$$(\gamma, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) \wedge (\gamma', \xi_1', \xi_2', \xi_3', \dots);$$

dabei bedeuten:

ξ_1', η_1', ξ_1' 3 Strahlen resp. durch S_ξ, S_η, S_ζ , welche sich in einem Punkte P_1 schneiden,

ξ_2', η_2', ξ_2' 3 Strahlen resp. durch S_ξ, S_η, S_ζ , welche sich in einem Punkte P_2 schneiden;

ξ_3', η_3', ξ_3' 3 Strahlen resp. durch S_ξ, S_η, S_ζ , welche sich in einem Punkte P_3 schneiden,

und ferner war:

$$\alpha' = \beta' = \gamma' = \overline{S_\xi S_\eta S_\zeta}.$$

Die Tripel ξ, η, ξ , welche in diesen Beziehungen 3 Strahlen ξ', η', ξ' , die sich in einem Punkte P schneiden, entsprechen, bilden ein singuläres Tripelfeld, welches das Tripel α, β, γ als singuläres Tripel besitzt, und welchem die 3 Tripel ξ_i, η_i, ξ_i ($i = 1, 2, 3$) angehören. Dasselbe ist also mit dem gesuchten singulären Tripelfelde identisch, und man kann in der früher gezeigten Weise jedes Elementepaar auf 2 Grundgebilden durch ein Element auf dem dritten Grundgebilde zu einem Tripel ergänzen. —

§ 4.

Die Erzeugnisse dreier trilineareren Ebenenbüschel.

Die vorangeschickten Ergebnisse sollen im Folgenden dazu verwandt werden, die Erzeugnisse dreier trilineareren Ebenenbüschel zu

*) Vgl. Hauck: Die trilineare Beziehung zwischen 3 einstufigen Grundgebilden; Cr. Journ. Bd. 108, p. 26.

untersuchen. Berücksichtigt man dabei die verschiedenen Fälle der gegenseitigen Lage der Axen der 3 Ebenenbüschel, sowie die verschiedenen Arten der trilinearen Beziehung selbst, so geben 3 trilineare Ebenenbüschel einer verhältnissmässig grossen Anzahl von Raumgebilden ihre Entstehung. Die sämtlichen Arten der cubischen Flächen, sowohl die allgemeinen, wie die mit 1, 2, 3, 4 Doppelpunkten, unter denen auch biplanare und uniplanare auftreten dürfen, ferner die Regelflächen und Kegel III. Ordnung finden auf diese Weise ihre gemeinsame Erzeugung. Aber auch die reduciblen F^3 ergeben sich ebenso ungezwungen als Erzeugnisse trilinearere Ebenenbüschel, so dass dieser Weg auch zu einer bemerkenswerthen Erzeugung der Fläche II. O., als eines Bestandtheiles einer reduciblen F^3 , hinführt. Ist so in der trilinearen Beziehung ein gemeinsamer Erzeugungsmechanismus der sämtlichen Arten der F^2 und F^3 gewonnen, so lässt sich die gesammte constructive Theorie der genannten Gebilde aus einem einheitlichen Gesichtspunkte behandeln, und auf die vorangeschickte Behandlung der trilinearen Grundgebilde zurückführen.

