Ueber das bifocal-veränderliche System.

Von

L. BURMESTER in Dresden.

(Mit 2 lithogr. Tafeln.)

I. Die bifocale Verwandtschaft.

Von den mannigfaltigen Verwandtschaften, welche bei geometrischen Untersuchungen auftreten, sind bis jetzt vorzugsweise nur die projectivischen Verwandtschaften behandelt worden, und nicht-eindeutige Beziehungen ebener Systeme sind fast ohne Beachtung geblieben; desshalb wollen wir hier eine zwei-zweideutige Verwandtschaft untersuchen, welche als veränderlich betrachtet durch den einfachsten Mechanismus in der Praxis hergestellt werden kann, und deren interessante Grundbeziehungen C. G. J. Jacobi aphoristisch in einem an J. Steiner gerichteten Brief*) erwähnt.

Sind in einem ebenen System Σ_1 (Fig. 1. Taf. I.) zwei Punkte Φ_1, Ψ_1 und in einem zweiten ebenen System Σ_2 zwei Punkte Φ_2, Ψ_2 gegeben, sind ferner zwei entsprechende Punkte P_1, P_2 dieser Systeme so bestimmt, dass die Gleichungen

$$\Phi_1 P_1 = \Phi_2 P_2, \quad \Psi_1 P_1 = \Psi_2 P_2$$

bestehen, dann wollen wir die beiden hierdurch definirten Systeme Σ_1, Σ_2 *bifocale Systeme* und die Punkte Φ_1, Ψ_1 beziehlich Φ_2, Ψ_2 die *Focalpunkte* derselben nennen. Hiernach entsprechen einem Punkt P_1 in Σ_1 , so wie dem Punkte Q_1 dieses Systems, der bezüglich der Focalgeraden Φ_1, Ψ_1 zu P_1 symmetrisch liegt, zwei zur Focalgeraden Φ_2, Ψ_2 symmetrisch liegende Punkte P_2, Q_2 in Σ_2 und umgekehrt entspricht jedem der Punkte P_2, Q_2 in Σ_2 das Punktpaar P_1, Q_1 in Σ_1 . Die durch dieses besondere zwei-zweideutige Entsprechen bedingte Beziehung

*) Crelle's Journal Bd. XII, S. 137. Jahrg. 1834. Eine andere hierauf bezügliche Mittheilung findet sich in: C. G. J. Jacobi's Mathematischen Werken Bd. III, S. 402.

kann man mit Herrn R. Heger*) passend als *paarverwandt* bezeichnen und demnach stehen die bifocalen Systeme in einer besonderen Paarverwandtschaft.

Construiren wir in Fig. 2. die Ellipse e_1 , deren Brennpunkte die Focalpunkte $\Phi_1 \Psi_1$ des Systems Σ_1 sind, und deren Hauptaxe $H_1 J_1 = \Phi_2 \Psi_2$ ist, so erkennen wir, dass jedem Punkte der Strecke $H_2 J_2$ im System Σ_2 , welche gleich $\Phi_1 \Psi_1$ ist und zwischen $\Phi_2 \Psi_2$ symmetrisch liegt, zwei zur Axe $H_1 J_1$ symmetrisch liegende Punkte der Ellipse e_1 in Σ_1 entsprechen. Construiren wir anderseits die Hyperbel h_2 , deren Brennpunkte die Focalpunkte $\Phi_2 \Psi_2$ des Systems Σ_2 sind und deren Hauptaxe $H_2 J_2 = \Phi_1 \Psi_1$ ist, so ersehen wir, dass jedem nicht zwischen $H_1 J_1$ liegenden Punkt auf der durch $\Phi_1 \Psi_1$ gehenden Geraden in Σ_1 zwei zur Axe $H_2 J_2$ symmetrisch liegende Punkte der Hyperbel h_2 in System Σ_2 entsprechen. Die Ellipse e_1 scheidet das System Σ_1 und die Hyperbel h_2 das System Σ_2 in zwei Gebietstheile, und wir wollen in beiden Systemen den Gebietstheil, der die Focalpunkte enthält, das imaginäre Gebiet und den anderen das reelle Gebiet nennen; denn es giebt nur zu den im reellen Gebiet des Systems Σ_1 liegenden Punkten entsprechende reelle Punkte in System Σ_2 und umgekehrt. Für den in Fig. 2. angenommenen Fall ist $\Phi_1 \Psi_1 < \Phi_2 \Psi_2$ und demnach ist der reelle Gebietstheil in Σ_1 elliptisch, in Σ_2 hyperbolisch umgrenzt, wenn aber $\Phi_1 \Psi_1 > \Phi_2 \Psi_2$ ist, dann ist umgekehrt der reelle Gebietstheil in Σ_1 hyperbolisch und in Σ_2 elliptisch umgrenzt.

Um die entsprechenden Punkte P_1, P_2 in den beiden bifocalen Systemen Σ_1, Σ_2 beziehungsweise durch rechtwinkelige Coordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 zu bestimmen, nehmen wir in Fig. 1. die Mittelpunkte O_1, O_2 der Focalstrecken $\Phi_1 \Psi_1, \Phi_2 \Psi_2$, deren Längen wir resp. mit $2\lambda_1, 2\lambda_2$ bezeichnen, als Coordinatenanfang und die Verbindungsgerade der Focalpunkte in den Systemen als x -Axe, dann ergibt sich aus den Grundgleichungen

$$\Phi_1 P_1 = \Phi_2 P_2, \quad \Psi_1 P_1 = \Psi_2 P_2,$$

$$(1) \quad (\lambda_1 + x_1)^2 + y_1^2 = (\lambda_2 + x_2)^2 + y_2^2,$$

$$(2) \quad (\lambda_1 - x_1)^2 + y_1^2 = (\lambda_2 - x_2)^2 + y_2^2.$$

Aus diesen Gleichungen der Bifocalität der beiden Systeme Σ_1, Σ_2 erhalten wir durch Subtraction und Addition die beiden folgenden äquivalenten Gleichungen

$$(3) \quad \lambda_1 x_1 = \lambda_2 x_2,$$

$$(4) \quad x_1^2 + y_1^2 + \lambda_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + \lambda_2^2,$$

*) R. Heger, Bemerkungen über zwei-zweideutige Verwandtschaft. Zeitschrift für Math. u. Physik. Bd. XVII. S. 71.

und weiter ergeben sich durch Elimination die Werthe

$$(5) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_2, \\ y_1 = \sqrt{x_2^2 \left(1 - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right) + y_2^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2}; \end{cases}$$

$$(6) \quad \begin{cases} x_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} x_1, \\ y_2 = \sqrt{x_1^2 \left(1 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}\right) + y_1^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2}. \end{cases}$$

Um uns die Beziehungen der durch diese Formeln bestimmten bifocalen Systeme Σ_1 , Σ_2 anschaulicher darzustellen, nehmen wir in Fig. 2. die Ebene des Systems Σ_2 als Aufrissebene, eine zu $H_2 J_2$ parallele Gerade $\mathfrak{M}$ als Projectionsaxe und construiren in der Grundriss-ebene ein System Σ_I , welches dem System Σ_1 ähnlich ist, so dass die Ellipsenaxe $H_I J_I$, welche der Ellipsenaxe $H_1 J_1$ entspricht, gleich und parallel der Hyperbelaxe $H_2 J_2$ ist und senkrecht unter dieser liegt. Wir beziehen die Punkte des Systems Σ_I auf die rechtwinkligen Coordinaten x_I, y , deren positive Axenrichtungen beziehlich $O_I, J_I, O_I O_2$ sind, und ferner die Punkte des Systems Σ_2 auf rechtwinklige Coordinaten x_{II}, z , deren positive Axenrichtungen resp. $O_2 J_2, O_2 Z$ sind. Da $H_1 J_1 = 2\lambda_1$ und $H_I J_I = 2\lambda_1$ ist, so verhalten sich die Coordinaten entsprechender Punkte der ähnlichen Systeme Σ_1, Σ_I wie $\lambda_2 : \lambda_1$, und demnach ist

$$x_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_I, \quad y_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} y.$$

Setzen wir in eine der beiden ersten Fundamentalgleichungen z. B. in (1) statt x_2, y_2 beziehlich x_{II}, z , so erhalten wir

$$(\lambda_1 + x_1)^2 + y_1^2 = (\lambda_2 + x_{II})^2 + z^2,$$

und in diese Gleichung die Werthe für x_1, y_1 gesetzt ergibt sich:

$$\left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_I\right)^2 - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2 y^2 = (\lambda_2 + x_{II})^2 + z^2.$$

Wenn wir nun $x_I = x_{II} = x$ setzen, so können wir $x y z$ als die drei im Raume rechtwinkligen Coordinaten eines Raumpunktes betrachten und dann folgt aus dieser Gleichung

$$\frac{x^2}{\lambda_1^2} + \frac{y^2}{\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} - \frac{z^2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} = 1,$$

welche ein einschaliges Hyperboloid repräsentirt, dessen drei Halbaxen resp. die Länge $\lambda_1, \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sqrt{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}, \sqrt{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}$ besitzen. Dieselbe Hyperboloidgleichung würden wir selbstverständlich auch erhalten,

wenn wir statt der Gleichung (1) die zweite Fundamentalgleichung (2) benutzt hätten. Hiernach ergibt sich der für die Folge wichtige fundamentale Satz:

Das System Σ_1 , welches dem System Σ_1 ähnlich ist, kann als Grundrissprojection und das System Σ_2 , welches dem System Σ_1 bifocal ist, als Aufrissprojection der Punkte eines einschaligen Hyperboloids betrachtet werden, von dem zwei Axen beziehlich auf den Projectionsebenen senkrecht sind.

In demselben Sinne wie die Projectionen von einem Punkte des Hyperboloids zweideutig sind, sind es hiernach auch die bifocalen Systeme Σ_1 , Σ_2 . Wenn eine Curve n^{ten} Grades in der einen Projectionsebene gegeben ist, so können wir diese Curve als die Directrix einer zu dieser Projectionsebene senkrechten Cylinderfläche betrachten und diese liefert mit dem Hyperboloid eine Durchdringungscurve, deren andere Projection vom $2n^{\text{ten}}$ Gerade ist und zur betreffenden Focalgeraden symmetrisch liegt. Hiernach ergibt sich der Satz:

Einer Curve n^{ten} Grades in dem einen zweier bifocaler Systeme entspricht eine Curve $2n^{\text{ten}}$ Grades in dem anderen, welche zur Focalgeraden symmetrisch liegt.

