SULLE CORRENTI DI DUBDELL.

Nota del Dott. MICHELE LA ROSA.

L'ipotesi dell'esistenza nell'arco cantante di due vibrazioni di periodo molto diverso, messa avanti dal Prof. Ascoli e dal Dott. Manzetti ¹⁾, deducendola dai risultati di esperienze stroboscopiche, poteva far pensare ad una partecipazione del circuito principale al fenomeno oscillatorio.

Guidato da tale concetto iniziai nel Laboratorio di Fisica del R. Istituto di Studi Superiori di Firenze delle esperienze allo scopo di separare la vibrazione più lenta e studiare quale azione su essa esercitassero le costanti del circuito principale ARBA (fig. 1).

Tralasciando di riferire i vari tentativi infruttuosamente condotti, riporto solo due fatti che ebbi occasione di rilevare nel corso di tali prove.

1) Ascoli e Manzetti. Rend. Acc. Lincei, 1902, 2° sem., fasc. 1°.

1° La diminuzione molto notevole dell'induttanza Λ del primario di un trasformatore a circuito magnetico chiuso, disposto in serie nel circuito principale, ottenuta mettendo in corto circuito il suo secondario, faceva abbassare il suono dato dall'arco. Il cambiamento d'altezza più non avveniva se l'induttanza residua era ancora grande, come si constatò impiegando due trasformatori simili in serie ed escludendone uno.

2° Questa stessa variazione nel valore di Λ produceva un notevole aumento nell'altezza del suono, se al solito dispositivo (fig. 1) si sostituiva quello rappresentato dalla fig. 2.

Più oltre si tornerà sulla spiegazione di questi fatti.

In seguito però, il Prof. Corbino ¹⁾ discutendo l'esperienza stroboscopica dei Sigg. Ascoli e Manzetti venne alla conclusione che a spiegarla non era necessario invocare l'esistenza di due vibrazioni; anzi egli riuscì a riprodurre le stesse apparenze sopra un disco dipinto a settori in rotazione, con le semplici alternative di luce prodotte intercettando un fascio luminoso con un secondo disco girante, fornito di fori.

In un lavoro posteriore lo stesso Prof. Corbino ²⁾ facendo lo studio della forma delle correnti nei vari rami del dispositivo Duddell per mezzo di un tubo di Braun e dello specchio girante, dedusse che le correnti alternate prodotte nel ramo derivato

1) Corbino. Atti A. E. I., vol. 7, pag. 369, 1903.

2) Corbino. Atti A. E. I., vol. 7, fasc. 5°, pag. 597, 1903.

tendono ad assumere la forma sinusoidale, col periodo dato da $T = 2\pi\sqrt{LC}$; esse sono effettivamente sinusoidali fintanto che l'intensità massima, cioè l'ampiezza della vibrazione, si mantiene inferiore od uguale all'intensità nel ramo principale; quando invece tale condizione non è più soddisfatta, l'arco, nella fase di carica del condensatore, si spegne appena il valore istantaneo dell'intensità nel ramo derivato raggiunge il valore dell'intensità nel ramo principale; da questo istante la corrente fornita dalla batteria piglia la via del condensatore, e se l'induttanza Λ del principale è molto grande, la sua intensità si mantiene costante ad onta della differenza di potenziale crescente sulle armature del condensatore, in caso diverso tale intensità viene uniformemente decrescendo. Quando la differenza di potenziale sulle armature raggiunge un valore opportuno l'arco si riaccende, e l'oscillazione si riproduce come se nessun disturbo fosse avvenuto.

Nel diagramma dell'intensità nel ramo derivato (fig. 3) la cresta dell'onda viene perciò troncata e sostituita da un tratto

rettilineo, che fa un angolo tanto più piccolo con l'asse dei tempi quanto più grande è Λ . La forma di tale diagramma è perciò quella rappresentata dalla figura qui unita.

Questo modo di considerare il fenomeno Duddell conduce alla conseguenza che il periodo della vibrazione deve variare con la lunghezza del tratto rettilineo del diagramma, cioè deve dipendere dall'ampiezza della vibrazione. Questa conseguenza ho voluto assoggettare quantitativamente a verifica sperimentale; e per l'importanza che nel fenomeno viene così ad acquistare l'ampiezza della vibrazione, ho voluto anche studiare come essa vari al mutare delle condizioni sperimentali.