1) *Das Erzeugniss dreier trilinearere Ebenenbüschel mit 3 windschiefen Axen, die allgemeine F^3 .* Sind Ξ, H, Z 3 Ebenenbüschel, die 3 windschiefen Geraden g_ξ, g_η, g_ζ ihre Axen, ξ eine Ebene von Ξ, η, ζ solche von resp. H, Z , und setzen wir diese 3 Ebenenbüschel in eine allgemeine trilineare Beziehung, so bilden die Tripel ξ, η, ζ entsprechender Ebenen ein Tripelfeld F_T , und die Punkte, in welchen sich die Ebenen eines Tripels schneiden, erzeugen eine Fläche III. O. F^3 , welche die Geraden g_ξ, g_η, g_ζ enthält, und umgekehrt wird jede F^3 aus 3 windschiefen, auf ihr liegenden Geraden durch Ebenentripel projicirt, welche ein F_T bilden. *) Sind $\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2$ die 6 singulären Ebenen von F_T , so liegen auch die 6 Geraden $(\alpha_1\beta_2), (\beta_1\gamma_2), (\gamma_1\alpha_2); (\alpha_2\beta_1), (\beta_2\gamma_1), (\gamma_2\alpha_1)$, in welchen sich die Ebenen eines singulären Paares schneiden, auf der F^3 , und es sind dies die *einzigsten* Geraden, welche von den 3 Geraden g_ξ, g_η, g_ζ nur 2 schneiden. Die früher gelehrtten Constructionen von F_T (cf. § 3) gestatten nunmehr die F^3 linear zu construiren, falls von ihr gegeben sind:

1) Die 9 Geraden $g_\xi, g_\eta, g_\zeta; (\alpha_1\beta_2), (\beta_1\gamma_2), (\gamma_1\alpha_2); (\alpha_2\beta_1), (\beta_2\gamma_1), (\gamma_2\alpha_1)$ und 1 Punkt. 2) Die 5 Geraden $g_\xi, g_\eta, g_\zeta; (\beta_1\gamma_2), (\beta_2\gamma_1)$ und 3 Punkte. 3) Die 4 Geraden $g_\xi, g_\eta, g_\zeta; (\beta_1\gamma_2)$ und 5 Punkte. 4) Die 3 Geraden g_ξ, g_η, g_ζ und 7 Punkte. —

Die übrigen Geraden der F^3 zerfallen in solche, welche von den 3 Geraden g_ξ, g_η, g_ζ alle 3, oder nur eine oder gar keine treffen, da die 6 Geraden, welche nur 2 der Geraden g_ξ, g_η, g_ζ treffen, durch die 6 singulären Paare von F_T erhalten und durch eine quadratische Con-

*) cf. Schubert, I. c. p. 466.

struction gefunden werden. Die 3 Geraden von F^3 g_1, g_2, g_3 , welche g_ξ, g_η, g_ζ gleichzeitig schneiden, werden erhalten als die 3 gemeinsamen Tripel von F_T und derjenigen unicursalen Tripelreihe R_T^1 , welche gebildet wird von den Ebenentripeln ξ, η, ζ , welche sich in einer Geraden schneiden; dieselben werden (cf. § 2. 3) durch eine cubische Construction erhalten. — Zweitens ergeben sich die Geraden, welche nur eine der 3 Geraden g_ξ, g_η, g_ζ schneiden, auf linearem Wege. Die 3 Geraden z. B., welche nur g_ξ nicht aber g_η, g_ζ schneiden, sind die dritten Geraden, in welchen die Ebenen $(g_\xi g_1), (g_\xi g_2), (g_\xi g_3)$ die F^3 schneiden. — Die 6 Geraden schliesslich, welche zu g_ξ, g_η, g_ζ windschief sind, erhält man folgendermassen: Ist g eine solche Gerade, so werden die Punkte von g aus g_ξ, g_η, g_ζ durch die Ebenentripel einer R_T^1 projicirt, welche in F_T enthalten ist; in dieser R_T^1 ereignet es sich zweimal, dass sich die 3 Ebenen eines Tripels in einer Geraden treffen, nämlich in den beiden gemeinsamen Geraden von $g, g_\xi, g_\eta, g_\zeta$; diese beiden Geraden sind auf F^3 gelegen, schneiden g_ξ, g_η, g_ζ , sind also entweder g_2, g_3 , oder g_3, g_1 , oder g_1, g_2 . Bestimmt man daher diejenigen R_T^1 , welche in F_T enthalten sind, und welchen z. B. die Tripel $(g_\xi g_2), (g_\eta g_2), (g_\zeta g_2)$ und $(g_\xi g_3), (g_\eta g_3), (g_\zeta g_3)$ angehören, so erfüllen die Schnittpunkte entsprechender Ebenen eine zu g_ξ, g_η, g_ζ windschiefe, der F^3 angehörige Gerade. Wir wissen (cf. § 2. 2), dass es genau 2 in F_T enthaltene R_T^1 giebt, welchen 2 gegebene Tripel angehören, also erhalten wir 2 der in Rede stehenden Geraden, die wir durch g_{12}, g_{21} bezeichnen. In derselben Weise gelangen wir — unter analoger Benutzung von g_3, g_1 sowie von g_1, g_2 — zu den 4 weiteren Geraden dieser Art: $g_{31}, g_{13}; g_{12}, g_{21}$. Diese 6 letzten Geraden ergeben sich linear, wenn die früheren Geraden bekannt sind. Also gilt: *Kennt man von einer F^3 drei windschiefe Gerade g_ξ, g_η, g_ζ und 7 Punkte, so ergeben sich die 3 Geraden von F^3 , welche g_ξ, g_η, g_ζ sämmtlich schneiden, durch eine cubische Construction; die 6 Geraden, welche nur 2 der 3 Geraden g_ξ, g_η, g_ζ schneiden, findet man auf quadratischem Wege, während die 9 Geraden, welche nur eine, und die 6 Geraden, welche keine der Geraden g_ξ, g_η, g_ζ schneiden, linear construierbar sind.* — Sind 4 windschiefe Geraden $g_\xi, g_\eta, g_\zeta, g_{12}$ und 3 Punkte der Fläche gegeben, so geht die cubische Construction in eine quadratische, die quadratische in eine lineare über (cf. § 3. 6), Anmerkung), so dass, wenn 4 windschiefe Gerade und 3 Punkte von F^3 gegeben sind, sich die 23 übrigen Geraden der Fläche mit Zirkel und Lineal construiren lassen.