Und hieraus folgt der specielle Satz:

Einer Geraden in dem einen zweier bifocaler Systeme entspricht ein Kegelschnitt in dem anderen System, dessen eine Axe in der Focalgeraden liegt.

Hierbei ist jedoch zu beachten, dass nur den Punkten, welche innerhalb des reellen Gebietes des einen Systems sich befinden, reelle Punkte im anderen System entsprechen. Nehmen wir in der einen Projectionsebene einen Kegelschnitt an, der den Contourkegelschnitt in zwei reellen oder imaginären Punkten berührt, dann zerfällt die genannte Durchdringungscurve in zwei Kegelschnitte, deren Projectionen in der anderen Projectionsebene den Contourkegelschnitt in zwei reellen oder imaginären Punkten berühren.

Die Gleichung einer Schnittebene, welche der Projectionssaxe $\mathfrak{A}$ parallel ist und mit den beiden Projectionsebenen einen Winkel von 45° bildet, ist

$$y + z = a \quad (x \text{ beliebig})$$

und die Gleichung des Hyperboloids, wenn wir der Abkürzung wegen $\lambda_2^2 - \lambda_1^2 = \varepsilon^2$ setzen

$$\frac{x^2}{\lambda_1^2} + \frac{\lambda_2^2 y^2}{\lambda_1^2 \varepsilon^2} - \frac{z^2}{\varepsilon^2} = 1.$$

Je nachdem wir aus diesen beiden Gleichungen y oder z eliminieren, erhalten wir beziehlich die Gleichungen:

$$x^2 + z^2 - 2 \frac{a \lambda_2^2}{\varepsilon^2} z + \frac{a^2 \lambda_2^2 - \varepsilon^2 \lambda_1^2}{\varepsilon^2} = 0,$$

$$x^2 + y^2 + 2 \frac{a \lambda_1^2}{\varepsilon^2} y + \frac{a^2 \lambda_1^2 - \varepsilon^2 \lambda_2^2}{\varepsilon^2} = 0,$$

welche Kreise repräsentiren; und diese Kreise berühren als Projectionen des Schnittes, den die unter 45° gegen die Projectionsebenen geneigte zur Projectionsebene parallele Ebene mit dem Hyperboloid bildet, beziehlich die Contourkegelschnitte in zwei reellen oder imaginären Punkten, deren Verbindungssehnen der Projectionsebene parallel sind. Die beiden Kreise haben gleichen Radius und einer Punktreihe auf dem einem entspricht als Projection eine congruente Punktreihe auf dem anderen. Hieraus ergibt sich in umgekehrter Fassung der Satz:

Jedem Kreis, der in dem reellen Gebiet eines zweier bifocaler Systeme Σ_1, Σ_2 liegend den Contourkegelschnitt in zwei Punkten berührt, entsprechen in dem anderen System zwei zur Focalgeraden symmetrisch liegende Kreise, welche den Contourkegelschnitt in zwei Punkten berühren; und die entsprechenden Punktreihen auf den Kreisen sind ähnlich.

Bei dem Entsprechen der Punkte in den bifocalen Systemen ist stets zu beachten, dass nur den Punkten einer Curve, welche in dem reellen Gebiet des Systems liegen, reelle Punkte in dem anderen System entsprechen, und wenn wir daher in der Folge sagen, dass einer Curve c_1 in dem einen System wieder eine Curve c_2 entspricht, so wollen wir nur den im reellen Gebiet befindlichen Theil der Curve c_1 als in Betracht gezogen voraussetzen. In dieser Hinsicht ergeben sich aus den Gleichungen (3), (4) S. 90, wie man leicht ersieht, die Sätze:

Jedem Kreis, dessen Mittelpunkt die Mitte der Focalstrecke in dem einen bifocalen System ist, entspricht ein derartiger Kreis in dem anderen System.

Jedem Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Focalgeraden in dem einen bifocalen System liegt, entspricht ein derartiger Kreis in dem anderen System.

Jeder Geraden, welche auf der Focalgeraden in dem einen bifocalen System senkrecht steht, entspricht eine derartige Gerade in dem anderen System.

Betrachten wir in einer Projectionsebene eine Tangente t_1 (Fig. 2.) des Contourkegelschnittes als Spur einer auf dieser Projectionsebene senkrechten Ebene, so schneidet diese Ebene das Hyperboloid in zwei Geraden, deren Projectionen t_2, t_2' in der zweiten Projectionsebene symmetrisch zur Focalgeraden liegende Tangenten an den betreffenden Contourkegelschnitt sind.

Hiernach entsprechen der Tangente t_1 in Σ_1 (Fig. 2.) an dem Contour-

kegelschnitt die beiden Tangenten t_2, t_2' im System Σ_2 an den betreffenden Contourkegelschnitt. Dem Berührungspunkt A_1 in Σ_1 entspricht in Σ_2 der auf $\Phi_2 \Psi_2$ liegende Punkt A_2 und dem Berührungspunkt B_2 in Σ_2 entspricht in Σ_1 der auf $\Phi_1 \Psi_1$ liegende Punkt B_1 . Machen wir auf der Geraden $\Psi_1 A_1$ die Strecke $\Psi_1 \Phi' = \Psi_2 \Phi_2$ und denken wir uns das System Σ_2 mit seinen Focalpunkten $\Phi_2 \Psi_2$ beziehlich nach $\Phi' \Psi_1$ verlegt, dann fällt, weil $\Psi_1 A_1 = \Psi_2 A_2$ ist, der Punkt A_2 mit A_1 zusammen; da ferner $\Psi_1 \Phi' = \Psi_2 \Phi_2 = H_1 J_1$ ist, so ist auch $A_1 \Phi_1 = A_1 \Phi'$ und demnach steht die Ellipsentangente t_1 auf $\Phi_1 \Phi'$ in der Mitte senkrecht. Bei der Verlegung des Systems Σ_2 fällt dann auch ein beliebig auf t_2 angenommener Punkt C_2 , der dem Punkte C_1 in Σ_1 entspricht, mit diesem zusammen, denn es ist $\Phi_2 C_2 = \Phi_1 C_1 = \Phi' C_1$ und $\Psi_2 C_2 = \Psi_1 C_1$. Hiernach ergibt sich der Satz:

Einer Punktreihe auf einer Tangente an dem Contourkegelschnitt in dem einen der beiden bifocalen Systeme entsprechen im anderen System auf zwei symmetrisch zur Focalgeraden liegenden Tangenten des Contourkegelschnittes congruente Punktreihen.

Betrachten wir in Fig. 3. zwei in einer Ebene liegende bifocale Systeme Σ_1, Σ_2 , deren Focalpunkte beziehlich $\Phi_1 \Psi_1$ und $\Phi_2 \Psi_2$ sind, so ist der Schnittpunkt $\mathfrak{P}$ der resp. in den Mitten μ_ϕ, μ_ψ von $\Phi_1 \Phi_2$ und $\Psi_1 \Psi_2$ errichteten Senkrechten, der einzige reelle selbstentsprechende Punkt der beiden bifocalen Systeme Σ_1, Σ_2 . Ziehen wir von $\mathfrak{P}$ die Tangente t_1 an die Contourellipse e_1 in Σ_1 , so entspricht dieser einerseits die von $\mathfrak{P}$ an die Contourhyperbel h_2 in Σ_2 gezogene Tangente t_2 und die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte dieser Tangenten t_1, t_2 sind parallel. Dem Berührungspunkt A_1 auf t_1 entspricht der Schnittpunkt A_2 , den t_2 mit $\Phi_2 \Psi_2$ bildet, und analog entspricht dem Berührungspunkt B_2 auf t_2 der Schnittpunkt B_1 von t_1 und $\Phi_1 \Psi_1$. In gleicher Weise entsprechen sich die von $\mathfrak{P}$ ausgehenden Tangenten t_1, t_2 und auf diesem den Punkten $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1$ resp. die Punkte $\mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2$.

Einer Tangente τ_1 in Σ_1 , welche die Ellipse e_1 in einem Punkt Γ_1 berührt und $\Phi_1 \Psi_1$ in einem Punkt Δ_1 schneidet, entsprechen in Σ_2 die beiden zu $\Phi_2 \Psi_2$ symmetrisch liegenden Tangenten $\tau_2 \tau_2'$, welche die Hyperbel h_2 beziehlich in den Punkten $\Delta_2 \Delta_2'$ berühren und $\Phi_2 \Psi_2$ in Γ_2 treffen. Da nun einer Punktreihe auf τ_1 congruente Punktreihen auf τ_2 und τ_2' entsprechen, so giebt es für die congruenten Punktreihen auf $\tau_1 \tau_2$ einen Drehpol, den Schnittpunkt der in den Mitten auf $\Gamma_1 \Gamma_2$ und $\Delta_1 \Delta_2$ errichteten Senkrechten; ebenso giebt es für $\tau_1 \tau_2'$ einen Drehpol, den Schnittpunkt der in den Mitten auf $\Gamma_1 \Gamma_2$ und $\Delta_1 \Delta_2'$ errichteten Senkrechten. Rücken die Focalpunkte $\Phi_1 \Phi_2$ so wie $\Psi_1 \Psi_2$ unendlich nahe zusammen, dann zieht sich Ellipse e_1 wie die Hyperbel h_2 in die Focalgerade zusammen und die Gesamtheit der Tangenten

an je einem dieser Kegelschnitte wird durch zwei Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte die Focalpunkte sind, repräsentirt. Nach dem ersten Satze auf S. 93 entspricht einer Punktreihe auf einem Kreise, der im reellen Gebiet von Σ_1 liegend die Ellipse e_1 zweimal berührt, einerseits eine ähnliche Punktreihe auf einem Kreise, der im reellen Gebiet von Σ_2 liegend die Hyperbel h_2 zweimal berührt; wenn aber die Focalpunkte $\Phi_1 \Phi_2, \Psi_1 \Psi_2$ beziehlich unendlich nahe an einander rücken, dann bildet die Gesamtheit dieser Kreise, welche je einen dieser Kegelschnitte berühren, ein Kreisbüschel, dessen Grundpunkte die Focalpunkte sind.