Tenendo presente che l'area $A B C D$ (fig. 3) dev'essere uguale all'area $D E F$, è facile convincersi che in conseguenza dell'appiattimento dell'onda il periodo d'oscillazione deve risultare accresciuto, in modo che il rapporto fra il periodo attuale e quello dell'onda originaria, rigorosamente sinusoidale, dev'essere dato dalla relazione

$$(1) \quad \frac{T'}{T} = \frac{1}{\pi} \left(\sqrt{\frac{I_0^2}{I^2} - 1} + \arcsen \frac{I}{I_0} + \frac{\pi}{2} \right)$$

in cui I ed I_0 sono rispettivamente l'intensità nel ramo principale e l'ampiezza della vibrazione.

Quì di seguito sono riportate alcune misure fatte per verificare la (1). I diversi elementi furono determinati nel modo seguente:

1.° I con un amperometro inserito nel circuito principale.

2.° I_0 , fissando, con l'aiuto di un cannocchiale, la posizione di massimo spostamento del cerchietto luminoso di un tubo di Braun e cercando dopo l'intensità di corrente continua capace di produrre lo stesso spostamento del cerchietto, attraversando nelle stesse condizioni la bobina che agiva sul tubo.

3.° T' per mezzo di un sonometro, mentre si fissava la posizione del cerchietto.

4.° T , nel modo stesso, dopo avere rese opportunamente sinusoidali le oscillazioni.

Nello specchio seguente l' è il periodo di vibrazione per l'onda appiattita, l per l'onda sinusoidale, entrambi espressi in millimetri della corda del sonometro, I_0 ed I sono espresse in ampère, $\frac{T'}{T}$ è il rapporto dei periodi calcolato con la formula (1).

Esperienza 1ª.

$I_0 = 6,8$	$I = 2,2$
$l = 240$	$l' = 370$
$\frac{T'}{T} = 1,54$	$\frac{l'}{l} = 1,53$

In questa esperienza C, capacità del ramo derivato, era uguale a 8 microfarad; L, induttanza dello stesso ramo, era uguale a 2,78 millihenry.

Esperienza 2^a.

$$\begin{array}{ll} I_0 = 7,1 & I = 2,3 \\ l = 240 & l' = 352 \\ \frac{T'}{T} = 1,52 & \frac{l'}{l} = 1,47 \end{array}$$

C ed L le stesse che nell'esperienza precedente.

Esperienza 3^a.

$$\begin{array}{ll} I_0 = 5,0 & I = 2,3 \\ l = 182 & l' = 225 \\ \frac{T'}{T} = 1,26 & \frac{l'}{l} = 1,24 \end{array}$$

C = 8; L = 5,88.

Esperienza 4^a.

$$\begin{array}{ll} I_0 = 9,7 & I = 2 \\ l = 147 & l' = 290 \\ \frac{T'}{T} = 2,02 & \frac{l'}{l} = 1,98 \end{array}$$

C = 8; L = 1,29.

Esperienza 5^a.

$$\begin{array}{ll} I_0 = 7,4 & I = 2,4 \\ l = 98 & l' = 160 \\ \frac{T'}{T} = 1,55 & \frac{l'}{l} = 1,63 \end{array}$$

C ed L come nell'esperienza 4^a.

Le divergenze fra i valori dei rapporti $\frac{T'}{T}$ ed $\frac{l'}{l}$ non sono così ristrette come sarebbe desiderabile, pure rientrano nei

limiti degli errori per la facile variabilità di due degli elementi misurati; cioè di I_0 e di ℓ' .

Ed ora si noti che l'ipotesi precedente dà anche ragione, come ha fatto rilevare il Prof. Corbino, dell'abbassamento del periodo prodotto da una grande diminuzione dell'induttanza principale; infatti il tratto rettilineo s'inclina fortemente verso la destra nella figura 3, ed a questa inclinazione deve corrispondere un ulteriore allungamento nel periodo, per l'uguaglianza delle aree abbracciate dai due rami A B C D, D E F. L'aumento d'altezza riscontrato col dispositivo della fig. 2, mi pare che si possa spiegare tenendo presente da un canto che in questo caso l'inclinazione del tratto rettilineo, per la diminuzione dell'induttanza, dev'essere debolissima, perchè il valore residuo di Λ è ancora molto grande; e d'altra parte nella scarica del condensatore attraverso ai due circuiti derivati, una data diminuzione di Λ deve produrre una diminuzione nel periodo tanto più notevole quanto più prossimo ad uno è il rapporto fra le induttanze dei due rami.

