Ueber Tripelsysteme.

Von

LOTHAR HEFFTER in Giessen.

Das Problem der Tripelsysteme wurde — wie bisher nicht bemerkt worden zu sein scheint — zuerst von Jakob Steiner aufgestellt, der im Jahr 1862 die „combinatorische Aufgabe“ notirte: „Welche Zahl n von Elementen hat die Eigenschaft, dass sich die Elemente so zu dreien ordnen lassen, dass je zwei in einer, aber nur in einer Verbindung vorkommen? Wie viel wesentlich verschiedene Anordnungen, d. h. solche, die nicht durch eine blosse Permutation der Elemente aus einander hervorgehen, giebt es bei jeder Zahl? u. s. w.“*) Diese Anordnung von n Elementen nennt man aber heutzutage ein *Tripelsystem*.

Eingehend mit Tripelsystemen und ihrer Anwendung in der Algebra haben sich sodann die Herrn Noether**), Netto***), Moore†) und De Vries††) beschäftigt, die letzteren drei namentlich auch mit der Frage der Herstellbarkeit und mit der wirklichen Herstellung von Tripelsystemen bei den einzelnen Zahlen n . Man fand bald, dass Tripelsysteme nur möglich sind bei den Zahlen der Form $n = 6m + 1$ und $n = 6m + 3$ und dass die Anzahl der Tripel eines Systems — wenn ein solches existirt — $\frac{n(n-1)}{6}$ ist. Herr Netto hat abgesehen von einigen zurückführenden Sätzen gezeigt, wie bei den Primzahlen der Form $6m + 1$ eine cyklische Anordnung der Tripel möglich ist; ebenso, wenn $n = 6m + 3$ das 3-fache einer Primzahl der Form $6k + 5$ ist. Allein es blieb die Frage noch offen, ob bei jeder Zahl $6m + 1$ und $6m + 3$ Tripelsysteme existiren. Diese Frage hat dann Herr Moore

*) Ges. Werke Bd. II, S. 436.

**) Math. Ann. Bd. 15, (1879) S. 89 ff.

***) „Die Substitutionentheorie und ihre Anwendungen in der Algebra“. Leipzig, 1882, S. 220 ff. — Math. Ann. Bd. 42, (1892) S. 143 ff. Im Folgenden wird immer auf diese letztere Publication Bezug genommen.

†) Math. Ann. Bd. 43, (1893) S. 271 ff.

††) Rend. del Circolo Mat. di Palermo vol. 8. (1894). S. 222 ff.

in bejahendem Sinne entschieden; freilich in so complicirter Weise, dass eine weitere Vereinfachung erwünscht scheint.

Nun habe ich schon in einer früheren Arbeit „Ueber das Problem der Nachbargebiete“*) beiläufig erwähnt, dass dieses Problem in seiner arithmetischen Einkleidung jenem Steiner'schen Problem der Tripelsysteme verwandt ist. Als *Nachbarpunkte* bezeichne ich nämlich n Punkte auf einer Oberfläche von hinlänglich grosser Geschlechtszahl, deren jeder mit allen $n - 1$ übrigen durch Linien auf der Fläche derart verbunden ist, dass die $\frac{n(n-1)}{2}$ Verbindungslinien einander nicht schneiden. In gewissen Fällen zerlegen diese Verbindungslinien die Oberfläche in $\frac{n(n-1)}{3}$ Dreiecke. Setzt man nun an die n Punkte z. B. die n Zahlen $0, 1, 2, \dots, n - 1$ und gelingt es, von den $\frac{n(n-1)}{3}$ Dreiecken derart die Hälfte zu schraffiren, dass längs jeder Linie ein schraffirtes und ein nicht schraffirtes Dreieck aneinander grenzen, so ist ohne Weiteres zu übersehen, dass sowohl die $\frac{n(n-1)}{6}$ weissen, als die $\frac{n(n-1)}{6}$ schraffirten Dreiecke ein Tripelsystem bilden.