Um in einem Bilde beispielsweise die Deformation von Kreisen zu zeigen, welche in drei durch die Focalstrecken $\Phi_1 \Psi_1 < \Phi_2 \Psi_2 < \Phi_3 \Psi_3$ in Fig. 4^a, 4^b, 4^c gegebenen bifocalen Systemen $\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3$ auftritt, haben wir in Σ_1 drei in 16 gleiche Theile getheilte Kreise $K_1 K_1' K_1''$ gezeichnet, welche bezüglich des Systems Σ_3 im reellen Gebiete von Σ_1 liegen. Die Mittelpunkte dieser Kreise haben wir der Symmetrie wegen auf der Geraden angenommen, welche in der Mitte O_1 der Focalstrecke $\Phi_1 \Psi_1$ auf dieser senkrecht steht. Von diesen Kreisen berühren $K_1' K_1''$ zweimal die nicht gezeichnete elliptische Gebietsgrenze, welche in Σ_1 durch das System Σ_3 bestimmt ist, und zwar hat K_1' die besondere Lage, dass sein Mittelpunkt mit O_1 zusammenfällt. Die Theilpunkte dieser Kreise denken wir uns sämmtlich durch starre Strecken gelenkartig, beziehlich mit den Punkten $\Phi_1 \Psi_1, \Phi_2 \Psi_2, \Phi_3 \Psi_3$ verbunden, wie dies z. B. für die entsprechenden Punkte 14₁'', 14₂'', 14₃'', schematisch angedeutet ist. Hiernach verwandelt sich der Kreis K_1 mechanisch in die Curven K_2, K_3 , wenn die Focalstrecke $\Phi_1 \Psi_1$ resp. in $\Phi_2 \Psi_2, \Phi_3 \Psi_3$ übergeht; ferner verwandelt sich der Kreis K_1' zuerst in die Curvenstücke K_1', k_2' , dann in die Kreisstücke K_3', k_3', κ_3' und die Punktreihen auf denselben sind mit den entsprechenden auf K_1' gleich- und ungleich-liegend ähnlich. Der dritte Kreis K_1'' in Σ_1 geht erst in den Kreis K_2'' , dessen Mittelpunkt O_2 ist, dann in den Kreis K_3'' , dessen Mittelpunkt O_3 ist, über, und die entsprechenden Punktreihen auf K_1'' und K_3'' sind ähnlich. Für die Bestimmung der Tangente an einen Punkt der bifocalen Curven K_2 oder K_3 , welche dem Kreis K_1 entsprechen, hat Somoff in seiner Kinematik*) eine einfache Construction mitgetheilt.

II. Der Geschwindigkeitszustand eines bifocal-veränderlichen Systems.

Ein ebenes System, welches sich derart ändert, dass alle Phasen desselben entsprechende bifocale Systeme sind, nennen wir ein *bifocal-*

*) Somoff, Theoretische Mechanik, I. Th. (Kinematik). S. 116. Deutsch von Ziwet. 1878.

veränderliches System. Die Bewegung dieses veränderlichen ebenen Systems in einer festen Ebene ist durch die Bewegung der beiden Focalpunkte in dieser festen Ebene bestimmt. Nehmen wir an, die Focalpunkte $\Phi \Psi$ des bifocal-veränderlichen Systems bewegen sich beziehlich auf den in der festen Ebene gegebenen Curven φ und ψ Fig. 5, Taf. II. und ihre Geschwindigkeiten seien in einer Phase Σ_u des veränderlichen Systems Σ resp. v_φ, v_ψ , welche wir in die Richtung der Curventangenten auftragen, so dass $\Phi_u \Phi_\varphi = v_\varphi, \Psi_u \Psi_\psi = v_\psi$ ist. Ziehen wir nun die auf den Geschwindigkeitsrichtungen senkrechten Curvennormalen $\Phi_u \mathfrak{P}_u, \Psi_u \mathfrak{P}_u$, die sich in dem Punkt $\mathfrak{P}_u$ schneiden, so bleibt dieser Punkt $\mathfrak{P}_u$ als Systempunkt betrachtet während einer unendlich kleinen Zeit in Ruhe und seine Geschwindigkeit ist also momentan gleich null.

Um die Geschwindigkeit $A_u A_v = v_a$ eines beliebigen Systempunktes A_u in Phase Σ_u zu erhalten, haben wir zu beachten, dass $\Phi_u A_u$ und $\Psi_u A_u$ starre Strecken sind, deren Länge sich also nicht ändert; folglich müssen auch die in der Geraden $\Phi_u A_u$ liegenden Geschwindigkeitscomponenten $\Phi_u \Phi_\varphi$ und $A_u A_\varphi$, welche wir erhalten, wenn wir $\Phi_\varphi \Phi_\varphi$ und $A_v A_\varphi$ senkrecht auf $\Phi_u A_u$ ziehen, gleich und gleich gerichtet sein. In gleicher Weise ergibt sich, dass auch in der Geraden $\Psi_u A_u$ die beiden Componenten $\Psi_u \Psi_\psi$ und $A_u A_\psi$ gleich sein müssen. Hiernach erhalten wir die folgende einfache constructive Bestimmung der Geschwindigkeit eines Systempunktes A_u . Wir fällen von den Endpunkten Φ_φ, Ψ_ψ der Geschwindigkeiten der Focalpunkte Φ_u, Ψ_u beziehlich auf $\Phi_u A_u, \Psi_u A_u$ Senkrechte, deren Fusspunkte Φ^φ, Ψ^ψ sind, machen in gleichem Sinne $A_u A^\varphi = \Phi_u \Phi^\varphi$ und ferner $A_u A^\psi = \Psi_u \Psi^\psi$, ziehen $A^\varphi A_v$ senkrecht $\Phi_u A_u$ und $A^\psi A_v$ senkrecht $\Psi_u A_u$, dann ist der Schnittpunkt A_v dieser Senkrechten der Endpunkt der Geschwindigkeit v_a des Systempunktes A_u in der Systemphase Σ_u , und die Gerade $A_u A_v$ ist zugleich die Tangente in A_u an der Bahncurve, welche dieser Systempunkt A_u während der Bewegung des bifocal-veränderlichen Systems beschreibt. Den Endpunkt A_v dieser Geschwindigkeit erhalten wir auch, wenn wir in Fig. 5. die Strecke $A_u A_\varphi \# \Phi_u \Phi_\varphi$ und $A_u A_\psi \# \Psi_u \Psi_\psi$ machen, und $A_\varphi A_v \perp \Phi_u A_u, A_\psi A_v \perp \Psi_u A_u$ ziehen. Diese einfache constructive Bestimmung der Geschwindigkeit eines beliebigen Systempunktes wurde laut einer mündlichen Mittheilung von meinem Collegen Herrn O. Mohr mittelst des Principes der virtuellen Geschwindigkeit abgeleitet. Sie wird für die Folge die Grundlage unserer weiteren Darlegungen bilden, und dieser Wichtigkeit wegen wollen wir noch eine zweite Begründung dieser Construction mittheilen. Wir nehmen an, die Focalpunkte Φ_1, Ψ_1 haben sich, Fig. 6., in einer unendlich kleinen Zeit resp. nach Φ_2, Ψ_2 bewegt, und ein Systempunkt A_1 sei in Folge dieser Bewegung nach

A_2 gelangt. Denken wir uns $\Phi_2 a_\varphi \neq \Phi_1 A_1$, ferner $\Psi_2 a_\psi \neq \Psi_1 A_1$ gezogen, so ist $\Phi_2 A_2 = \Phi_2 a_\varphi$ und $\Psi_2 A_2 = \Psi_2 a_\psi$. Der unendlich kleine um Φ_2 beschriebene Kreisbogen $a_\varphi A_2$ ist dann als gerade zu betrachten und im Punkte a^φ senkrecht auf $\Phi_1 A_1$; ebenso ist der unendlich kleine um Ψ_2 beschriebene Kreisbogen $a_\psi A_2$ als gerade anzusehen und im Punkte a^ψ senkrecht auf $\Psi_1 A_1$. Da die unendlich kleinen Strecken $A_1 a_\varphi, A_1 a_\psi$, welche resp. gleich $\Phi_1 \Phi_2, \Psi_1 \Psi_2$ sind, sich wie die Geschwindigkeiten v_φ, v_ψ der Focalpunkte Φ_1, Ψ_1 verhalten, so können wir uns das unendlich kleine Viereck $A_1 a_\varphi A_2 a_\psi$ ähnlich vergrößert denken, also wie in Fig. 5., $A_1 A_\varphi \neq v_\varphi, A_1 A_\psi \neq v_\psi$ machen und $A_\varphi A_\psi \perp \Phi_u A_u, A_\psi A_u \perp \Psi_u A_u$ ziehen.

Denken wir uns zu jedem Systempunkte des Systems Σ_u den entsprechenden Geschwindigkeitsendpunkt in der angegebenen Weise construirt, so bilden diese Geschwindigkeitsendpunkte ein ebenes System, welches wir mit Σ_v bezeichnen, und die zu der Systemphase Σ_u gehörende *Geschwindigkeitsphase* nennen wollen. Aus jener Construction folgt, dass jedem Systempunkte A_u in Σ_u mit Ausnahme der Focalpunkte eindeutig ein Punkt A_v in Σ_v entspricht.

Wenden wir die angegebene Construction in Fig. 7. auch auf die Focalpunkte, z. B. auf Φ , an, so müssen wir $\Phi A^\varphi = \Psi \Psi^\psi$ machen und in A^ψ auf $\Phi \Psi$ die Gerade φ_v senkrecht ziehen. Da der Punkt Φ durch unendlich viele Gerade mit sich selbst verbunden werden kann, so ziehen wir durch ihn eine beliebige Gerade f , fällen auf dieselbe von Φ_φ eine Senkrechte $\Phi_\varphi \Phi'_\varphi$, welche die Gerade φ_v im Punkt Φ'_φ schneidet. Hiernach liefert jede durch Φ gehende Gerade f einen zugehörigen Punkt Φ'_φ auf der Geraden φ_v und somit entsprechen dem Punkt Φ in geometrischer Hinsicht die Punkte der Geraden φ_v ; und in gleicher Weise ergibt sich, wenn wir $\Psi B^\psi = \Phi \Phi^\varphi$ machen, in B^φ auf $\Phi \Psi$ die Gerade ψ_v senkrecht ziehen, dass dem Punkt Ψ die Punkte der Geraden ψ_v entsprechen. Wir können aber die Focalpunkte $\Phi \Psi$, welche die bestimmten Geschwindigkeiten $\Phi \Phi_\varphi, \Psi \Psi_\psi$ besitzen, niemals als Punkte einer Phase des bifocal-veränderlichen Systems betrachten, weil sie selbst bei unendlich nahen Systemphasen in dem imaginären Gebiet liegen, welches von einer unendlich schmalen Ellipse oder Hyperbel umgrenzt wird, deren Brennpunkte diese Focalpunkte sind. Die elliptische Umgrenzung in der früheren Phase tritt ein, wenn die Focalstrecke in der späteren unendlich nahen Phase sich vergrößert, und die hyperbolische, wenn dieselbe sich verkleinert. Um die auf geometrischem Wege erhaltenen Beziehungen phoronomisch zu interpretiren, denken wir uns um die Focalpunkte unendlich kleine im reellen Gebiet liegende Halbkreise beschrieben, deren begrenzender Durchmesser auf der Focalgeraden senkrecht stehen, und betrachten die

Peripheriepunkte derselben als Systempunkte. Die durch Φ gehende Gerade f schneidet dann den um Φ beschriebenen unendlich kleinen Halbkreis in einem an Φ unendlich nahe gelegenen Systempunkt Φ^f , zu dem die mit $\Phi\Phi^f$ zusammenfallende Geschwindigkeit $\Phi^f\Phi^f$ gehört. Schneidet der über $\Phi\Phi_\varphi$ als Durchmesser beschriebene Kreis die Gerade φ_φ in zwei Punkten f', f'' , so fallen die Geschwindigkeitsrichtungen der, durch die Geraden $\Phi f', \Phi f''$ auf dem unendlich kleinen Halbkreis bestimmten Systempunkte beziehlich mit diesen Geraden zusammen. Für den anderen Focalpunkt Ψ tritt in unserer Figur dieser Fall nicht ein, weil der über $\Psi\Psi_\psi$ als Durchmesser beschriebene Kreis die Gerade ψ_ψ nicht schneidet.