— Sind 5 windschiefe Geraden von F^3 : $g_\xi, g_\eta, g_\zeta, g_{12}, g_{23}$ gegeben, die aber eine gemeinsame Secante g_2 besitzen müssen, so ist dadurch die F^3 bestimmt. In diesem Falle wird auch die einzige bisher quadratische Construction linear und die 22 übrigen Geraden der Fläche werden dann

mit alleiniger Hilfe des Lineals construierbar.*) — Betrachten wir noch ganz allgemein diejenigen R_T^1 , welche in F_T enthalten sind, so erzeugen dieselben die auf der F^3 befindlichen Raumcurven III. O. (R^3), welche g_ξ, g_η, g_ζ zu Secanten haben. Die in § 2. 2 bewiesenen Sätze ergeben daher, dass 2 Netze solcher R^3 auf F^3 existiren; die R^3 des einen Netzes schneiden von den 6 Geraden $(\alpha_1\beta_2), (\beta_1\gamma_2), (\gamma_1\alpha_2); (\alpha_2\beta_1), (\beta_2\gamma_1), (\gamma_2\alpha_1)$ die drei ersten, die R^3 des andern die 3 letzten. Durch 2 beliebige Punkte von F^3 geht genau eine R^3 aus jedem der beiden Netze. Zwei R^3 desselben Netzes haben einen Punkt, zwei R^3 aus verschiedenen Netzen haben 2 Punkte gemeinsam.