Passiamo ora ad esaminare come l'ampiezza dipenda dalla resistenza, dalla induttanza e dalla capacità del ramo derivato.

In questo studio essa veniva determinata in modo analogo a quello detto precedentemente: il tratto rettilineo luminoso descritto dal tubo di Braun veniva proiettato mediante un obbiettivo a corto fuoco sopra una scala pellucida, sulla quale si misurava lo spostamento massimo del cerchietto dalla sua posizione di riposo. Il confronto con lo spostamento prodotto da una corrente costante non fu necessario, perchè da uno studio preliminare era risultato che per spostamenti non troppo grandi, come quasi tutti quelli di queste misure, le deviazioni del fascio catodico sono quasi esattamente proporzionali alle intensità di corrente nella bobina deviatrice.

Le induttanze variabili furono determinate col metodo di Pirani, quella della piccola bobina deviatrice fu calcolata con la nota formula, che in questo caso poté dare un valore abbastanza approssimato, poichè la sezione era piccola in paragone della lunghezza.

Le capacità del condensatore impiegato, a carta paraffinata, vennero confrontate, col metodo del ponte, con un buon condensatore campione di Siemens a dielettrico di mica. Ho potuto verificare che i rapporti delle induttanze e delle capacità si possono ritenere esatti solo fino a qualche centesimo.

È bene rilevare fin d' ora che *la lunghezza dell' arco influenza moltissimo l' ampiezza della vibrazione e precisamente questa cresce col crescere di quella*, ad onta della diminuzione dell' intensità principale, fu posta perciò molta cura a produrre i cambiamenti voluti nel circuito, nel più breve tempo possibile, adoperando a tal fine un commutatore a bilanciere, e ciò per conservare in ogni misura possibilmente costante la lunghezza dell' arco.

Influenza della resistenza.

Tenendo costanti i valori della capacità C e dell' induttanza L , si fece mutare la resistenza del circuito derivato in vario rapporto; il valore di I_0 restava immutato quando la resistenza propria del circuito, che era sempre una frazione di ohm, veniva resa perfino tripla; e ciò si verificò in condizioni svariate col dare a C ed a L valori diversi. Solo quando la resistenza complessiva diventava maggiore di 2,5 ohm, pareva manifestarsi una lievissima contrazione nel tratto luminoso, ma allora le oscillazioni si spegnevano rapidamente.

Credo quindi legittima la conclusione che *l' ampiezza delle vibrazioni nel circuito Duddell è indipendente dalla resistenza*. Mi pare questa una proprietà non poco interessante dell' arco, in virtù della quale esso compensa *rigorosamente* tutte le perdite ohmiche del circuito inferiori ad un certo limite; in altri termini esso si comporta come una resistenza negativa capace di assumere lo stesso valore della resistenza ohmica del circuito fino a che questa non oltrepassi un valore massimo ¹⁾.

Questa proprietà dell' arco basterebbe da sola a dare un vero fondamento alla spiegazione del Prof. Corbino, giacchè

1) Le altre perdite inevitabili di energia non farebbero che abbassare questo limite massimo.

solo in virtù di essa è possibile mantenere un sistema di onde persistenti rigorosamente sinusoidali, con le modalità volute dalle costanti del circuito derivato.

Influenza dell' induttanza.

Tanto in questo studio che in quello della influenza della capacità il procedimento fu il seguente: si faceva variare l'elemento di cui si studiava l'influenza da un valore ad un altro, e questa stessa variazione si ripeteva un gran numero di volte, dei due spostamenti corrispondenti del cerchietto luminoso si faceva il rapporto, e come risultato definitivo si prendeva la media di tutti i rapporti ottenuti. Ciò perchè le singole misure, fatte in condizioni apparentemente simili, presentavano delle differenze notevoli per l'instabilità dei vari elementi della vibrazione. Per brevità mi limito a riportare nel quadro seguente tali medie insieme ai valori estremi ed al numero delle determinazioni da cui ogni media fu dedotta.