Damit wir die gegenseitigen Beziehungen der beiden Systeme Σ_u und Σ_v leichter überschauen, wollen wir die Gleichungen ableiten, welche die Verwandtschaft dieser Systeme repräsentiren. Wir nehmen in einer Systemphase Σ , Fig. 8., die Focalgerade $\Phi\Psi$ als x -Axe, den Mittelpunkt O dieser Focalstrecke, welche gleich 2μ sein möge, als Koordinatenanfang, und bezeichnen die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen Systempunktes A mit x, y , und die des entsprechenden Geschwindigkeitsendpunktes A_v mit x_v, y_v . Ferner bezeichnen wir den Winkel, welchen die Geschwindigkeiten v_φ, v_ψ, v der Focalpunkte Φ, Ψ und des Systempunktes A mit der Geraden $\Phi\Psi$ bilden, resp. mit φ, ψ, α und die Winkel, welche die Geraden $\Phi A, \Psi A$ mit der Focalgeraden bilden, beziehlich mit α, β . Dann ist nach der constructiven Bestimmung des Geschwindigkeitsendpunktes A_v

$$v_\varphi \cos(\alpha - \varphi) = v \cos(\alpha - \alpha),$$

$$v_\psi \cos(\beta - \psi) = v \cos(\beta - \alpha),$$

und hieraus folgt

$$v_\varphi \cos \alpha \cos \varphi + v_\varphi \sin \alpha \sin \varphi = v \cos \alpha \cos \alpha + v \sin \alpha \sin \alpha,$$

$$v_\psi \cos \beta \cos \psi + v_\psi \sin \beta \sin \psi = v \cos \beta \cos \alpha + v \sin \beta \sin \alpha.$$

Bezeichnen wir der Kürze wegen die senkrechten Projectionen der Geschwindigkeiten v_φ, v_ψ auf die Focalgerade resp. mit v_φ', v_ψ' und die hierauf senkrechten Componenten beziehlich mit v_φ'', v_ψ'' , so ist

$$v_\varphi \cos \varphi = v_\varphi', \quad v_\psi \cos \psi = v_\psi',$$

$$v_\varphi \sin \varphi = v_\varphi'', \quad v_\psi \sin \psi = v_\psi''.$$

Ferner ist

$$\cos \alpha = \frac{\mu + x}{\sqrt{(\mu + x)^2 + y^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{(\mu + x)^2 + y^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{-\mu + x}{\sqrt{(\mu - x)^2 + y^2}}, \quad \sin \beta = \frac{y}{\sqrt{(\mu - x)^2 + y^2}},$$

$$v \cos \alpha = x_v - x, \quad v \sin \alpha = y_v - y.$$

Diese Werthe in die beiden obigen Gleichungen gesetzt liefern die beiden folgenden Verwandtschaftsgleichungen

$$(I) \quad x^2 + y^2 + x(v_{\varphi}' + \mu - x_0) + y(v_{\varphi}'' - y_0) + \mu(v_{\varphi}' - x_0) = 0,$$

$$(II) \quad x^2 + y^2 + x(v_{\psi}' - \mu - x_0) + y(v_{\psi}'' - y_0) - \mu(v_{\psi}' - x_0) = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erkennen wir zunächst, dass jedem Systempunkt A in der Systemphase Σ , dessen Coordinaten x, y sind, eindeutig ein Punkt A_0 in der Geschwindigkeitsphase Σ_0 entspricht, und dass dieser der Schnittpunkt der beiden Geraden ist, welche diese Gleichungen repräsentiren, wenn wir x, y als constant und x_0, y_0 als veränderlich betrachten; und ferner sehen wir, dass jedem Punkt A_0 der Geschwindigkeitsphase Σ_0 , dessen Coordinaten x_0, y_0 sind, zwei Punkte A, A' im System Σ entsprechen, welche sich als die Schnittpunkte der beiden Kreise ergeben, die bei constanten x_0, y_0 und veränderlichen x, y aus diesen Verwandtschaftsgleichungen hervorgehen. Hiernach erhalten wir den Satz:

Eine Phase Σ des bifocal-veränderlichen Systems und die zugehörige Geschwindigkeitsphase Σ_0 stehen in ein-zweideutiger Verwandtschaft.

Jedem Punkte in System Σ entspricht ein Punkt in dem System Σ_0 ; umgekehrt entsprechen aber jedem Punkt in Σ_0 zwei Punkte in Σ . Diese beiden Punkte sind reell, imaginär oder fallen zusammen, je nachdem die beiden genannten Kreise, welche die Verwandtschaftsgleichungen repräsentiren, sich schneiden, nicht schneiden oder sich berühren. Hiernach wird das System Σ_0 durch eine Grenzcurve in zwei Gebiete geschieden, von denen das eine Gebiet nur Punkte enthält, denen je ein reelles Punktpaar, das andere nur Punkte besitzt, denen je ein imaginäres Punktpaar in Σ entspricht; und jedem Punkt auf der Grenzcurve wird ein reeller Punkt entsprechen, in dem zwei Punkte des Paares zusammenfallen.

Bezeichnen wir die Mittelpunktcoordinaten des Kreises, der aus der ersten Verwandtschaftsgleichung hervorgeht, mit a, b , so folgt aus dieser Gleichung, dass

$$a = -\frac{v_{\varphi}' + \mu}{2} + \frac{x_0}{2}, \quad b = -\frac{v_{\varphi}''}{2} + \frac{y_0}{2},$$

und hieraus ergibt sich, dass das System S' der Mittelpunkte der Kreise, welche aus der Gleichung (I) hervorgehen, dem System Σ_0 ähnlich ist. In gleicher Weise ergibt sich, dass das System S'' der Mittelpunkte der Kreise, welche die Gleichung (II) liefert, dem System Σ_0 auch ähnlich ist, und in beiden Fällen verhalten sich die Strecken in den Systemen S', S'' zu den entsprechenden Strecken in Σ_0 wie 1:2. Nehmen wir

$$a = x_0 = a_0, \quad b = y_0 = b_0,$$

dann ist

$$\alpha_0 = -(\nu'_\varphi + \mu), \quad \beta = -\nu''_\varphi.$$

Wenn wir nun die Geschwindigkeiten der Focalpunkte in Fig. 8. entgegengesetzt nehmen, so dass $\Phi\Phi_0 = \Phi\Phi_\varphi$, $\Psi\Psi_0 = \Psi\Psi_\varphi$ ist, dann sind $\alpha_0\beta_0$ die Coordinaten des Punktes Φ_0 und demnach ist Φ_0 der selbstentsprechende Punkt der beiden ähnlichen Systeme S' und Σ_0 . In analoger Weise ergibt sich, dass Ψ_0 der selbstentsprechende Punkt der ähnlichen Systeme S'' und Σ_0 ist.

Setzen wir in die Kreisgleichung (I) $x = -\mu$, so zeigt sich, dass der eine Werth von $y = 0$ ist; folglich geht der betreffende Kreis K_φ stets durch den Focalpunkt Φ . Ebenso zeigt sich, wenn wir in die Kreisgleichung (II) $x = \mu$ setzen, dass dann auch der eine Werth von $y = 0$ wird, und demnach geht der betreffende Kreis K_ψ stets durch den Focalpunkt Ψ .

Auf Grund dieser Beziehungen können wir zu einem beliebigen Punkt A_0 in Σ_0 leicht die beiden entsprechenden Punkte A , A^1 im System Σ construiren. Wir beschreiben um die Mitte A_φ^0 der Geraden $\Phi_0 A_0$ den durch Φ gehenden Kreis K_φ und um die Mitte A_ψ^0 der Geraden $\Psi_0 A_0$ den durch Ψ gehenden Kreis K_ψ . Die beiden Schnittpunkte AA^1 dieser beiden Kreise sind in Σ die beiden Punkte, welche dem Punkt A_0 des Systems Σ_0 entsprechen; und da die Gerade $A_\varphi^0 A_\psi^0$ parallel $\Phi_0\Psi_0$ ist, so steht die Verbindungsgerade AA^1 senkrecht auf der Geraden $\Phi_0\Psi_0$.

Je nachdem diese beiden Kreise sich schneiden, berühren oder nicht schneiden, entsprechen dem Punkt A_0 zwei getrennt liegende reelle Punkte, zwei zusammenfallende reelle Punkte oder zwei imaginäre Punkte. Um nun den Ort der Punkte A_0 in Σ_0 zu bestimmen, denen stets zwei zusammengefallene Punkte in Σ entsprechen, brauchen wir nur zu beachten, dass in Fig. 8. $A_0\Phi_0 \parallel A_\varphi^0\Phi$ und $A_0\Psi_0 \parallel A_\psi^0\Psi$, ferner $\Phi_\varphi A_0 = 2\Phi A_\varphi^0$, $\Psi_\psi A_0 = 2\Psi A_\psi^0$, $\Phi_0\Psi_0 = 2A_\varphi^0 A_\psi^0$ ist.

