II. Ueber die freie Oberfläche bewegter Flüssigkeit; ein Beitrag zur Theorie der discontinuirlichen Flüssigkeitsbewegungen; von A. Oberbeck.

1. Für die freie Oberfläche einer gleichmässig sich bewegenden Flüssigkeit von mässiger Ausdehnung gilt bekanntlich dieselbe Bedingung, wie für die „Trennungsflächen“, welche sich im Innern einer Flüssigkeit bilden können, die Bedingung, dass der Druck überall denselben Werth besitzen muss.

Bei Ausschluss von Reibung und bei Beschränkung auf stationäre Bewegungen ist der Druck p durch die Gleichung bestimmt:

$$\frac{p}{\rho} = C - \frac{1}{2}v^2 + V,$$

wo v die Geschwindigkeit, V das Potential der Kräfte und C eine Constante ist.

Die Berechnung solcher Grenzflächen¹⁾ wurde bisher nur für den Fall ausgeführt, dass *keine beschleunigenden Kräfte* auf die Flüssigkeit wirken, sodass also die Geschwindigkeit in der ganzen Ausdehnung der Grenzfläche denselben Werth hat. Aber auch bei dieser Annahme konnte das Problem nur für die Strömung in einer Ebene gelöst werden.

Für eine Reihe einfacher, auch dem Versuch leicht zugänglicher Fälle habe ich die freie Oberfläche von Flüssigkeiten berechnet, welche sich unter dem Einfluss der Schwere bewegen, wobei auch die Annahme, dass die Bewegung ausschliesslich in einer Ebene erfolgt, nicht mehr festgehalten wird.

Dabei zeigte sich, dass in der Feststellung der Bedingungen für die freie Oberfläche noch eine bisher nicht hervorgehobene Eigenthümlichkeit zu beachten ist.

1) H. von Helmholtz, Berl. Monatsber. p. 215. 1868. G. Kirchhoff, Vorlesungen über math. Physik p. 291. 1877. M. Planck, Wied. Ann. 21. p. 499. 1884. W. Voigt, Gött. Nach. Nr. 13. p. 347. 1888. P. Molenbroek, Wied. Ann. 35. p. 62. 1889.

Die oben angeführte Gleichung für die freie Oberfläche kann auch geschrieben werden:

$$E = \frac{1}{2} v^2 - V,$$

d. h. *die Gesamtenergie der Volumeneinheit der an der freien Oberfläche sich bewegenden Flüssigkeit besitzt überall denselben Werth.*

Dieser Satz ist aber nicht allgemein richtig. Bei vielen in der Natur vorkommenden Flüssigkeitsbewegungen gibt es Stellen ihrer Bahn, in welchen ihre Energie eine Veränderung erfährt. Der eben besprochene Satz kann deshalb auch nur auf solche Theile der freien Oberfläche angewandt werden, welche nicht durch Orte unstätiger Energieänderung getrennt sind. Verfolgt man aber die Flüssigkeit von einem derartigen Gebiet durch eine Curve discontinuirlicher Energieänderung auf ein anderes, so muss sich die Constante E sprungweise ändern.

Als ein naheliegendes Beispiel kann man einen Wasserfall ansehen.

Die freie Oberfläche des Oberstromes und des Wasserfalls selbst würden mit Benutzung derselben Constanten zu berechnen sein. Am Fuss des Falles findet aber ein bedeutender Energieverlust statt. Für die freie Oberfläche des unteren Stromes ist eine andere Energieconstante zu benutzen. Es handelt sich hier um eine Erscheinung, welche der Energieänderung ähnlich ist, die ein Massenpunkt erfahren muss, wenn derselbe auf einer vorgeschriebenen, aber an gewissen Stellen unstetig sich ändernden Bahn bleiben soll.

Bei dem oben angeführten Beispiel vollzieht sich die Energieänderung in einem zwischen zwei Querschnitten der Flüssigkeit befindlichen Raum. Es gibt auch Flüssigkeitsbewegungen, bei denen die Energieänderung in einer so dünnen Schicht stattfindet, dass man dafür annähernd einen einzigen Querschnitt annehmen kann.