Die Ergebnisse meiner schon citirten Arbeit sollen daher im folgenden für den Bau von Tripelsystemen nutzbar gemacht werden. Dies führt dazu, das Problem der cyklischen Anordnung solcher Systeme im Falle $6m + 1$ und $6m + 3$ je auf ein anderes einfacheres arithmetisches Problem zu reduciren. Diese werden — abgesehen von den schon durch Herrn Netto erledigten Fällen — gelöst für die Fälle $n = 12k + 7$, wenn $4k + 3$ eine Primzahl mit der primitiven Wurzel 2 ist, $n = 6m + 3$, wenn $6m + 3$ das 3-fache einer beliebigen Primzahl ist, und ausserdem für alle übrigen Zahlen $6m + 1$ und $6m + 3$ unter 100. Mit der allgemeinen Lösung der beiden Probleme würde die erschöpfende Natur der Resultate von Herrn Moore mit der Eleganz derer von Herrn Netto verbunden sein.

§ 1.

Bedingung für die cyklische Anordnung der Tripel im Falle $n = 6m + 1$.

Im Falle $n = 6m + 1$ seien $0, 1, 2, \dots, 6m$ die $6m + 1$ Elemente, aus denen ein Tripelsystem gebildet werden soll. Unter einer *cyklischen Anordnung des Tripelsystems* wollen wir eine solche verstehen, bei der aus $\frac{n-1}{6} = m$ Tripeln alle übrigen durch cyklische Verschiebung

*) Math. Ann. Bd. 38, (1891) S. 477 ff. S. besonders die Anm. S. 496.

der Zahlen $0, 1, 2, \dots, 6m$ in der natürlichen Folge hervorgehen; z. B. für $n = 7$ entstehen so aus $(0 \ 1 \ 3)$ die 7 Tripel des Systems

0	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	0
3	4	5	6	0	1	2

Sei nun

$$\begin{array}{ccccccc} a_1, & b_1, & c_1; & a_2, & b_2, & c_2 & ; \dots; a_m, & b_m, & c_m; \\ a_1+1, & b_1+1, & c_1+1; & a_2+1, & b_2+1, & c_2+1 & ; \dots; a_m+1, & b_m+1, & c_m+1; \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \\ a_1+n-1, & b_1+n-1, & c_1+n-1; & a_2+n-1, & b_2+n-1, & c_2+n-1; & \dots; & a_m+n-1, & b_m+n-1, & c_m+n-1, \end{array}$$

wobei alle Zahlen natürlich mod. $(n=6m+1)$ zu nehmen sind, ein solches cykliches Tripelsystem, so sind für jede der m Columnen die 3 Differenzen zwischen den 3 Zahlen bei irgendwie festgelegter Folge stets dieselben, z. B. für die erste Colonne stets

$$b_1 - a_1, \quad c_1 - b_1, \quad a_1 - c_1.$$

Macht man die negativen dieser Differenzen durch Hinzufügung von $6m+1$ positiv, so ist die Summe der drei Zahlen stets $\equiv 0 \pmod{6m+1}$. Ausserdem kann weder dieselbe Differenz ein zweites Mal auftreten, noch auch ihre Ergänzung zu $6m+1$, — wofür wir kurz *Supplementzahl* sagen wollen, — da sonst gewisse Zahlenpaare in den Tripeln nicht nur einmal, sondern zwei Mal vorkämen. Umgekehrt erhält man augenscheinlich ein cykliches Tripelsystem, sobald die $3m$ Differenzen den angegebenen Bedingungen gemäss ausgewählt sind. Da nun alle möglichen Differenzen zwischen den Zahlen $0, 1, 2, \dots, 6m$ durch die Zahlen $1, 2, \dots, 6m$ gegeben sind, so ist die cykliche Anordnung eines Tripelsystems von $6m+1$ Elementen mit der Lösung des folgenden Problems äquivalent, das wir als *Differenzenproblem I.* bezeichnen:

I. Aus den Zahlen $1, 2, \dots, 6m$ sind m Gruppen von je dreien zu bilden, sodass

- 1) die Summe der drei stets $\equiv 0 \pmod{6m+1}$ ist,
- 2) alle $3m$ Zahlen von einander verschieden sind,
- 3) nicht zwei der $3m$ Zahlen sich zu $6m+1$ ergänzen.