Die Kreise K_φ , K_ψ werden sich berühren, wenn

$$\Phi A_\varphi^0 \pm \Psi A_\psi^0 = A_\varphi^0 A_\psi^0,$$

und demnach

$$\Phi_\varphi A_0 \pm \Psi_\psi A_0 = \Phi_0\Psi_0.$$

Ist. Hieraus folgt der Satz:

Der geometrische Ort der Punkte in der Geschwindigkeitsphase Σ_0 , denen zwei zusammengefallene Punkte in der Systemphase Σ entsprechen, ist ein Kegelschnitt, dessen Brennpunkte die Geschwindigkeitsendpunkte Φ_φ , Ψ_ψ sind, dessen Hauptaxe gleich der Strecke $\Phi_0\Psi_0$ ist; und je nachdem die Strecke $\Phi_\varphi\Psi_\psi \leq \Phi_0\Psi_0$, ist dieser geometrische Ort eine Ellipse oder Hyperbel.

Durch diesen Grenzkegelschnitt wird das System Σ in zwei Gebiete getheilt, von denen das Gebiet, welches die Brennpunkte enthält, nur solche Punkte besitzt, denen zwei imaginäre Punkte in Σ entsprechen, während den Punkten des anderen Gebietes stets zwei reelle Punkte in Σ entsprechen. Fallen die Endpunkte Φ_φ, Ψ_ψ der Geschwindigkeiten der Focalpunkte in einen Punkt M zusammen, dann geht der Grenzkegelschnitt in einen Kreis über, dessen Mittelpunkt M und dessen Durchmesser gleich $\Phi_0\Psi_0$ ist; fallen dagegen die Punkte $\Phi_0\Psi_0$ in einem Punkt zusammen, dann degenerirt der Grenzkegelschnitt zu einer Geraden, die auf $\Phi_\varphi\Psi_\psi$ in der Mitte senkrecht steht; das Gebiet der Punkte, denen reelle Punkte entsprechen, schrumpft zu dieser Geraden zusammen und zu jedem Punkt der Systemphase gehört eine Geschwindigkeit, deren Endpunkt in dieser Geraden liegt. Ist $\Phi_0\Psi_0 = \Phi_\varphi\Psi_\psi$, dann geht jener Kegelschnitt in die Gerade $\Phi_\varphi\Psi_\psi$ über, von der die Strecke $\Phi_\varphi\Psi_\psi$ als Ausartung der Ellipse und der übrige ins Unendliche ausgedehnte Theil als Ausartung der Hyperbel auftritt. In diesem Falle verschwindet das Gebiet der Punkte, denen imaginäre Punkte entsprechen, gänzlich; das bifocal-veränderliche System bleibt während des unendlich kleinen Zeittheiles unveränderlich. Dann ist die Geschwindigkeitsphase Σ der Systemphase Σ ähnlich*), und diese beiden Systeme entsprechen sich in diesem besonderen Falle gegenseitig eindeutig.

Die Construction der beiden Punkte AA^1 in Σ , welche einem Punkt A des Systems Σ entsprechen, können wir auch mit Hilfe eines einzigen der Kreise K_φ, K_ψ und einer auf $\Phi_0\Psi_0$ senkrechten Geraden ausführen. Wenn wir die zweite von der ersten der beiden Kreisgleichungen (I) (II) abziehen, erhalten wir die Gleichung

$$x(v'_\varphi - v'_\psi + 2\mu) + y(v''_\varphi - v''_\psi) + \mu(v'_\varphi + v'_\psi) - 2\mu x_e = 0,$$

welche für jeden Werth von x_e eine auf $\Phi_0\Psi_0$ senkrechte Gerade repräsentirt, und demnach erhalten wir den Satz:

Jeder auf $\Phi_0\Psi_0$ senkrechten Geraden einer Systemphase Σ entspricht eine auf der Focalgeraden $\Phi\Psi$ senkrechte Gerade in der zugehörigen Geschwindigkeitsphase Σ , und umgekehrt.

Aus dieser Gleichung ersehen wir, dass der unendlich fernen auf $\Phi\Psi$ senkrechten Geraden, $x_e = \infty$, in Σ die unendlich ferne auf $\Phi_0\Psi_0$ senkrechte Gerade entspricht; demnach sind die beiden sich eindeutig entsprechenden Parallelstrahlenbüschel, welche wir beziehlich mit Π und Π_e bezeichnen wollen, ähnlich.

Als solche erzeugen sie in Fig. 9. durch die Schnittpunkte entsprechender Strahlen eine Gerade ξ , welche durch den selbstentsprechen-

*) Siehe Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. XXIII, S. 112.

den Punkt $\mathfrak{P}$ der Systeme Σ, Σ_v gehen muss, weil sich in diesen zwei entsprechende Strahlen schneiden. Setzen wir in jene Gleichung $x = x_v$, so erhalten wir die Gleichung dieser Geraden ξ :

$$x(v'_\phi - v'_\psi) + y(v''_\phi - v''_\psi) + \mu(v'_\phi - v'_\psi) = 0.$$

Tragen wir in Fig. 9. vom Schnittpunkt Θ der Geschwindigkeitsrichtungen der Focalpunkte ausgehend die Geschwindigkeiten derselben in gleichem Sinn auf, so dass $\Theta\Phi' = \Phi\Phi_\phi$, $\Theta\Psi' = \Psi\Psi_\psi$ ist, dann steht die Gerade ξ senkrecht auf $\Phi'\Psi'$, weil $v'_\phi - v'_\psi$ gleich der Projection von $\Phi'\Psi'$ auf die mit der Focalgeraden zusammenfallende x -Axe, und $v''_\phi - v''_\psi$ gleich der Projection von $\Phi'\Psi'$ auf die y -Axe ist.

Wollen wir nun zu einem Punkt A_v des Systems Σ_v die beiden entsprechenden Punkte AA^1 in Σ bestimmen, so ziehen wir durch A_v die auf $\Phi\Psi$ senkrechte Gerade $A_v\alpha$ und durch ihren Schnittpunkt α , den sie mit der Geraden ξ bildet, die auf $\Phi_0\Psi_0$ senkrechte Gerade $\alpha\delta$; ferner beschreiben wir einen jener Kreise K_ϕ, K_ψ , z. B. K_ϕ , dessen Mittelpunkt A_ϕ^0 die Mitte von Φ_0A_v ist und durch den Focalpunkt Φ geht. Dieser Kreis schneidet die Gerade $\alpha\delta$ in den beiden Punkten AA^1 des Systems Σ , welche dem Punkt A_v des Systems Σ_v entsprechen. Construiren wir im System Σ_v (Fig. 9.) den Grenzkegelschnitt $\mathfrak{K}_v$, dessen Brennpunkte die Geschwindigkeitsendpunkte Φ_ϕ, Ψ_ψ sind, und dessen Hauptaxe gleich $\Phi_0\Psi_0$ ist, dann entspricht jedem Punkt dieses Kegelschnittes ein Punkt in Σ , und so erhalten wir zu $\mathfrak{K}_v$ die entsprechende Curve $\mathfrak{K}$ in Σ , welche, wie wir bald erkennen werden, ein mit $\mathfrak{K}_v$ affiner Kegelschnitt ist. Zu jedem Punkt einer auf $\Phi\Psi$ senkrechten Geraden $A_v\alpha$ gehört ein Kreis K_ϕ , der auf der Geraden $\alpha\delta$ die beiden entsprechenden Punkte AA^1 bestimmt, und da diese Kreise einen Kreisbüschel bilden, so sind auf der Geraden $\alpha\delta$ je zwei der Punkte AA^1 conjugirte Punkte einer involutorischen Reihe. Die Gerade $A_v\alpha$ schneidet $\mathfrak{K}_v$ in zwei Punkten D_vE_v ; diesen entsprechen resp. die Schnittpunkte DE , welche die Gerade $\alpha\delta$ mit $\mathfrak{K}$ bildet und die Doppelpunkte der involutorischen Reihe sind. Füllen wir $\Phi_\phi\Phi^\phi$ und $\Psi_\psi\Psi^\psi$ senkrecht auf $\Phi\Psi$, machen $\Phi A^\psi = \Psi\Psi^\psi$, $\Psi B^\phi = \Phi\Phi^\phi$ und ziehen die Geraden ϕ_v, ψ_v beziehlich in A^ψ, B^ϕ auf $\Phi\Psi$ senkrecht, so entsprechen nach S. 97 den Punkten Φ, Ψ geometrisch resp. alle Punkte der Geraden ϕ_v, ψ_v ; und diesen Geraden in dem auf $\Phi\Psi$ senkrechten Parallelstrahlenbüschel Π_v entsprechen demnach die auf $\Phi_0\Psi_0$ senkrechten Geraden $\Phi\alpha', \Psi\alpha''$ des Parallelstrahlenbüschels Π . Da nun die Gerade $\Phi\alpha'$ in diesem Falle durch einen Grundpunkt Φ des betreffenden Kreisbüschels geht, so fallen die beiden Doppelpunkte der involutorischen Reihe auf $\Phi\alpha'$ im Punkt Φ zusammen. Das Analoge gilt von der Geraden $\Psi\alpha''$, und demnach berühren die Geraden $\Phi\alpha', \Psi\alpha''$ den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ resp. in den Focalpunkten Φ, Ψ und die Ge-

raden φ_* , ψ_* sind Tangenten an den Grenzkegelschnitt $\mathfrak{K}_*$. Diese involutorischen Reihen gehen in diesem besonderen Falle in gewöhnliche Punktreihen über und, wie man leicht ersieht, entsprechen dem unendlich fernen Punkt auf φ_* in Σ_* , der Focalpunkt Φ und der unendlich ferne Punkt auf $\Phi\alpha'$; demnach entspricht den Punkten der Geraden φ_* in Σ_* einerseits der einzige Punkt Φ in Σ , andererseits eine ähnliche Punktreihe auf $\Phi\alpha'$; ebenso entspricht den Punkten der Geraden ψ_* in Σ_* einerseits der einzige Punkt Ψ in Σ , andererseits eine ähnliche Punktreihe auf $\Psi\alpha''$.