Die Erscheinungen, um welche es sich dabei handelt, werden vielen schon gelegentlich aufgefallen sein.

Nichtsdestoweniger scheinen mir dieselben als einfache Beispiele für die soeben angestellten Betrachtungen von einigem Interesse. Nach einer kurzen Beschreibung dieser

Bewegungen in dem zweiten Abschnitt folgt eine Berechnung derselben in dem letzten Abschnitt, aus welcher die Gestalt der freien Oberfläche, insbesondere auch die discontinuirliche Aenderung derselben sich ergibt.

2. Lässt man einen verticalen Wasserstrahl von mässiger Geschwindigkeit auf eine horizontale Platte fallen, so breitet sich die Flüssigkeit vom Mittelpunkt des Strahles aus in einer sehr dünnen Schicht nach allen Seiten aus. In einer Entfernung von einigen Centimetern erhebt sich die freie Oberfläche zu einer Höhe von einigen Millimetern. Von dort strömt die Flüssigkeit mit erheblich geringerer Geschwindigkeit nach dem Rande der Platte ab. War die Platte horizontal und nicht zu klein, so erfolgt die Niveauänderung in einem Kreise um den Mittelpunkt des Strahls. Die bestehende Figur gibt einen

Durchschnitt der beschriebenen Erscheinung. Der Versuch lässt sich auch mit einem Alkoholstrahl anstellen. Das Material der Platte ist von geringem Einfluss. Es wurden Glasplatten, Metallplatten und Holzplatten benutzt. Hiernach wird man annehmen dürfen, dass die Flüssigkeit fast ohne Reibung über die Platte gleitet.

Der Radius des zuvor erwähnten Kreises, welcher als Unstetigkeitskreis bezeichnet werden soll, ist hauptsächlich von der Geschwindigkeit des zufließenden Wassers abhängig. Bei kleinen Geschwindigkeiten ist derselbe sehr klein, sodass sich dann nur eine ringförmige Vertiefung um den Mittelpunkt des Strahls bildet. Bei Geschwindigkeiten des Strahls von 100 bis 500 cm ergaben sich Kreise von 2 bis zu 6 cm Radius. Wurde die Geschwindigkeit noch weiter gesteigert, so wurde die Erscheinung dadurch getrübt, dass das aufschlagende Wasser zu spritzen begann.

Die Versuche wurden mit den einfachsten Mitteln angestellt. Ein an dem Hahn der Wasserleitung befestigter Schlauch führte zu einer Glasröhre, deren innerer Durchmesser ungefähr 4 mm betrug. Die Ausflussmenge wurde durch Verstellen des Hahnes verändert und gemessen, indem

die Zeit bestimmt wurde, in welcher ein gewisses Flüssigkeitsvolumen ausströmte. Die Geschwindigkeit konnte dann aus dem Querschnitt des Strahles bestimmt werden, welcher die Oeffnung nahezu cylindrisch verliess. Letztere befand sich stets in geringer Entfernung über der Platte.

Der Radius des Unstetigkeitskreises hängt mit der Höhe der Niveauerhebung zusammen. Dieselbe ist dadurch bedingt, dass sich an den Rändern der Platte infolge der Oberflächenspannung eine convexe Fläche bildet, welche bewirkt, dass nach dem Aufhören des Zuflusses auf der Platte eine Schicht von einigen Millimetern Höhe sich erhält. Wird die Höhe dieser Schicht dadurch vergrössert, dass die Ränder der Platte mit einer verticalen Wand von geringer Höhe versehen werden, so wird die Flüssigkeit tiefer und infolge dessen der Unstetigkeitskreis kleiner.

Man kann diese Versuche noch in mancherlei Weise verändern.

Lässt man den Strahl auf die horizontale Platte in schräger Richtung treffen, so entsteht eine Unstetigkeitscurve, welche bei geringer Neigung des Strahls noch nahezu kreisförmig ist. Doch fällt der Mittelpunkt des Strahls nicht mehr mit dem Mittelpunkt des Kreises zusammen, sondern ist nach der Seite verschoben, nach welcher der auffallende Strahl geneigt ist. Bei einem grösseren Einfallswinkel des Strahls hat die Unstetigkeitscurve eine mehr elliptische Form.