Ersetzt man alle Differenzen, die $> 3m$ sind, durch ihre Supplementzahlen, so nimmt das Differenzenproblem die folgende Gestalt an:

1a. Die Zahlen $1, 2, \dots, 3m$ sind so in m Gruppen von je dreien zu ordnen, dass bei jeder der Gruppen entweder die Summe der drei Zahlen $= 6m+1$ oder aber die eine der Zahlen gleich der Summe der beiden andern ist*).

*) Will man umgekehrt eine Differenzenanordnung 1a zur Herstellung des Tripelsystems benutzen, so ist zu bemerken, dass entweder die Zahlen, welche

Für den Fall, dass $6m + 1$ eine Primzahl (mit der primitiven Wurzel g) ist, hat Herr Netto (a. a. O. § 4) dieses Problem implicite gelöst durch die Anordnung der Differenzen

$$(1) \quad g^0, g^m - g^0, -g^m; g^1, g^{m+1} - g^1, -g^{m+1}; \dots; g^{m-1}, g^{2m-1} - g^{m-1}, g^{2m-1}.$$

Eine zweite Lösung wäre

$$(2) \quad g^m, g^{2m} - g^m, -g^{2m}; g^{m+1}, g^{2m+1} - g^{m+1}, -g^{2m+1}; \dots$$

$$\dots; g^{2m-1}, g^{3m-1} - g^{2m-1}, -g^{3m-1}$$

Dass beide äquivalent, d. h. nicht wesentlich verschieden sind, ergibt sich daraus, dass die Tripel, die nach (2) gebildet werden, aus den nach (1) gebildeten durch Multiplication mit g^m hervorgehen.

§ 2.

Aus Nachbarconfigurationen ablesbare cyklische Tripelsysteme für
 $n = 6m + 1$.

Für eine weitere Classe von Zahlen der Form $6m + 1$ wird das Problem I durch die in meiner citirten Arbeit gegebenen Configurationen gelöst. Die S. 499 (a. a. O.) gegebene Gruppierung (G) der Zahlen 1, 2, . . . , $6m$ zu je dreien*)

$$(G) \quad \begin{cases} 1, & 3, \dots, 2m-3, 2m-1; 2m+1, 2m+3, \dots, 4m-3, 4m-1; \\ 2, & 4, \dots, 2m-2, 2m; 4m+1, 4m+3, \dots, 6m-3, 6m-1; \\ 6m-2, 6m-6, \dots, 2m+6, 2m+2; 6m, & 6m-4, \dots, 2m+8, 2m+4; \end{cases}$$

besitzt nämlich bereits stets die Eigenschaften 1) und 2) des Differenzenproblems. Es kommt nur darauf an, ob sich die $6m$ Columnen so in zweimal $3m$ sondern lassen, dass auch Eigenschaft 3) für jede dieser beiden Colonnengruppen besteht.

Wenn nun m eine ungerade Zahl ist; also $n = 6m + 1$ zugleich die Form $12k + 7$ hat und ausserdem $4k + 3$ eine Primzahl mit der primitiven Wurzel 2 ist, — dieser Fall spielte gerade bei meiner früheren Untersuchung eine ausgezeichnete Rolle — so kann man die Zahlen der mittelsten Zeile von (G) als die mod. $4k + 3 = 2m + 1$ genommenen Potenzen von 2 ansehen, wobei den ungeraden Potenzresten noch $8k + 4 = 4m$ addirt ist. Die Columnen der linken Hälfte von (G) haben dann sämmtlich die Gestalt

$$(3) \quad (2^\alpha) - 1, (2^\alpha), n - 2(2^\alpha) + 1,$$

die der rechten Hälfte aber

$$(4) \quad (2^\beta) + 4k + 2, (2^\beta) + 8k + 4, n - 2(2^\beta) + 1,$$

gleich der Summe der zwei andern sind, erst durch ihre Supplemente zu ersetzen sind, oder aber diese Differenzen rückwärts genommen werden müssen.