Um eine klare Uebersichtlichkeit der verwandten Systeme Σ , Σ_* zu erlangen und um neue Resultate in der einfachsten Weise durch Vermeidung complicirter Rechnung zu erhalten, bringen wir diese beiden Systeme, wie bei den bifocalen Systemen, in räumliche Beziehungen. Wir nehmen Fig. 10. zwei zu einander senkrechte Ebenen XY , XZ an, welche wir beziehlich als Grundriss- und Aufrissebene betrachten; legen das System Σ so in die XY -Ebene, dass das Parallelstrahlenbüschel Π senkrecht auf die X -Axe steht und bezeichnen das System in dieser Lage mit Σ_I , das Strahlenbüschel mit Π_I . Ferner denken wir uns zu dem System Σ_* ein ähnliches System Σ_{II} in der XZ -Ebene derart construiert, dass dem Parallelstrahlenbüschel Π_* ein mit Π_I congruentes Parallelstrahlenbüschel Π_{II} entspricht, welches ebenfalls auf der X -Axe senkrecht steht und dessen Strahlen die entsprechenden des Büschels Π_I in der X -Axe schneiden. Durch diese Transformation sind die Coordinaten xy der Punkte von Σ durch lineare Functionen der Coordinaten X , Y der Punkte des Systems Σ_I bestimmt, und ebenso sind die Coordinaten x_*y_* der Punkte von Σ_* linear durch die Coordinaten XZ des Systems Σ_{II} ausdrückbar; demnach wird durch Einsetzung dieser Werthe für x , y , x_* , y_* in die Gleichung (I) oder (II) der Grad nicht geändert und es ergibt sich in beiden Fällen dieselbe Gleichung zweiten Grades bezüglich der drei Coordinaten X , Y , Z , welche eine Fläche zweiten Grades repräsentirt, deren Grundriss- und Aufrissprojection resp. die Systeme Σ_I , Σ_{II} sind. Da jedem Punkt des Systems Σ_I ein Punkt in Σ_{II} entspricht, so muss die Grundrissebene ganz von der Projection der Fläche zweiten Grades überdeckt sein; da ferner nach den vorhergegangenen Erörterungen dem Focalpunkt Φ_I in Σ_I die Gesamtheit aller Punkte einer Geraden φ_{II} in Σ_{II} geometrisch entspricht, welche ein Strahl des Büschels Π_{II} ist und in gleicher Weise dem Focalpunkt Ψ_I eine Gerade ψ_{II} entspricht, so muss jene Fläche ein einschaliges Hyperboloid sein, welches zwei in Φ_I , Ψ_I auf dem Grundriss senkrecht stehende Mantellinien besitzt. Hiernach erhalten wir den Satz:

Das mit Σ congruente System Σ_I ist als die Grundrissprojection eines einschaligen Hyperboloids anzusehen, welches gegen den Grundriss

so gestellt ist, dass zwei Mantellinien in den Focalpunkten $\Phi_I \Psi_I$ auf demselben senkrecht stehen, und das mit Σ_o ähnliche System Σ_{II} ist als die Aufrissprojection dieses Hyperboloids zu betrachten.

Der Grenzkegelschnitt $\mathbb{K}_{II}$ in System Σ_{II} , welcher der geometrische Ort der Punkte des Systems Σ_{II} ist, denen in Σ_I zwei zusammengefallene Punkte entsprechen, bildet in dem Aufriss die Contour der Aufrissprojection des Hyperboloids. Demnach ist $\mathbb{K}_{II}$ die Projection eines auf dem Hyperboloid liegenden Kegelschnittes, dessen Grundrissprojection ein durch die Focalpunkte $\Phi_I \Psi_I$ gehender mit $\mathbb{K}_{II}$ affiner Kegelschnitt $\mathbb{K}_I$ ist. Hieraus folgt: *Dem Grenzkegelschnitt $\mathbb{K}_o$ in Σ_o entspricht in Σ ein durch die Focalpunkte Φ, Ψ gehender affiner Kegelschnitt $\mathbb{K}$, d. h. jedem Punkt auf $\mathbb{K}_o$ entspricht ein auf $\mathbb{K}$ liegender zweizähliger Punkt.*

Da jede durch einen Focalpunkt, z. B. durch Φ_I gehende, auf dem Grundriss senkrechte Ebene das Hyperboloid längs der in Φ_I auf dem Grundriss senkrechten Mantellinie φ und in einer zweiten Mantellinie schneidet, deren Grundrissprojection durch Φ_I geht, so ergibt sich der Satz:

Jeder durch einen Focalpunkt gehenden Geraden des Systems Σ , die den Kegelschnitt $\mathbb{K}$ in einem Punkt Q schneidet, entspricht eine Gerade im System Σ_o , welche den Kegelschnitt $\mathbb{K}_o$ in dem entsprechenden Punkt Q_o berührt, und die entsprechenden Punktreihen dieser Geraden sind ähnlich.

Jede auf dem Grundriss senkrechte Ebene, welche durch keinen Focalpunkt geht und nicht senkrecht zur X-Axe ist, liefert in dem Hyperboloid einen Kegelschnitt, dessen Aufrissprojection der Grundrissspur dieser Ebene entspricht. Dies giebt den Satz:

Jeder durch keinen Focalpunkt gehenden Geraden in Σ entspricht ein Kegelschnitt in Σ_o , der den Grenzkegelschnitt $\mathbb{K}_o$ in einem Punkt, in zwei reellen Punkten oder zwei imaginären Punkten berührt, je nachdem die Gerade in Σ den Kegelschnitt $\mathbb{K}$ berührt, in zwei reellen oder imaginären Punkten schneidet.

Ein auf der Grundrissebene senkrechter Cylinder, dessen Basis ein durch die beiden Focalpunkte $\Phi_I \Psi_I$ gehender Kegelschnitt ist, schneidet das Hyperboloid längs der beiden in Φ_I, Ψ_I auf dem Grundriss senkrechten Geraden φ, ψ und ausserdem in einem Kegelschnitt; dies liefert den Satz:

Jedem durch die Focalpunkte gehenden Kegelschnitt in Σ entspricht im Allgemeinen ein affiner Kegelschnitt in Σ_o , der den Contourkegelschnitt $\mathbb{K}_o$ in zwei reellen oder imaginären Punkten berührt, je nachdem der Kegelschnitt in Σ , ausser in den Focalpunkten, den Kegelschnitt $\mathbb{K}$ in zwei reellen oder imaginären Punkten schneidet.

Da nach S. 95 einem durch die Focalpunkte gehender Kreis in

einer unendlich nahen Phase wieder ein Kreis entspricht, auf denen die entsprechenden Punktreihen ähnlich sind, so können wir einen solchen Kreis des bifocal-veränderlichen Systems als einem ähnlich-veränderlichen System angehörend betrachten, und dann ist nach einer früheren Abhandlung*) das System der Geschwindigkeitsendpunkte der betreffenden Phase ähnlich. Demnach entspricht jedem durch die Focalpunkte gehenden Kreis in Σ ein Kreis in Σ_0 , und die entsprechenden Punktreihen dieser Kreise sind ähnlich.

Jede auf dem Aufriss senkrechte Ebene, deren Aufrissspur den Contourkegelschnitt $\mathcal{K}_{II}$ in einem Punkt Q_{II} berührt, schneidet das Hyperboloid in zwei Geraden, deren Grundrissprojectionen sich in einem senkrecht unter Q_{II} liegenden Punkt Q_I auf dem Kegelschnitt $\mathcal{K}_I$ schneiden und resp. durch die Focalpunkte Φ, Ψ gehen. Hiernach erhalten wir den Satz:

Jeder Geraden g_0 , welche im System Σ_0 den Grenzkegelschnitt $\mathcal{K}_0$ in einem Punkt Q_0 berührt, entsprechen in dem System Σ zwei Gerade g^Φ, g^Ψ , die resp. durch die Focalpunkte Φ, Ψ gehen und sich auf dem Kegelschnitt $\mathcal{K}$ in dem entsprechenden Punkt Q schneiden; und einer Punktreihe auf g_0 entspricht auf g^Φ wie auf g^Ψ eine ähnliche Punktreihe.

Jede auf der Aufriss-Ebene senkrechte Ebene, deren Aufrissspur nicht normal zur X-Axe ist und den Contourkegelschnitt $\mathcal{K}_{II}$ nicht berührt, schneidet das Hyperboloid in einem Kegelschnitt, dessen Grundrissprojection durch die beiden Focalpunkte Φ, Ψ geht. Hieraus folgt:

Jeder Geraden des Systems Σ_0 , die nicht ein Strahl des Parallelstrahlenbüschels Π_0 , und nicht Tangente des Grenzkegelschnittes $\mathcal{K}_0$ ist, entspricht in Σ ein durch die Focalpunkte gehender Kegelschnitt.

Aus der auf S. 96 angegebenen Construction der Geschwindigkeit AA_0 eines Punktes A einer Phase des bifocal-veränderlichen Systems können wir leicht noch eine andere Construction ableiten, welche uns zu neuen Beziehungen führt. Wir verlegen in Fig. 11. die Geschwindigkeiten der Focalpunkte $\Phi\Psi$ nach dem Schnittpunkt Θ ihrer Richtungen, so dass $\Theta\Phi' = \Phi\Phi_\varphi$, $\Theta\Psi' = \Psi\Psi_\psi$ ist. Um nun die Geschwindigkeit eines beliebigen Systempunktes A zu erhalten, ziehen wir die Gerade $\Phi'a_\varphi \perp \Phi A$ und die Gerade $\Psi'a_\psi \perp \Psi A$; den Schnittpunkt A'_0 dieser beiden Senkrechten verbinden wir mit Θ .

Dann ist die Geschwindigkeit AA_0 des Systempunktes A gleich und parallel der Strecke $\Theta A'_0$; denn fallen wir von Θ auf ΦA und ΨA resp. die Senkrechten $\Theta b_\varphi, \Theta b_\psi$, so ist $a_\varphi b_\varphi$ gleich den Projectionen von $\Phi\Phi_\varphi$ und AA_0 auf ΦA , ferner $a_\psi b_\psi$ gleich den Projectionen von $\Psi\Psi_\psi$ und AA_0 auf ΨA .

*) Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. XIII, S. 112.

Wenn wir den Constructionsweg umgekehrt durchschreiten, erhalten wir zu A'_ϵ den entsprechenden Punkt A . Hiernach können wir leicht den Systempunkt B bestimmen, der eine beliebig gegebene Geschwindigkeit v_b besitzt; denn wir brauchen nur eine Strecke $\Theta B'_\epsilon \neq v_b$ zu ziehen und zu B'_ϵ den entsprechenden Punkt B in der angegebenen Weise zu construiren.

Bezeichnen wir nun das System der Punkte A'_ϵ , welche den Punkten A_ϵ des Systems Σ_ϵ entsprechen, mit Σ'_ϵ , so folgt, da der Ort des Punktes a_ϕ ein über $\Phi'\Phi$ als Durchmesser beschriebener Kreis, und ebenso der Ort des Punktes a_ψ ein über $\Psi'\Psi$ als Durchmesser beschriebener Kreis ist, dass die Systeme Σ'_ϵ und Σ in eindeutiger Verwandtschaft zweiten Grades stehen; denn jedem Punkt A in Σ entspricht ein Punkt A'_ϵ in Σ'_ϵ und umgekehrt. Wenn A eine Gerade durchläuft, so beschreibt der entsprechende Punkt A'_ϵ einen durch die Punkte $\Phi'\Psi'$ gehenden Kegelschnitt, und wenn umgekehrt A'_ϵ eine Gerade durchschreitet, so bewegt sich nach der in unserer Figur rückwärts durchgangenen Construction der entsprechende Punkt A in Σ auf einem durch die Punkte $\Phi\Psi$ gehenden Kegelschnitt.