2) Das Erzeugniss dreier singulär-trilinearere Ebenenbüschel; die F^3 mit einem Doppelpunkt. Sei nunmehr die trilineare Beziehung, welche die 3 Ebenenbüschel Ξ, H, Z verknüpft, eine singuläre (cf. § 1. 4). Die Ebenen des singulären Tripels seien α, β, γ ; wir setzen voraus, dass dieselben sich nicht in einer Geraden schneiden, ein Fall der später besonders behandelt wird. Auch hier wird durch die Punkte, in welchen sich die Ebenen ξ, η, ζ eines Tripels von F_T schneiden, eine F^3 erzeugt. Der Schnittpunkt $(\alpha\beta\gamma)$ der 3 singulären Ebenen ist aber hier ein Doppelpunkt von F^3 ; denn ist g eine Gerade durch ihn, so werden deren Punkte aus g_ξ, g_η, g_ζ durch eine R_T^1 projectirt, die mit dem die F^3 erzeugenden singulären Tripelfelde F_T das singuläre Tripel, und also (nach § 2. 5) nur ein einziges weiteres Tripel gemeinsam hat; also schneidet g die F^3 nur noch in einem, von $(\alpha\beta\gamma)$ verschiedenen, Punkte, also ist $(\alpha\beta\gamma)$ ein Doppelpunkt von F^3 . Es gilt mithin: *Drei singulär-trilineare Ebenenbüschel erzeugen eine F^3 , welche den Schnittpunkt des singulären Tripels zum Doppelpunkte hat*; und ebenso ergiebt sich umgekehrt: *Jede F^3 mit einem Doppelpunkt wird aus 3 windschiefen, auf ihr enthaltenen Geraden, welche jedoch nicht mit dem Doppelpunkt auf demselben Hyperboloid liegen dürfen, durch 3 singulär-trilineare Ebenenbüschel projectirt*. — Die 3 Geraden g_1, g_2, g_3 , welche g_ξ, g_η, g_ζ sämmtlich schneiden, werden, wie früher, gefunden; die 6 Geraden jedoch, welche nur 2 der 3 Geraden g_ξ, g_η, g_ζ schneiden, fallen paarweise zusammen in die 3 Geraden $(\beta\gamma), (\gamma\alpha), (\alpha\beta)$. Ebenso fallen die 6 Geraden, welche g_ξ, g_η, g_ζ nicht schneiden, paarweise zusammen, da sie zu g_1, g_2, g_3 dieselbe Beziehung haben, wie $(\beta\gamma), (\gamma\alpha), (\alpha\beta)$ zu g_ξ, g_η, g_ζ ; daraus folgt, dass jede durch den Doppelpunkt gehende Gerade von F^3 doppelt zu zählen ist, um als Gesamtzahl der Geraden von F^3 wieder 27 zu erhalten.***) — Die Aufgabe eine F^3 mit einem Doppelpunkt zu construiren, von welcher gegeben sind, der

*) cf. Salmon-Fiedler: *Analyt. Geometrie des Raumes* II. Bd., p. 402 3^{te} Aufl.

**) cf. Salmon: *Cambridge and Dublin Math. Journ.* IV, p. 256; sowie Cayley: *Phil. Transact.* 1869.

Doppelpunkt, 3 windschiefe Gerade, die nicht mit dem Doppelpunkte auf demselben Hyperboloid liegen, und 3 einfache Punkte, wird unmittelbar durch § 3. 7) gelöst. — Die R^3 auf F^3 , welche g_ξ, g_η, g_ζ zu Secanten haben, werden aus g_ξ, g_η, g_ζ durch Ebenentripel einer in F^3 enthaltenen R^1 projicirt; nach den Sätzen in § 2. 6) ergibt sich daher: Sind g_ξ, g_η, g_ζ 3 windschiefe Gerade einer F^3 mit einem Doppelpunkt, welche nicht mit dem Doppelpunkte auf demselben Hyperboloid liegen, so muss jede R^3 der Fläche, welche g_ξ, g_η, g_ζ zu Secanten hat, den Doppelpunkt enthalten.