C	I	L_1	L_2	$R_{min.}$	$R_{mass.}$	$R_{med.}$	$\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$	N
8	1,8	2,78	5,88	1,33	1,69	1,45	1,43	71
4	»	»	»	1,28	1,60	1,41	»	30
8	»	1,29	»	2,08	2,46	2,25	2,13	57
4	»	»	»	1,80	2,20	1,99	»	57
8	»	»	2,78	1,38	1,71	1,54	1,47	57
4	»	»	»	1,31	1,64	1,46	»	58
8	4	2,78	5,88	1,17	1,45	1,29	1,43	102
8	2	»	»	1,33	1,65	1,43	»	35

Nella colonna C di questo quadro sono registrate le capacità costanti espresse in microfarad; nella I, le intensità

principali in ampère; nelle L_1 ed L_2 , i valori fra cui variava l'induttanza; nelle R , i rapporti estremi e medio fra lo spostamento del cerchietto corrispondente al valore L_1 dell'induttanza e quello corrispondente al valore L_2 ; nella N il numero delle osservazioni da cui ogni rapporto medio fu ricavato.

Confrontando i numeri della colonna 7^a con i corrispondenti della successiva, che contiene la radice dei rapporti fra le coppie di valori L_2 ed L_1 , si vede che essi sono molto prossimi fra loro, tranne del caso in cui I ha un valore piuttosto grande (4 amp.); anzi se per un momento si facesse la media ponderata delle coppie di rapporti 1,45 e 1,41; 2,25 e 1,98; 1,54 e 1,46, che però sono relativi a valori diversi della C , si troverebbero rispettivamente i numeri 1,43, 2,115, 1,50 che possono ritenersi coincidenti con i valori corrispondenti delle radici suddette, nei limiti degli errori sperimentali. Ed a questo proposito è interessante far rilevare che l'errore medio delle misure riassunte nelle righe 3^a e 4^a, 5^a e 6^a deve essere maggiore di quello delle misure riassunte nelle righe 1^a e 2^a, perchè quando L è piccolo, la striscia luminosa descritta dal cerchietto del tubo di Braun è molto variabile, e d'altro canto, siccome per L piccolo l'ampiezza della vibrazione è piuttosto grande, con minore approssimazione è verificata la proporzionalità tra questa e gli spostamenti del fascio catodico.

Dai risultati registrati nel precedente quadro si possono trarre due conseguenze.

1^a *L'ampiezza delle vibrazioni nell'arco non è in generale rilegata da legge molto semplice all'autoinduzione del ramo derivato; essa cresce col diminuire di questa, ed i suoi mutamenti, per una determinata variazione dell'induttanza, sono tanto più piccoli quanto più piccola è la capacità, e più grande è l'intensità principale.*

2^a *Quando quest'ultimo elemento è piccolo, l'ampiezza della vibrazione tende a variare in ragione inversa della radice quadrata dell'induttanza.*

Influenza della capacità.

Le misure furono condotte nel modo poc' anzi descritto. I risultati sono riassunti nel quadro sottostante, analogo al primo.

L	I	C ₁	C ₂	R _{min.}	R _{mass.}	R _{med.}	$\sqrt[5]{\frac{C_1}{C_2}}$	N
2,78	2	8	4	1,16	1,43	1,25	1,26	140
1,29	»	»	»	1,18	1,37	1,28	»	60
2,78	»	»	2,4	1,37	1,66	1,50	1,49	77
1,29	»	»	»	1,41	1,66	1,52	»	31
0,53	»	»	»	1,47	1,67	1,55	»	20
2,78	»	4	»	1,12	1,33	1,19	1,19	77
1,29	»	»	»	1,16	1,32	1,22	»	50
2,78	4	8	4	1,09	1,25	1,16	1,26	140
»	»	»	2,4	1,20	1,37	1,27	1,49	83
»	»	4	»	1,06	1,18	1,10	1,19	83

Da questo quadro si possono rilevare le seguenti conclusioni :

1^a *L' ampiezza delle vibrazioni non è legata da legge molto semplice alla capacità ; essa cresce col crescere di questa, i suoi mutamenti per una determinata variazione di C, sono tanto più grandi quanto più piccola è l' autoinduzione e più piccola l' intensità principale.*

2^a *Quando quest' ultimo elemento è piccolo l' ampiezza tende a variare proporzionalmente alla radice cubica della capacità.*

Volendo ora confrontare i risultati di queste esperienze con l' ipotesi sopra riferita, basterà pensare che secondo que-

sta, l'ampiezza delle vibrazioni è quella che dovrebbe essere per oscillazioni rigorosamente sinusoidali; si può perciò dedurre l'espressione teorica dell'ampiezza ricorrendo alla formula

$$(2) \quad Q = A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t}$$

che dà l'integrale generale dell'equazione

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \omega^2 Q = 0$$

la quale deve necessariamente sussistere, nell'ipotesi che le correnti in discorso siano sinusoidali e non smorzate. Basterà perciò determinare convenientemente le condizioni ai limiti per la (2) e la sua derivata prima, per trovare l'espressione cercata dell'ampiezza.