Ist der Strahl vertical, die Platte aber etwas geneigt aufgestellt, so ist die Unstetigkeitscurve hauptsächlich auf der oberen Seite der Platte gut ausgebildet und liegt dort dem Mittelpunkt des Strahles nahe, während sie auf der unteren abgeflacht ist und entfernter liegt.

Zwei verticale Strahlen, welche neben einander auf dieselbe horizontale Platte fallen, beeinflussen sich fast gar nicht, so lange ihre Unstetigkeitskreise sich nicht berühren. Decken sich dieselben aber zum Theil, so erhebt sich in ihrer gemeinsamen Sehne die Flüssigkeit in einer dünnen, verticalen Schicht, welche sich in ihrer Ebene in heftig fortgeschleuderte Tropfen auflöst. Die nicht zusammenfallenden

Theile der beiden Unstetigkeitscurven werden hierdurch wenig verändert.

3. Die zuerst beschriebenen Versuche, bei welchen ein verticaler Strahl eine horizontale Platte trifft, lassen sich durch eine einfache Rechnung darstellen.

Denkt man sich um den Mittelpunkt des Strahls einen kleinen Kreis beschrieben, so ist die Bewegung der Flüssigkeit ausserhalb dieses Kreises nahezu horizontal. Jedenfalls sind überall die Verticalcomponenten verschwindend klein im Vergleich zu der ziemlich bedeutenden Horizontalgeschwindigkeit.

Da ferner die Reibung bei dieser Bewegung keinen Einfluss auszuüben scheint, so kann man die Geschwindigkeit in der ganzen, überall nur geringen Tiefe als gleich gross ansehen.

Da endlich die Gestalt des Plattenrandes, wenn die Platte nicht zu klein ist, die Bewegung nicht weiter beeinflusst, so kann die horizontale Fläche als unendlich gross angenommen werden.

Aus den oben angeführten Gründen kann man sich die Horizontalebene vor Beginn des Zuflusses mit einer Flüssigkeitsschicht von geringer Höhe h bedeckt denken. Wir nehmen an, dass dieselbe in grosser Entfernung von dem Mittelpunkte des Strahles auch während des Zuflusses dadurch constant erhalten wird, dass das zuströmende Wasser entfernt wird, entsprechend dem Verhalten von Platten von endlicher Grösse, wo das überschüssige Wasser über den Rand der Platte abfließt.

Hiernach erhält man die folgenden Bewegungsgleichungen für die Flüssigkeit, mit Ausschluss des kleinen, um den Mittelpunkt des Strahles beschriebenen Kreises. Es sei r die Entfernung eines Punktes von diesem Mittelpunkt, die Tiefe der Flüssigkeit sei dort x und v die radiale Geschwindigkeit.

Bezeichnet man mit m das in der Zeiteinheit zufließende Volumen der Flüssigkeit, deren Dichtigkeit gleich Eins angenommen wird, so ist:

$$(1) \quad m = 2\pi r \cdot x \cdot v.$$

In dieser Gleichung sind x und v als Functionen von

r anzusehen. Für die freie Oberfläche gilt ferner die Gleichung:

$$(2) \quad e = v^2 + 2 G x,$$

wenn die Schwere als einzig wirkende Kraft angenommen wird. Die Grösse e ist eine Constante; doch kann dieselbe, wie früher besprochen, von einer Unstetigkeitscurve an einen anderen Werth annehmen.

Durch Elimination von x erhält man zur Berechnung von v :

$$(3) \quad v^3 - e \cdot v + \frac{Gm}{r\pi} = 0.$$

Diese Gleichung dritten Grades liefert nur dann positive, reelle Werthe für v , wenn die Bedingung des irreduciblen Falles erfüllt ist.

Setzt man:

$$(4) \quad \cos \gamma = -\frac{G \cdot m}{2\pi r} \sqrt{\frac{27}{e^3}},$$

so muss der absolute Werth des rechts stehenden Ausdruckes kleiner als Eins sein. Der Winkel γ mag so gewählt werden, dass derselbe zwischen π und $3\pi/2$ liegt.