3) Das Erzeugniss dreier trilinearärer Ebenenbüschel mit 2 sich schneidenden Axen; die F^3 mit 1 Doppelpunkt. Setzen wir nunmehr voraus, dass sich die beiden Axen g_ξ, g_η der beiden Ebenenbüschel Ξ, H im Punkte D schneiden, während g_ζ mit g_ξ und g_η windschief ist, dann erzeugen ebenfalls die drei trilinearen Ebenenbüschel eine F^3 , der Schnittpunkt D von g_ξ, g_η ist jedoch ein Doppelpunkt; da jede durch D gehende Gerade g ausser in D nur noch in einem weiteren Punkte die F^3 schneidet, wie sich unmittelbar aus der Definition der trilinearen Beziehung ergibt. Auch umgekehrt erkennt man, dass jede F^3 mit 1 Doppelpunkt D aus 2 ihrer Geraden, die sich in D schneiden, und einer zu diesen windschiefen Geraden durch 3 trilineare Ebenenbüschel projicirt wird. Der Tangentialkegel im Doppelpunkt wird erzeugt durch die Schnittgeraden derjenigen projectiven Ebenenpaare ξ, η , welche die Ebene $(g_\zeta D)$ zu einem Tripel der trilinearen Beziehung ergänzen; dieser Kegel ist linear construierbar, wenn die F^3 durch ihre trilineare Erzeugung gegeben ist.

Um einen biplanaren Doppelpunkt zu erzeugen, muss dieser Kegel in ein Ebenenpaar zerfallen; das tritt ein (cf. § 1. 2), falls $(g_\zeta D)$ eine der beiden singulären Ebenen γ_1, γ_2 des Ebenenbüschels Z ist. Ist also z. B. $(g_\zeta D) = \gamma_1$, so berühren die beiden Ebenen α_2, β_2 die F^3 im Doppelpunkt, der also in der That biplanar wird. Ist im Besondern die trilineare Beziehung so beschaffen, dass $(g_\zeta D) = \gamma_1$ eine singuläre Ebene wird, und dass ferner die beiden singulären Ebenen α_2, β_2 sich in der gemeinsamen Ebene $(g_\xi g_\eta)$ der beiden Ebenenbüschel Ξ, H vereinigen, so dass $(g_\xi g_\eta) = \alpha_2 = \beta_2$, dann wird offenbar D ein uniplanarer Doppelpunkt.

4) Das Erzeugniss dreier trilinearärer Ebenenbüschel, bei welchen die Axe des einen die beiden andern Axen schneidet; die F^3 mit 2 Doppelpunkten.

Sind g_ξ, g_η, g_ζ nunmehr so beschaffen, dass g_η von g_ξ und g_ζ resp. in D_1, D_2 geschnitten wird, während g_ξ und g_ζ windschief sind, dann erzeugen die Tripel entsprechender Ebenen eine F^3 , welche D_1 und D_2 zu Doppelpunkten hat; andererseits wird auch umgekehrt jede F^3 mit 2 Doppelpunkten aus deren gerader Verbindungslinie und 2 windschiefen

durch je einen der Doppelpunkte gehenden Geraden der Fläche durch 3 trilineare Ebenenbüschel projectirt. Die § 3. 6) gegebene Construction liefert also die lineare Lösung der Aufgabe: Eine F^3 mit 2 Doppelpunkten aus den beiden Doppelpunkten, 7 einfachen Punkten und 2 windschiefen Geraden durch die beiden Doppelpunkte zu construiren.

Die 16 Geraden der F^3 lassen sich sehr einfach ableiten; man erkennt, dass, falls 7 einfache Punkte der Fläche, die beiden Doppelpunkte und 2 windschiefe Gerade von F^3 , durch jeden Doppelpunkt eine, gegeben sind, sich dann die übrigen 14 Geraden mit Zirkel und Lineal allein construiren lassen.

Der Fall, dass einer oder beide Doppelpunkte biplanar werden, wird erhalten, indem man eine der beiden Ebenen $(g_\xi g_\eta)$, $(g_\xi g_\zeta)$ oder beide zu singulären Ebenen der Büschel Ξ resp. Z für die trilineare Beziehung wählt.