*) Die jetzige Schreibweise dieser Tabelle unterscheidet sich von der damaligen nur durch eine Vertauschung von Zeilen und Columnen.

wo die Potenzreste von $2^\alpha \bmod 4k + 3$ sämmtlich gerade, die von 2^β sämmtlich ungerade sein sollen, (2^α) und (2^β) diese Potenzreste bedeuten und α und β zusammen die Werthe $0, 1, 2, \dots, 4k + 1$ annehmen. Beschränkt man nun α und β entweder auf die geraden oder auf die ungeraden der Zahlen $0, 1, 2, \dots, 4k + 1$, so ist leicht zu zeigen, dass unter den $3m$ Zahlen, die man dabei aus (G) jedesmal beibehält, nicht zwei Supplementzahlen vorkommen. Da in (G) die Supplementzahlen der ersten Zeile in der dritten Zeile stehen, jedoch nie in derselben Colonne, und diejenigen der Zahlen in der linken Hälfte der zweiten Zeile in der rechten Hälfte derselben Zeile, so hat man nur zu zeigen, dass keine der 5 Gleichungen bestehen kann, in denen $n = 12k + 7$ und α und α' , sowie β und β' von einander verschieden sind,

- (5) $(2^\alpha) + (2^\beta) + 8k + 4 = n,$
- (6) $(2^\alpha) - 1 + n - 2(2^\alpha) + 1 = n,$
- (7) $(2^\alpha) - 1 + n - 2(2^\beta) + 1 = n,$
- (8) $(2^\beta) + 4k + 2 + n - 2(2^\alpha) + 1 = n,$
- (9) $(2^\beta) + 4k + 2 + n - 2(2^\beta) + 1 = n.$

Dies folgt aber sehr einfach aus der Annahme, dass 2 primitive Wurzel von $4k + 3$ und $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ entweder sämmtlich gerade oder sämmtlich ungerade sind.

Somit ist gezeigt, dass man aus der Anordnung (G) falls $m = 2k + 1$ und $4k + 3$ eine Primzahl mit der primitiven Wurzel 2 ist, unmittelbar zwei Lösungen des Problems I. ablesen kann, — oder in geometrischer Einkleidung — dass die in der Einleitung besprochene Schraffirung der Nachbarconfiguration in diesem Falle möglich ist.

Z. B. $n = 55, k = 4, 4k + 3 = 19$; 2 ist primitive Wurzel von 19. Die Anordnung (G) lautet

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35,
2	4	6	8	10	12	14	16	18	37	39	41	43	45	47	49	51	53,
52	48	44	40	36	32	28	24	20	54	50	46	42	38	34	30	26	22.

Die Reste der ungeraden Potenzen von 2 mod. 19 sind

$$2, 8, 13, 14, 18, 15, 3, 12, 10,$$

und, wenn man die ungeraden unter ihnen um $8k + 4 = 36$ vermehrt,

$$2, 8, 49, 14, 18, 51, 39, 12, 10.$$

Folglich bilden sowohl diejenigen 9 Colouunen aus (G), welche diese Zahlen in der Mittelstelle haben, als auch die 9 übrigen je eine Lösung von I; d. h. wir haben die Lösungen

$$(10) \quad \begin{cases} 1 & 7 & 31 & 13 & 17 & 33 & 21 & 11 & 9 \\ 2 & 8 & 49 & 14 & 18 & 51 & 39 & 12 & 10 \\ 52 & 40 & 30 & 28 & 20 & 26 & 50 & 32 & 36 \end{cases}$$

und

$$(11) \quad \begin{cases} 3 & 5 & 15 & 19 & 23 & 25 & 27 & 29 & 35 \\ 4 & 6 & 16 & 37 & 41 & 43 & 45 & 47 & 53 \\ 48 & 44 & 24 & 54 & 46 & 42 & 38 & 34 & 22. \end{cases}$$

§ 3.

Weitere Lösungen des Differenzenproblems I.

Das Problem I ist jedoch auch in solchen Fällen lösbar, wo $6m+1$ weder eine Primzahl ist noch der im vorigen Paragraphen zu Grunde gelegten Bedingung genügt. Dies soll durch seine Lösung — und zwar in der leichter zu übersehenden Form Ia — für alle Zahlen unter 100 gezeigt werden, die weder der einen noch der andern Bedingung genügen, nämlich für die Zahlen 25, 49, 85, 91.