Converrà a tal uopo trasportare l'origine delle coordinate nel punto T_0 (fig. 3) in cui la curva dell'intensità piglia effettivamente la forma sinusoidale, e pensare che in questo istante la quantità Q d'elettricità accumulata sul condensatore è uguale a CV , se con V denotiamo la differenza di potenziale necessaria per provocare la riaccensione dell'arco, mentre $\frac{dQ}{dt}$ è ancora uguale a I , cioè uguale in valore e segno all'intensità nel ramo principale; supposto che l'induttanza Λ di questo ramo sia sufficientemente grande

Si ricavano così le condizioni:

$$A + B = CV$$

$$A - B = \frac{I}{i\omega}$$

e da queste:

$$2A = CV + \frac{I}{i\omega}$$

$$2B = CV - \frac{I}{i\omega}$$

e quindi per $\frac{dQ}{dt}$ si trova :

$$\frac{dQ}{dt} = -\omega CV \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} + i \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} = I_0 \sin(\omega t + \alpha)$$

essendo :

$$I_0^2 = I^2 + \omega^2 C^2 V^2$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{I}{\omega C V}.$$

Adunque l'espressione dell'ampiezza della vibrazione nell'ipotesi del Corbino è, mettendo per ω il suo valore $\frac{1}{\sqrt{LC}}$:

$$(3) \quad I_0 = \sqrt{I^2 + \frac{C}{L} V^2}.$$

Non ho potuto fare la verifica completa di questa formola perchè non ho avuto i mezzi per misurare la V , o per meglio dire, per determinare la differenza di potenziale ai poli dell'arco in un istante voluto. Però è facile rilevare come essa si adatti ai risultati delle precedenti esperienze.

La formola (3) infatti ci dice :

a) che l'ampiezza dev'essere indipendente dalla resistenza del circuito.

b) Essa deve variare al variare di V , e perciò anche della lunghezza dell'arco, e questi mutamenti devono essere più notevoli di quelli prodotti da variazioni di C o di L .

Queste due prime conseguenze coincidono con le analoghe avute per via sperimentale.

La (3) ci permette ancora di ritrovare, quando l'induttanza varia in un dato rapporto, le stesse conclusioni che sopra abbiamo dedotte. Infatti l'ampiezza I_0 deve diminuire al crescere di L e l'entità della variazione di I_0 deve dipendere dal valore di C e da quello di I ; essa deve risultare tanto più piccolo quanto più grande è il primo termine del radicando cioè I , e quanto più piccolo è il secondo cioè quanto più piccolo è C . Se I è piccolo in modo che il secondo termine riesca

predominante, I_0 deve variare sensibilmente nella ragione inversa della radice quadrata di L .

Non meno bene la formula (3) si adatta ai fatti quando si fa variare C in un determinato rapporto, per ciò che riguarda la prima conclusione: I_0 deve crescere al crescere di C , e l'entità della sua variazione deve essere, anche in questo caso, funzione di I e di L ; essa deve essere tanto più notevole quanto più piccolo è I e quanto più piccolo è L . Solo la seconda conseguenza sembra in verità trovarsi in difetto, giacchè se I è piccolo, I_0 tende a variare in ragione diretta della radice cubica della capacità, invece della radice quadrata che darebbe la formula; ma per attribuire il giusto peso a questa discordanza, non bisogna perdere di vista il fattore V^2 della formula, perchè non si può escludere a priori la possibilità che V vari notevolmente, quando cambiano le costanti del circuito. Certo al variare di queste, data la forma della vibrazione, varia anche la durata per la quale l'arco resta spento (in corrispondenza al tratto rettilineo della curva, figura 3), sembra quindi naturale che vari anche la differenza di potenziale necessaria per riaccenderlo.

Con piacere compio il dovere di esprimere pubblicamente la mia gratitudine ai Proff. Ròiti e Macaluso per i consigli ed i mezzi di cui, con grande gentilezza mi furono larghi.

Laboratorio di Fisica della R. Università di Palermo.