5) Das Erzeugniss dreier trilineareren Ebenenbüschel, deren Axen in derselben Ebene liegen; die F^3 mit 3 Doppelpunkten. Seien jetzt g_ξ, g_η, g_ζ derselben Ebene angehörig, so dass sie sich paarweise in den Punkten $D_\xi = (g_\eta g_\zeta)$, $D_\eta = (g_\xi g_\zeta)$, $D_\zeta = (g_\xi g_\eta)$ schneiden, dann erzeugen die 3 trilinearen Ebenenbüschel Ξ, H, Z eine F^3 , welche die 3 Doppelpunkte D_ξ, D_η, D_ζ besitzt; aber auch die Umkehrung ergibt sich leicht: Jede F^3 mit 3 Doppelpunkten wird aus deren 3 Verbindungslinien durch 3 trilineare Ebenenbüschel projectirt. Die Construction in § 3. 6) auf unseren Fall angewandt, liefert die lineare Lösung der Aufgabe: Eine F^3 mit 3 Doppelpunkten zu construiren, wenn die 3 Doppelpunkte und 7 einfache Punkte gegeben sind. Ist die Ebene $D_\xi D_\eta D_\zeta$ als Ebene des Büschels Ξ durch α , als solche von H, Z resp. durch β, γ bezeichnet, so gilt: Die Tangentialkegel in den 3 Doppelpunkten werden erzeugt von denjenigen 3 Paaren projectiver Ebenenbüschel, welche den 3 Ebenen α, β, γ in Bezug auf die trilineare Beziehung zugeordnet sind; sie sind linear construierbar.

Ferner folgt: Die Ebenen α', β', γ' , welche die Ebenenpaare $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$ zu einem Tripel der trilinearen Beziehung ergänzen, schneiden die F^3 in den resp. Geraden g_ξ, g_η, g_ζ zweifach, und noch in je einer weiteren Geraden $g_{\alpha'}, g_{\beta'}, g_{\gamma'}$; diese 3 linear construierbaren Geraden $g_{\alpha'}, g_{\beta'}, g_{\gamma'}$ sind die einzigen Geraden der F^3 , welche die Doppelpunkte nicht enthalten. Die 6 Geraden schliesslich, welche — abgesehen von g_ξ, g_η, g_ζ — einen Doppelpunkt enthalten, werden durch die singulären Ebenenpaare der trilinearen Beziehung — mittelst einer quadratischen Construction — erhalten; also gilt: Sind 7 einfache Punkte und 3 Doppelpunkte der F^3 gegeben, so sind alle 12 Geraden der F^3 mit Zirkel und Lineal construierbar. — Den Fall, dass die 3 Doppelpunkte theilweise oder sämmtlich biplanar werden, kann man dadurch hervorrufen, dass man die 3 coincidenten Ebenen α, β, γ

theilweise oder sämmtlich zu singulären Ebenen der trilinearen Beziehung wählt, jedoch so, dass niemals 2 dieser 3 Ebenen ein singuläres Paar bilden. —

6) Machen wir — unter Beibehaltung aller früheren Bezeichnungen — noch die weitere Specialisirung, dass wir die trilineare Beziehung *singulär* annehmen, so folgt analog, wie § 4. 2), dass der Schnittpunkt der 3 singulären Ebenen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ein vierter Doppelpunkt wird, also gilt: *Drei singulär-trilineare Ebenenbüschel, deren Axen in derselben Ebene liegen, erzeugen eine F^3 mit 4 Doppelpunkten, und zwar werden diese Doppelpunkte gebildet durch die 3 Schnittpunkte der 3 Axen, und durch den Schnittpunkt der 3 singulären Ebenen.* Ebenso gilt umgekehrt: *Jede F^3 mit 4 Doppelpunkten wird aus 3 in einer Ebene gelegenen Verbindungslinien je zweier Doppelpunkte durch 3 singulär-trilineare Ebenenbüschel projicirt.* Die früher gelöste Aufgabe § 3. 7) führt zur linearen Construction einer F^3 mit 4 Doppelpunkten aus diesen 4 Doppelpunkten und 3 einfachen Punkten. Auch die sämmtlichen Geraden der Fläche sind linear construierbar, wenn die 4 Doppelpunkte und 3 einfache Punkte gegeben sind; denn abgesehen von den 6 Verbindungslinien zweier Doppelpunkte, sind hier nur die 3 Geraden $g_{\alpha'}, g_{\beta'}, g_{\gamma'}$ vorhanden, welche dieselbe Bedeutung haben, wie die gleichbezeichneten Geraden im vorigen Falle. — Da jeder in einem singulären Tripelfelde enthaltenen R^1_T das singuläre Tripel angehört, so erhalten wir den Satz: *Jede R^3 auf einer F^3 mit 4 Doppelpunkten, welche 3 der Doppelpunkte enthält, enthält auch den 4^{ten}.* Es ergiebt sich übrigens unschwer, dass andere R^3 auf der F^3 , als durch die 4 Doppelpunkte, nicht existiren. —