Für $n=25$ sind z. B. zwei Lösungen — es gibt deren eine ganze Anzahl —

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 6 & 5 & 11 & 7 & 9 & 5 \\ 3 & 8 & 7 & 9 & 10 & 12 & 8 & 3 \\ 4 & 10 & 12 & 11 & 4 & 6 & 1 & 2 \end{array}$$

$$n = 49$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 23 & 19 & 15 & 11 & 21 & 16 & 9 & 6 \\ 18 & 20 & 22 & 24 & 17 & 13 & 7 & 5 \\ 8 & 10 & 12 & 14 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

$$n = 85$$

$$\begin{array}{cccccc|cccccc} 41 & 37 & 33 & 29 & 25 & 21 & 17 & 39 & 31 & 27 & 23 & 15 & 12 & 7 \\ 30 & 32 & 34 & 36 & 38 & 40 & 42 & 35 & 28 & 19 & 13 & 9 & 11 & 5 \\ 14 & 16 & 18 & 20 & 22 & 24 & 26 & 4 & 3 & 8 & 10 & 6 & 1 & 2 \end{array}$$

$$n = 91$$

$$\begin{array}{cccccc|cccccc} 45 & 41 & 37 & 33 & 29 & 25 & 21 & 43 & 35 & 31 & 27 & 23 & 17 & 13 & 10 \\ 32 & 34 & 36 & 38 & 40 & 42 & 44 & 39 & 30 & 28 & 19 & 12 & 15 & 7 & 9 \\ 14 & 16 & 18 & 20 & 22 & 24 & 26 & 4 & 5 & 3 & 8 & 11 & 2 & 6 & 1 \end{array}$$

§ 4.

Bedingung für cyklische Anordnung der Tripel im Falle $n = 6m + 3$.

Wenn $n = 6m + 3$, ist

$$\frac{n(n-1)}{6} = \frac{(6m+3)(6m+2)}{6} = (2m+1)(3m+1)$$

nicht durch $6m + 3$ theilbar; eine cyklische Anordnung der Tripel aus den Elementen $0, 1, 2, \dots, 6m + 2$ genau wie im Falle $6m + 1$ ist daher hier nicht möglich. Man kann aber zunächst alle $6m + 3$ Zahlenpaare mit der Differenz $2m + 1$ zu $2m + 1$ Tripeln vereinigen, indem man einfach von

$$(12) \quad 0, \quad 2m + 1 \quad 4m + 2$$

etwa ausgeht und daraus durch cyklische Verschiebung der Zahlen $0, 1, 2, \dots, 6m + 2$ $2m$ andere Tripel ableitet. Bei der $(2m + 1)^{\text{ten}}$ Schiebung würde nämlich das Ausgangstripel (12) wieder erscheinen.

In Bezug auf die $6m$ übrigen Differenzen ist dann auf Grund genau derselben Ueberlegungen wie in § 1 das *Differenzenproblem II* zu lösen:

II. Aus den Zahlen $0, 1, 2, \dots, 2m, 2m + 2, \dots, 4m + 1, 4m + 3, \dots, 6m + 2$ sind m Gruppen von je dreien zu bilden, sodass

- 1) die Summe der drei stets $\equiv 0 \pmod{6m + 3}$ ist,
- 2) alle $3m$ Zahlen von einander verschieden sind,
- 3) nicht zwei der $3m$ Zahlen sich zu $6m + 3$ ergänzen.

Ersetzt man wieder alle Zahlen, die $> 3m + 1$ sind, durch ihre Supplementzahlen in Bezug auf $6m + 3$, so erhält man die einfachere Fassung desselben Problems:

IIa. Die Zahlen $1, 2, \dots, 2m, 2m + 2, \dots, 3m + 1$ sind so in m Gruppen von je dreien zu ordnen, dass bei jeder Gruppe entweder die Summe der drei Zahlen $= 6m + 3$ oder aber die eine der Zahlen gleich der Summe der beiden andern ist.

Dieses Problem ist wiederum von Herrn Netto (a. a. O. § 5) für den Fall

$$(13) \quad n = 6m + 3 = 3(6k + 5),$$

wo $6k + 5$ eine Primzahl ist, durch die Anordnung*)

$$(14) \quad g^0, g^m - g^0, -g^m; g^1, g^{m+1} - g^1, -g^{m+1}; \dots; g^{m-1}, g^{2m-1} - g^{m-1}, -g^{2m-1},$$

wo g eine primitive Wurzel von $2m + 1 = 6k + 5$ ist und der Bedingung

$$(15) \quad g^m \equiv 1 \pmod{3}$$

*) Für die Vergleichung mit den Formeln von Herrn Netto bemerke ich, dass der Buchstabe m in § 5 dort mit unserm k zu identificiren ist, sodass also $3m + 2$ in den Netto'schen Formeln bei uns durch m zu ersetzen ist.

genügt, die Potenzen von g aber mod. $3(2m+1)$ genommen sind. Die Multiplication der Zahlen in (14) mit g^m würde abgesehen von der Umkehrung aller Vorzeichen dieselbe Anordnung wieder erzeugen, also auch kein neues Tripelsystem liefern.