Liegt der Punkt A auf der Focalgeraden $\Phi\Psi$, welche wir mit λ bezeichnen, so sind die beiden Geraden $\Phi'a_\phi$, $\Psi'a_\psi$, welche durch ihren Schnitt den entsprechenden Punkt bestimmen, senkrecht auf λ und schneiden sich in einem unendlich fernen Punkt Λ^∞ ; demnach entspricht jedem Punkt der Focalgeraden λ in Σ mit Ausnahme der Focalpunkte der einzige unendlich ferne Punkt Λ^∞ in Σ'_ϵ , dieser ist also ein Hauptpunkt in Σ'_ϵ und λ ist die zugehörige Hauptgerade in Σ . Dieser Construction gemäss besitzt jeder als Systempunkt angenommene Punkt der Focalgeraden λ mit Ausschluss der Focalpunkte eine unendlich grosse auf λ senkrechte Geschwindigkeit. Ziehen wir von Φ und Ψ auf die Gerade $\Phi'\Psi'$ beziehlich die Senkrechten ϕ_Ψ , ψ_Φ , welche wir als Gerade des Systems Σ betrachten, so entspricht nach unserer Construction jedem Punkt der Geraden ϕ_Ψ in Σ der einzige Punkt Ψ' in Σ'_ϵ , und jedem Punkt der Geraden ψ_Φ in Σ der einzige Punkt Φ' in Σ'_ϵ . Demnach sind auch Φ' , Ψ' Hauptpunkte in Σ'_ϵ und ψ_Φ , ϕ_Ψ beziehlich die zugehörigen Hauptgeraden in Σ , und ferner erhalten wir den Satz:

Die Geschwindigkeiten der Punkte der durch einen Focalpunkt gehenden auf $\Phi'\Psi'$ senkrechten Systemgeraden sind gleich und gleichgerichtet mit der Geschwindigkeit des anderen Focalpunktes.

Da die Geraden λ , ψ_Φ , ϕ_Ψ die drei Hauptgeraden in den Systemen Σ sind, zu denen resp. die Punkte Λ^∞ , Φ' , Ψ' als Hauptpunkte in dem System Σ'_ϵ gehören, so sind die Schnittpunkte Φ , Ψ , Ξ^∞ dieser drei Geraden die Hauptpunkte in Σ , zu denen beziehlich die Verbindungsgeraden $\Psi'\Lambda^\infty$, $\Phi'\Lambda^\infty$, $\Phi'\Psi'$ als Hauptgerade im System Σ gehören. Der Pol

$\mathfrak{P}$ als Systempunkt in Σ besitzt momentan keine Geschwindigkeit, ihm entspricht daher in Σ' der Punkt Θ , und dies ergibt sich auch sofort aus unserer Construction, weil $\mathfrak{P}\Phi$ senkrecht auf $\Phi\Theta$, und $\mathfrak{P}\Psi$ senkrecht auf $\Psi\Theta$ ist.

Nehmen wir nun an, dass der Punkt A' in Σ' eine durch Θ gehende Gerade h' durchläuft, so beschreibt der entsprechende Punkt A in Σ einen durch die drei Hauptpunkte Φ , Ψ , Ξ^∞ und den Pol $\mathfrak{P}$ gehenden Kegelschnitt h , dessen nach Ξ^∞ gehende Asymptote senkrecht auf $\Phi'\Psi'$ steht. Da dem unendlich fernen Punkt der Geraden h' wieder ein unendlich ferner Punkt, der Schnitt zweier auf dieser Geraden senkrechten Büschelstrahlen, entspricht, so steht die zweite Asymptote dieses Kegelschnittes h auf der Geraden h' senkrecht und wir erhalten den Satz:

Der geometrische Ort aller Systempunkte in einem bifocal-veränderlichen System, deren Geschwindigkeiten parallel sind, ist eine Hyperbel, die durch die Focalpunkte Φ , Ψ und den Pol $\mathfrak{P}$ geht, deren eine Asymptote senkrecht auf der Geraden $\Phi'\Psi'$ und deren andere senkrecht auf der betreffenden Geschwindigkeitsrichtung ist.

Diese Hyperbel zerfällt dreimal in zwei Gerade, erstens wenn die Geschwindigkeitsrichtung der Geraden $\Theta\Phi$ parallel ist, in die beiden Geraden ψ_Φ und $\Phi\mathfrak{P}$, zweitens wenn sie der Geraden $\Theta\Psi$ parallel ist, in die beiden Geraden ϕ_Ψ und $\Psi\mathfrak{P}$, drittens wenn sie senkrecht auf der Geraden $\Phi\Psi$ steht, in die Geraden $\Phi\Psi$ und $\mathfrak{P}\Xi^\infty$.

Durchschreitet der Punkt A' in Σ' einen um Θ als Mittelpunkt beschriebenen Kreis, so durchläuft der entsprechende Punkt A in Σ , weil Σ' und Σ in Verwandtschaft zweiten Grades stehen, eine Curve vierter Ordnung, und daraus folgt:

Der geometrische Ort der Punkte eines bifocalveränderlichen Systems, welche gleiche Geschwindigkeit besitzen, ist eine Curve vierter Ordnung.

Nach den auf S. 94 ff. gegebenen Darlegungen bleibt eine Punktreihe des bifocal-veränderlichen Systems, welche auf einer durch einen Focalpunkt gehenden Geraden liegt, während einer unendlich kleinen Bewegung dieser Geraden unverändert. Es giebt daher für jede durch einen Focalpunkt gehende Gerade des bifocal-veränderlichen Systems einen Drehpol, den wir leicht construiren können. Die Geschwindigkeitsrichtungen aller Punkte der Geraden $\mathfrak{P}\Xi^\infty$, welche in Fig. 12. auf $\Phi'\Psi'$ senkrecht steht, sind senkrecht zur Focalgeraden $\Phi\Psi$; ziehen wir nun durch Φ eine beliebige Gerade γ , die $\mathfrak{P}\Xi^\infty$ im Punkt Γ und $\mathfrak{P}\Psi$ im Punkt C schneidet, so ist die Bewegungsrichtung des Systempunktes Γ senkrecht zu $\Phi\Psi$, und die des Punktes C senkrecht zu $\mathfrak{P}\Psi$, weil alle Punkte dieser Geraden sich senkrecht zu derselben bewegen; und demnach erhalten wir auf $\mathfrak{P}\Psi$ den Drehpol P_γ der Geraden γ , wenn wir ΓP_γ parallel $\Phi\Psi$ ziehen. Verbinden wir einen beliebigen Punkt

Q der Geraden γ mit P_γ , so ist QP_γ die Normale an der Bahncurve, welche der Punkt Q des bifocal-veränderlichen Systems beschreibt. In gleicher Weise erhalten wir auf $\mathfrak{P}\Phi$ den Drehpol P_δ einer durch Ψ gehenden Geraden δ , welche $\mathfrak{P}\Xi^\infty$ in einem Punkt Δ schneidet, wenn wir ΔP_δ parallel $\Phi\Psi$ ziehen.

Da wir in unserer Figur die Gerade δ durch den Punkt Q gelegt haben, so ist auch QP_δ die Normale an der genannten Bahncurve und die Punkte $P_\gamma Q P_\delta$ liegen demnach in einer Geraden.

Denken wir uns die Gerade $P_\gamma P_\delta$ um einen auf ihr liegenden beliebigen Punkt U gedreht, so erzeugen die Punkte P_γ, P_δ beziehlich auf den Geraden $\mathfrak{P}\Psi, \mathfrak{P}\Phi$ projectivische Punktreihen, und da die Geraden $P_\gamma\Gamma, P_\delta\Delta$ parallel zu $\Phi\Psi$ sind, so durchlaufen auch die Punkte Γ und Δ auf der Geraden $\mathfrak{P}\Xi^\infty$ projectivische Punktreihen; demnach sind $\Phi\Gamma, \Psi\Delta$ entsprechende Strahlen zweier projectivischer Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte resp. Φ und Ψ sind. Hiernach beschreibt der Schnittpunkt Q dieser beiden Strahlen, wenn sich die Gerade $P_\gamma P_\delta$ um den Punkt U dreht, einen durch Φ und Ψ gehenden Kegelschnitt, der auch den Punkt U enthält; denn betrachten wir diesen Punkt als Systempunkt, dann geht die Normale an der von ihm erzeugten Bahncurve selbstverständlich durch U . Geht die gedrehte Gerade $P_\gamma U P_\delta$ durch den Pol $\mathfrak{P}$, so schneiden sich die entsprechenden Strahlen der Büschel in $\mathfrak{P}$ und demnach liegt auch der Pol $\mathfrak{P}$ auf dem genannten Kegelschnitt; geht ferner die gedrehte Gerade $P_\gamma U P_\delta$ parallel zu $\Phi\Psi$, so schneiden sich die entsprechenden Strahlen der Büschel in dem Punkte R , in welchem diese Parallele die Gerade $\mathfrak{P}\Xi^\infty$ trifft. Hiernach ergibt sich der Satz:

Der geometrische Ort der Punkte eines bifocal-veränderlichen Systems, welche momentan Bahnelemente beschreiben, deren Normalen durch einen festen Punkt U gehen, ist ein Kegelschnitt, der die beiden Focalpunkte, den Pol $\mathfrak{P}$ und den Punkt U enthält.

Nehmen wir den Punkt U im Unendlichen an, dann sind die Normalen, sowie die Tangenten an den betreffenden Bahncurven parallel, und demnach ist der auf S. 107 abgeleitete erste Satz als specieller Fall in diesem enthalten.

Beschreiben wir in Fig. 12. den durch $\Phi, \Psi, \mathfrak{P}$ gehenden Kreis, der die Gerade $\mathfrak{P}\Xi^\infty$ andererseits im Punkte R' trifft, und ziehen wir durch R' zu $\Phi\Psi$ die Parallele $R'U'$, welche diesen Kreis zum zweiten Male im Punkt U' schneidet, so ist dieser Kreis der geometrische Ort der Systempunkte, deren Bahnelemente Normalen besitzen, die durch den so bestimmten Punkt U' gehen, und die Tangenten an diesen Bahnelementen treffen sich in dem U' diametral gegenüberliegenden Punkt Z' .