7) *Das Erzeugniss dreier singulär-trilinearer Ebenenbüschel, bei welchen sich die 3 Ebenen des singulären Tripels in einer Geraden schneiden; die Regelfläche III. O.* Wir wählen nunmehr die Axen g_ξ, g_η, g_ζ wieder zu einander windschief, jedoch sei die trilineare Beziehung eine *singuläre* und zwar so, dass sich die 3 singulären Ebenen α, β, γ in einer Geraden d schneiden. Das Erzeugniss dieser Beziehung ist wieder eine F^3 , welche jedoch die Gerade d zur *Doppelgeraden* hat, also eine *cubische Regelfläche**). In der That ist jeder Punkt von d ein Doppelpunkt, denn jede Gerade durch ihn schneidet die F^3 nur noch in einem weiteren Punkt, was man genau, wie in § 4. 2), erkennt. Auch gilt umgekehrt: *Jede cubische Regelfläche wird aus 3 windschiefen Erzeugenden durch 3 singulär-trilineare Ebenenbüschel projicirt, deren 3 singuläre Ebenen sich in der Doppelgeraden schneiden.* — Diejenigen Ebenentripel ξ, η, ζ , welche sich in einer Geraden schneiden, bilden eine R^1_T , welche mit dem die F^3 erzeugenden singulären Tripelfeld

*) cf. Salmon-Fiedler: *Analyt. Geometrie des Raumes*, III. Aufl. II. Bd., p. 365.

das singuläre Tripel α, β, γ und folglich (nach § 2. 5) nur noch ein weiteres Tripel gemein hat, die Schnittgerade l der Ebenen dieses Tripels ist die *Leitgerade* der Regelfläche. Die *Erzeugenden* der Regelflächen ergeben sich aus denjenigen R_T^1 , welche die beiden Tripel α, β, γ und $(g_\xi l), (g_\eta l), (g_\zeta l)$ enthalten, und dem die F^3 erzeugenden singulären Tripelfeld angehören; diese R_T^1 bilden eine einfache Mannigfaltigkeit, eine jede derselben erzeugt durch die Schnittpunkte der Ebenen ihrer Tripel eine Erzeugende der Regelfläche. Somit ergibt sich: *Kennt man von einer cubischen Regelfläche 3 Punkte, 3 windschiefe Erzeugende und die Doppelgerade, so kann man nach § 3 linear construiren alle Punkte der Fläche, die Leitgerade und alle Erzeugenden.*

Anmerkung: Die cubische Regelfläche wird auch erzeugt durch 3 trilineare Ebenenbüschel, von denen 2 dieselbe Axe haben, doch ergibt sich, dass diese Erzeugung im Wesentlichen mit der von Herrn E. Weyr *) ausführlich behandelten Erzeugung durch ein-zwei-deutige Ebenenbüschel identisch ist.