Im folgenden Paragraphen soll jedoch nun gezeigt werden, dass das Differenzenproblem II durch die Anordnung (14) thatsächlich für das 3-fache jeder beliebigen Primzahl gelöst ist, sobald nur die Bedingung (15) für g noch durch eine etwas weitere ersetzt wird.

§ 5.

Lösung des Differenzenproblems II für $6m+3$, falls $2m+1$ eine beliebige Primzahl.

Es sei $2m+1$ eine beliebige Primzahl und g eine zugehörige primitive Wurzel, die der Bedingung

$$(16) \quad g \equiv 1 \pmod{3}$$

genügt. Eine solche existirt stets, *ausser wenn $2m+1=3$, also $6m+3=9$ ist.* Denn, wenn eine beliebige primitive Wurzel g' von $2m+1$ jene Eigenschaft nicht hat, so ist dies bei

$$g' + 2m + 1 \quad \text{oder} \quad g' + 4m + 2$$

sicher der Fall, sobald nicht $2m+1=3$ ist.

Ist g so bestimmt, so stellt die im vorigen Paragraphen aus den Entwicklungen von Herrn Netto entnommene Anordnung

$$(17) \quad \begin{cases} g^0 & g^1 & \dots & g^{m-1} \\ -g^m & -g^{m+1} & \dots & -g^{2m-1} \\ g^m - g^0 & g^{m+1} - g^1 & \dots & g^{2m-1} - g^{m-1} \end{cases} \pmod{6m+3}$$

für jede Form der Primzahl $2m+1$, d. h. sowohl für

$$a) \quad 2m+1 = 6k+1.$$

als auch

$$b) \quad 2m+1 = 6k+5$$

eine Lösung des Differenzenproblems II dar.

Da mit der Bedingung (16) zugleich auch die Bedingung (15) von g erfüllt wird, so könnten wir uns beim Beweis auf den Fall a) beschränken und für b) auf die Ableitung von Herrn Netto berufen. Wir ziehen es aber vor, nochmals den ganzen Beweis zu liefern, um deutlicher hervortreten zu lassen, wie sich die Fälle a) und b) scheiden.

Zunächst ist evident, dass die Summe der drei übereinander stehenden Zahlen in (17) stets $\equiv 0 \pmod{6m+3}$ ist. Dass die Zahlen der zwei ersten Zeilen in (17) sämmtlich verschieden und nicht zwei von ihnen Supplementzahlen sind, ergibt sich folgendermassen. Die Zahlen der zwei ersten Zeilen sind nicht durch 3 theilbar, da g nicht durch 3

theilbar, der Modul aber $3(2m+1)$ ist. Da ferner g primitive Wurzel von $2m+1$ ist und (16) besteht, so sind auch die Potenzreste von

$$g^0, g^1, \dots, g^{2m-1} \bmod{3(2m+1)}$$

sämmtlich verschieden. Es ist daher nur noch zu zeigen, dass nicht zwei dieser Potenzreste Supplementzahlen $\bmod{6m+3}$ sein können.

Wenn nun irgend zwei dieser Potenzen Supplementzahlen wären, so müsste auch eine Potenz, etwa g^a mit $g^0 = 1$ Supplementzahl sein, d. h. es wäre

$$(18) \quad g^a \equiv -1 \bmod{3(2m+1)}.$$

Dies erforderte aber die zwei Congruenzen

$$(19) \quad g^a \equiv -1 \bmod{(2m+1)},$$

$$(20) \quad g^a \equiv -1 \bmod{3},$$

von denen die letzte nach (16) ausgeschlossen ist.

Die Zahlen der ersten beiden Zeilen von (17) sind also sämtlich nicht durch 3 theilbar, sämtlich verschieden und nicht zwei von ihnen sind Supplementzahlen.