Um den geometrischen Ort der Systempunkte zu erhalten, deren

Bewegungsrichtungen durch einen gegebenen Punkt Z gehen, ziehen wir Fig. 13. durch einen Focalpunkt z. B. durch Ψ eine beliebige Gerade δ , durch ihren Schnitt Δ mit $\mathfrak{P}\Xi^\infty$ eine Parallele zu $\Phi\Psi$, welche $\mathfrak{P}\Phi$ in dem Punkt P_δ trifft, und beschreiben über $P_\delta Z$ als Durchmesser einen Kreis K_δ , so sind die beiden Schnittpunkte A, B , die derselbe mit der Geraden δ bildet, Punkte dieser Geraden, welche Bahncurven beschreiben, deren Tangenten durch den Punkt Z gehen; denn da P_δ der Drehpol der Geraden δ ist, so sind $P_\delta A$ und $P_\delta B$ Normalen dieser Curven. Aus dieser Construction folgt, dass jedem Strahl δ des Strahlenbüschels Ψ ein Kreis K_δ eines projectiven Kreisbüschels entspricht, dessen einer Grundpunkt Z und dessen anderer Grundpunkt der Fusspunkt V der von Z auf $\mathfrak{P}\Phi$ gefällten Senkrechten ist. Dieser Strahlenbüschel und dieser projectivische Kreisbüschel erzeugen bekanntlich eine durch die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte gehende Curve dritter Ordnung, welche die Grundpunkte Z, V und den Büschelmittelpunkt Ψ enthält. In gleicher Weise können wir diese Curve erhalten, wenn wir Φ als Büschelmittelpunkt wählen, dann wird ausser dem Punkt Z der Fusspunkt W der von Z auf $\mathfrak{P}\Psi$ gefällten Senkrechten als zweiter Grundpunkt des projectivischen Kreisbüschels auftreten, und demnach muss die genannte Curve auch durch die Punkte Φ und W gehen. Hieraus folgt:

Der geometrische Ort der Punkte eines bifocal-veränderlichen Systems, welche momentan Bahncurvenelemente beschreiben, deren Tangenten durch einen festen Punkt Z gehen, ist eine durch die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte gehende Curve dritter Ordnung, welche die beiden Focalpunkte $\Phi\Psi$ und die Fusspunkte VW der von Z auf $\mathfrak{P}\Phi$ und $\mathfrak{P}\Psi$ gefällten Senkrechten enthält.

Beschreiben wir den durch $\mathfrak{P}\Phi\Psi$ gehenden Kreis κ , der die Gerade $\mathfrak{P}\Xi^\infty$ andererseits in R' schneidet, ziehen wir $R'U'$ parallel $\Phi\Psi$ und lassen wir den Punkt Z mit dem U' diametral gegenüberliegenden Punkt Z' zusammenfallen, dann zerfällt die betreffende Curve dritter Ordnung in den Kreis κ und die Gerade ε , welche durch die Fusspunkte V', W' der von Z' beziehlich auf $\mathfrak{P}\Phi$ und $\mathfrak{P}\Psi$ gefällten Senkrechten geht.

Sind in einem bifocal-veränderlichen System Σ , Fig. 14, die Focalpunkte $\Phi\Psi$ und die Geschwindigkeiten $v_a v_b$ zweier Systempunkte $A B$ gegeben, so kann man leicht die Geschwindigkeit v_c eines beliebigen dritten Systempunktes C construiren. Wir ziehen $C\alpha \# v_a$, $C\beta \# v_b$, dann $\alpha\varphi \perp A\Phi$, $\alpha\psi \perp A\Psi$, ferner $\beta\varphi \perp B\Phi$, $\beta\psi \perp B\Psi$, so sind $C\varphi$, $C\psi$ beziehlich gleich und parallel den Geschwindigkeiten v_φ, v_ψ der Focalpunkte $\Phi\Psi$. Füllen wir hierauf $\varphi\gamma \perp \Phi C$, $\psi\gamma \perp \Psi C$, so ist $C\gamma = v_c$ die Geschwindigkeit des Systempunktes C .

Die bekannte Peaucellier'sche Geradführung wird durch eine

Specialisirung des in Fig. 14. schematisch gezeichneten Mechanismus erhalten, daher kann die eben ausgeführte Construction auch auf die Geschwindigkeitsbestimmung bei dieser Geradföhrung angewendet werden, und es ist in diesem besonderen Fall noch die eine der gegebenen Geschwindigkeiten v_a, v_b gleich Null.

Die Festlegung des bifocal-veränderlichen Systems in dem Sinne, wie wir dieselbe für projectiv-veränderliche Systeme*) ausgeführt haben, erfordert die Ueberwindung grosser Schwierigkeiten, die, wie es scheint, nur in besonderen Fällen ermöglicht werden kann.

Am angeführten Ort erwähnt C. G. J. Jacobi auch der Verwandtschaft zweier räumlicher Systeme $S_1 S_2$, in denen zwei entsprechende Punkte $P_1 P_2$ dadurch bestimmt werden, dass man in S_1 drei Punkte $\Phi_1 \Psi_1 \Omega_1$ in S_2 drei Punkte $\Phi_2 \Psi_2 \Omega_2$ als gegeben betrachtet und

$$\Phi_1 P_1 = \Phi_2 P_2, \quad \Psi_1 P_1 = \Psi_2 P_2, \quad \Omega_1 P_1 = \Omega_2 P_2$$

macht. Die hierdurch definirte Verwandtschaft der beiden räumlichen Systeme $S_1 S_2$ kann man die *trifocale Verwandtschaft* nennen, und diese Systeme als *trifocale Systeme* bezeichnen**). Sind die Geschwindigkeiten $v_\phi v_\psi v_\omega$ der drei Focalpunkte $\Phi \Psi \Omega$ in einer Phase S eines trifocal-veränderlichen Systems gegeben, so können wir in analoger Weise wie bei dem bifocal-veränderlichen System die Geschwindigkeit v_a eines beliebigen Systempunktes A bestimmen und diese Bestimmung begründen.

*) „Ueber die Festlegung projectiv-veränderlicher ebener Systeme“ im 14ten Band dieser „Annalen“ S. 472. Ich bemerke noch nachträglich, was ich übersehen hatte, dass die in dieser Abhandlung enthaltenen Aufgaben theilweise von Seydewitz in Grunert's Archiv Bd. 9, S. 206 ff. und ausführlich von Herrn H. Schröter in Crelle's Journal Bd. 62, S. 215 ff. behandelt wurden. Der von mir auf S. 482 dieser genannten Abhandlung als falsch bezeichnete Clebsch'sche Satz ist nach der Beweisführung von Herrn A. Voss (Bd. XV., S. 355 dieser „Annalen“) richtig. Infolge der nicht genügend präcisen Fassung dieses Satzes habe ich denselben so verstanden, dass es auch in den von mir erwähnten zweifach unendlich vielen Fällen nur *einen* sechsten Punkt geben solle, dessen entsprechende Punkte auf einer sechsten Geraden liegen, während unendlich viele solche Punkte vorhanden sind. Eine solche missverständliche Auffassung ist aber erst dann unmöglich, wenn man dem Clebsch'schen Satz die präcisere Form giebt: „Bei der Gesamtheit aller Collineationen, bei welchen die zu gegebenen fünf Punkten gehörigen Punkte auf gegebenen fünf Geraden liegen, existirt immer noch ein sechster Punkt, dessen entsprechende Punkte sämmtlich auf einer Geraden liegen, und zwar wird der sechste Punkt und diese Gerade linear construirt.“

**) Diese geometrische Verwandtschaft wurde ohne Hinsicht auf die Veränderlichkeit eingehend untersucht von Herrn Hermes (Crelle's Journal, Bd. 73, S. 209) und Herrn Darboux (Mémoires de la société des sciences de Bordeaux, T. VIII, p. 197.)

Behufs der Construction der Geschwindigkeit v_a verlegen wir die Geschwindigkeiten der Focalpunkte nach A , so dass $AA_\varphi \# v_\varphi$, $AA_\psi \# v_\psi$, $AA_\omega \# v_\omega$ ist; durch die Punkte A_φ , A_ψ , A_ω legen wir Ebenen, welche resp. auf den Geraden $A\Phi$, $A\Psi$, $A\Omega$ senkrecht sind; diese Ebenen schneiden sich in einem Punkt A_s , und dann ist $AA_s = v_a$ die Geschwindigkeit des Systempunktes A . Diese Bestimmung gilt selbstverständlich auch für den Fall, wenn das trifocal-veränderliche System in ein starres räumliches System übergeht. Wir können diese Construction noch dadurch verallgemeinern, dass wir die Geschwindigkeiten der Focalpunkte nach einem beliebig im Raum angenommenen Punkt Θ verlegen, also $\Theta\Phi \# v_\varphi$, $\Theta\Psi \# v_\psi$, $\Theta\Omega \# v_\omega$ machen.

Legen wir nun durch die Punkte $\Phi\Psi\Omega$ Ebenen, welche resp. auf den Geraden $A\Phi$, $A\Psi$, $A\Omega$ senkrecht stehen, und verbinden wir den Schnittpunkt A'_s dieser drei Ebenen mit Θ , so ist $\Theta A'_s$ gleich und parallel der Geschwindigkeit des Systempunktes A . Bezeichnen wir das System der Punkte A'_s mit S'_s , so entspricht im Allgemeinen jedem Punkt A in S ein Punkt A'_s in S'_s . Umgekehrt erhalten wir zu einem Punkt A'_s in S'_s als eindeutig entsprechend den Punkt A in S ; denn legen wir durch die Punkte $\Phi\Psi\Omega$ Ebenen, welche beziehlich auf den Geraden $A'_s\Phi$, $A'_s\Psi$, $A'_s\Omega$ senkrecht stehen, so schneiden sich diese Ebenen in dem Punkt A . Die beiden Systeme stehen, wie man leicht erkennt, in einer eindeutigen räumlichen Verwandtschaft dritten Grades, eine Ebene in dem einen System entspricht einer Fläche dritter Ordnung in dem anderen, eine Gerade in dem einen einer Raumcurve dritter Ordnung in dem anderen. Dem Punkt Θ in S'_s entspricht der Punkt $\mathfrak{P}$ in S , dessen Geschwindigkeit gleich Null ist, und dieser Punkt $\mathfrak{P}$ ist der Schnittpunkt der drei in den Focalpunkten $\Phi\Psi\Omega$ auf den Geschwindigkeiten derselben senkrecht stehenden Ebenen; hieraus folgt:

Der geometrische Ort aller Systempunkte in einem trifocal-veränderlichen System, deren Geschwindigkeiten parallel sind, ist eine durch den Punkt $\mathfrak{P}$ gehende Raumcurve dritter Ordnung.