8) Das *Erzeugniss dreier trilineararer Ebenenbüschel, deren Axen sich in einem Punkte schneiden*; Kegel III. O. Sind Ξ, H, Z 3 trilineare Ebenenbüschel, deren Axen g_ξ, g_η, g_ζ sich in einem Punkte D schneiden, denn wird auch in diesen Falle eine F^3 erzeugt; die Ebenen ξ durch g_ξ schneiden aber offenbar diese F^3 ausser in g_ξ noch in zwei Geraden g, g' ; mithin ist D so beschaffen, dass jede durch ihn gehende Gerade entweder der F^3 angehört, oder sie in keinem weiteren Punkte schneidet; also ist D ein *dreifacher Punkt* und die erzeugte F^3 ein Kegel III. O.

Ist die trilineare Beziehung eine singuläre und zwar so, dass die 3 singulären Ebenen sich in einer Geraden schneiden, so erhalten wir auf diesem Wege den Kegel III. O. mit einer Doppelgeraden. —

9) Auch alle *reduciblen* F^3 lassen sich durch 3 trilineare Ebenenbüschel erzeugen; hier sei nur erwähnt eine Erzeugung der in eine Ebene und eine Fläche II. Ordnung ausgearteten F^3 , welche eine sehr verwendbare Erzeugung der Flächen II. O. liefert, und unmittelbar zu deren Construction aus 9 ihrer Punkte hinführt**). Schneiden sich nämlich die 3 Axen g_ξ, g_η, g_ζ paarweise in den 3 Punkten

$$D_\xi = (g_\eta g_\zeta), \quad D_\eta = (g_\xi g_\zeta), \quad D_\zeta = (g_\xi g_\eta),$$

und ist die Ebene $D_\xi D_\eta D_\zeta$ als Ebene von Ξ durch α , als solche von H, Z durch β, γ bezeichnet, und betrachtet man eine trilineare Beziehung der 3 Ebenenbüschel Ξ, H, Z , welcher das Tripel α, β, γ

*) cf. E. Weyr: Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-zwei-deutiger Gebilde, insbesondere der Regelflächen III. O. Leipzig 1870.

**) Herr Le Paige hat in seinen Arbeiten über die Homographie III. O. mehrfach diese Erzeugung verwendet, cf. unter Anderem Bulletin de l'académie de Belgique III. Ser. Tom. 5. 1883.

angehört, so wird die durch die trilineare Beziehung erzeugte F^3 in die Ebene $(g_\xi g_\eta g_\zeta)$ und eine Fläche II. O. zerfallen, welche die Punkte D_ξ, D_η, D_ζ enthält. Andererseits gilt auch umgekehrt: Jede Fläche II. O. wird aus den 3 Verbindungslinien von 3 ihrer Punkte durch 3 trilineare Ebenenbüschel projicirt. Daraus folgt nun ganz unmittelbar eine Construction der F^2 aus 9 ihrer Punkte $D_\xi, D_\eta, D_\zeta; P_1, P_2, \dots, P_6$; denn die F^2 erzeugende trilineare Beziehung der 3 Ebenenbüschel

$$g_\xi = (D_\eta D_\zeta), \quad g_\eta = (D_\zeta D_\xi), \quad g_\zeta = (D_\xi D_\eta)$$

ist vollständig bestimmt durch die 7 bekannten Tripel

$$(g_\xi P_i), (g_\eta P_i), (g_\zeta P_i) \quad (i=1, 2, \dots, 6)$$

und $(g_\xi D_\xi), (g_\eta D_\eta), (g_\zeta D_\zeta)$, und damit ist die Construction der F^2 zurückgeführt auf die von uns geleistete Construction der trilinearen Beziehung aus 7 gegebenen Tripeln (cf. § 3. 6). — Die Geraden der F^2 ergeben sich aus denjenigen R_T^1 , welche dem die F^2 erzeugenden Tripelfeld angehören, und das Tripel α, β, γ enthalten. Die gesammte Theorie der auf der F^2 enthaltenen Geraden folgt dann unmittelbar aus den § 2. 2) entwickelten Sätzen. —

Breslau, im November 1893.