Da die Zahlen der dritten Zeile von (17) aus denen der ersten bezw. nur durch Multiplication mit $g^m - g^0$ entstehen, ist schon bewiesen, dass auch sie sämtlich verschieden sind und nicht zwei von ihnen sich zu $6m+3$ ergänzen. Der ganze Beweis ist vollständig, sobald noch gezeigt ist, dass die Zahlen der dritten Zeile sämtlich durch 3 theilbar sind.

Es ist

$$g^m + g^0 \equiv 0 \bmod{2m+1};$$

dagegen ist die Congruenz

$$g^m + g^0 \equiv 0 \bmod{6m+3}$$

durch die vorangehende Betrachtung ausgeschlossen, da g^m und g^0 nicht Supplementzahlen sind. Also ist entweder

$$\alpha) \quad g^m + g^0 \equiv 2m+1 \bmod{6m+3}$$

oder

$$\beta) \quad g^m + g^0 \equiv 4m+2 \bmod{6m+3}.$$

Wenn nun Fall a) vorliegt, d. h. wenn $m = 3k$ ist, so würde nach $\alpha)$ g^m durch 3 theilbar sein, was schon ausgeschlossen ist; also muss im Falle a) die Congruenz $\beta)$ gelten, woraus dann folgt

$$g^m - g^0 \equiv 4m \equiv 12k \bmod{6m+3},$$

sodass alle Zahlen der dritten Zeile in (17) durch 3 theilbar sind.

Wenn aber b) vorliegt, d. h. $m = 3k+2$ ist, so würde nach $\beta)$ g^m durch 3 theilbar sein; also muss jetzt $\alpha)$ gelten, woraus in Verbindung mit b) wieder folgt, dass $g^m - g^0$ durch 3 theilbar ist.

Als Beispiele mögen dienen $6m + 3 = 15, 21$.

$6m + 3 = 15 = 3 \cdot 5$; $g = 10$; die Lösung des Differenzenproblems nach der Anordnung (17) lautet:

$$\begin{array}{ccc} 5 & 1 & 7 \\ 5 & 11 & 2 \\ 5 & 3 & 6. \end{array}$$

$n = 21 = 3 \cdot 7$; $g = 10$; die Lösung nach (17) lautet

$$\begin{array}{cccc} 7 & 1 & 10 & 16 \\ 7 & 8 & 17 & 2 \\ 7 & 12 & 15 & 3. \end{array}$$

§ 6.

Der Ausnahmefall $6m + 3 = 9$.

Die einzige Ausnahme von der Lösung des Differenzenproblems II nach der Methode des vorigen Paragraphen bildet der Fall $n = 9$, d. h. der erste überhaupt auftretende Fall, wenn von dem trivialen $n = 3$ abgesehen wird. Dass bei $6m + 3 = 9$ aber überhaupt keine Lösung von II *existiert*, sieht man sofort aus der Form IIa des Differenzenproblems. Die Zahlen 1, 2, 4 haben eben weder die Summe 9, noch ist die grösste von ihnen gleich der Summe der beiden andern.

Als Ersatz kann hier die Differenzenanordnung gelten:

$$(21) \quad \begin{array}{ccc} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1. \end{array}$$

Bei Bildung der Tripel mit den Differenzen $a, a, 2a$ müssen dann aus einem Tripel die übrigen immer durch die cyklische Substitution

$$(0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8)^3$$

hergeleitet werden. Man erhält so das Tripelsystem

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 6 & 2 & 5 & 8 & 6 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 4 & 7 & 4 & 7 & 1 & 1 & 4 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 2 & 5 & 8 & 6 & 0 & 3 & 5 & 8 & 2. \end{array}$$

§ 7.

Weitere Lösungen des Differenzenproblems für $6m + 3$.

Auch das Differenzenproblem II ist in seiner Lösbarkeit nicht auf die bisher behandelten Fälle beschränkt. Es sei zum Schluss gestattet, für alle Zahlen $6m + 3$ unter 100, wo $2m + 1$ keine

Primzahl ist, eine Lösung anzugeben, was wiederum in der leichter zu übersehenden Form IIa geschehen soll.

$$6m + 3 = 27$$

$$9 \quad 13 \quad 12 \quad 8 \quad 6$$

$$9 \quad 11 \quad 10 \quad 7 \quad 4$$

$$9 \quad 3 \quad 5 \quad 1 \quad 2;$$

$$6m + 3 = 45$$

$$15 \quad 21 \quad 20 \quad 19 \quad 22 \quad 13 \quad 12 \quad 4$$

$$15 \quad 18 \quad 17 \quad 16 \quad 14 \quad 11 \quad 7 \quad 3$$

$$15 \quad 6 \quad 8 \quad 10 \quad 9 \quad 2 \quad 5 \quad 1;$$

$$6m + 3 = 63$$

$$21 \quad 31 \quad 30 \quad 29 \quad 28 \quad 27 \quad 20 \quad 18 \quad 17 \quad 16 \quad 9$$

$$21 \quad 26 \quad 25 \quad 24 \quad 23 \quad 22 \quad 19 \quad 15 \quad 13 \quad 11 \quad 7$$

$$21 \quad 6 \quad 8 \quad 10 \quad 12 \quad 14 \quad 1 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 2;$$

$$6m + 3 = 75$$

$$25 \quad 37 \quad 36 \quad 35 \quad 34 \quad 33 \quad 32 \quad 24 \quad 22 \quad 21 \quad 19 \quad 16 \quad 12$$

$$25 \quad 31 \quad 30 \quad 29 \quad 28 \quad 27 \quad 26 \quad 23 \quad 20 \quad 18 \quad 14 \quad 10 \quad 8$$

$$25 \quad 7 \quad 9 \quad 11 \quad 13 \quad 15 \quad 17 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 6 \quad 4;$$

$$6m + 3 = 81$$

$$27 \quad 39 \quad 38 \quad 37 \quad 36 \quad 35 \quad 34 \quad 40 \quad 26 \quad 24 \quad 21 \quad 20 \quad 12 \quad 10$$

$$27 \quad 33 \quad 32 \quad 31 \quad 30 \quad 29 \quad 28 \quad 23 \quad 25 \quad 22 \quad 16 \quad 14 \quad 8 \quad 7$$

$$27 \quad 9 \quad 11 \quad 13 \quad 15 \quad 17 \quad 19 \quad 18 \quad 1 \quad 2 \quad 5 \quad 6 \quad 4 \quad 3;$$

$$6m + 3 = 99$$

$$33 \quad 49 \quad 48 \quad 47 \quad 46 \quad 45 \quad 44 \quad 43 \quad 42 \quad 32 \quad 31 \quad 30 \quad 29 \quad 24 \quad 22 \quad 20 \quad 12$$

$$33 \quad 41 \quad 40 \quad 39 \quad 38 \quad 37 \quad 36 \quad 35 \quad 34 \quad 25 \quad 26 \quad 27 \quad 28 \quad 14 \quad 16 \quad 18 \quad 8$$

$$33 \quad 9 \quad 11 \quad 13 \quad 15 \quad 17 \quad 19 \quad 21 \quad 23 \quad 7 \quad 5 \quad 3 \quad 1 \quad 10 \quad 6 \quad 2 \quad 4.$$

Der noch ausstehende Beweis für die allgemeine Lösbarkeit der Differenzenprobleme I und II und die Angabe einer oder mehrerer allgemein gültiger Lösungsmethoden würde die Frage der Construction der Tripelsysteme erheblich fördern. Es würde das Tripelsystem ausser bei $n = 9$ stets so gebaut werden können, dass die Tripel-

gruppe die der cyklischen Substitutionen enthält. Erwägt man aber, dass bei den Primzahlen $6m + 1$ noch von der Netto'schen *verschiedene* Lösungen des Problems I möglich sind, z. B. bei 31 nach § 2, ferner, dass bei 7 eine, bei 13 ebenfalls nur eine, bei 19 vier, bei 25 schon erheblich mehr verschiedene Lösungen existiren und dass Aehnliches bei den Zahlen $6m + 3$ gilt, so scheint es in der That, dass nicht nur die Probleme I und II stets lösbar sind (ausser bei $n = 9$), sondern dass auch die Anzahl der Lösungen im Allgemeinen mit der Zahl selbst wächst.

Giessen, 17. October 1896.