Für v erhält man dann zwei mögliche, positive Wurzeln:

$$(5) \quad v_1 = \sqrt{\frac{4e}{3}} \cdot \cos \frac{\gamma}{3}, \quad (6) \quad v_2 = \sqrt{\frac{4e}{3}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi - \gamma}{3} \right).$$

Die dritte Wurzel würde für v einen negativen Werth geben. Ist v bekannt, so ergibt sich der zugehörige Werth von x nach Gl. (1). Um zu entscheiden, welche Werthe für v und x zu wählen sind, ist es zweckmässig, die Veränderungen dieser Grössen mit wachsendem r zu verfolgen. Durch Differentiation der Gleichungen (1) und (2) erhält man:

$$\frac{dx}{dr} = \frac{mv}{\pi r^2 (e - 2v^2)}, \quad \frac{dv}{dr} = -\frac{mG}{\pi r^2 (e - 2v^2)}.$$

Es kommt hierbei hauptsächlich auf das Vorzeichen des Ausdruckes $e - 2v^2$ an. Wenn derselbe an einer Stelle der Bahn verschwindet, so würden dort v und x discontinuirliche Veränderungen erleiden.

Es mag hier noch bemerkt werden, dass Sir William Thomson¹⁾ auf eine ähnliche Formel geführt wurde bei der

1) W. Thomson, Phil. Mag. (5) 22. p. 355. 1886.

Berechnung der Tiefe eines Flusses, welcher zwischen parallelen Seitenwänden über einen unebenen Boden fliesst.

Da für sehr grosse Werthe von r v sehr klein wird, so besitzt dort e den Werth $2Gh$. Setzt man:

$$(7) \quad e_1 = 2Gh,$$

so ist für dasjenige Gebiet der Ebene, für welches dieser Werth gilt: $e_1 > 2v^2$. Hier wächst x und v nimmt ab. Für kleine Werthe von r ist v gross und x klein. Es sei dort:

$$(8) \quad e_2 = v_0^2 + 2Ga,$$

wo $2Ga$ klein ist im Vergleich zu v_0^2 . Dort ist also: $e - 2v^2$ negativ. Daher nimmt x ab und v wächst mit zunehmendem r .

Hiernach ist für das erste Gebiet, da γ mit zunehmendem r wächst, die Wurzel v_1 zu wählen. Auch ist dort in der Gleichung $e = e_1$ zu setzen. Für das zweite Gebiet gilt die Wurzel v_2 (mit Benutzung der Constanten e_2). Die Abgrenzung des ersten Gebietes gegen das zweite folgt durch die Erwägung, dass nach Gl. (4) r nicht unter einen gewissen Werth sinken kann. Man erhält diesen Grenzwert ϱ , wenn $\gamma = \pi$ ist,

$$(9) \quad \varrho = \frac{m}{h^{3/2}} \sqrt{\frac{27}{32\pi^2 G}}.$$

Bezeichnet man die hierzu gehörenden Werthe von v und x mit ω und ξ , so ist:

$$(10) \quad \omega = \sqrt{\frac{2Gh}{3}}, \quad \xi = \frac{2h}{3}.$$

Diese Gleichungen geben also den Radius des Unstetigkeitskreises, die dort beginnende, kleinere Geschwindigkeit und die plötzlich eintretende grössere Tiefe.

Der weitere Verlauf der Strömung und die Gestalt der freien Oberfläche von dort bis zu grossen Werthen von r folgt aus den Gleichungen (4) und (5). Es ist:

$$(11) \quad \cos \gamma = -\frac{\varrho}{r}, \quad v = 2\omega \cos \frac{\gamma}{3}, \quad x = -\frac{\xi}{2} \frac{\cos \gamma}{\cos \frac{\gamma}{3}}.$$

Für das zweite, innere Gebiet erhält man:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \gamma = -\frac{Gm}{2\pi r} \sqrt{\frac{27}{(v_0^2 + 2Ga)^3}}, \\ v = 2 \sqrt{\frac{(v_0^2 + 2Ga)}{3}} \cos \frac{2\pi - \gamma}{3}, \quad x = \frac{m}{2\pi r v}. \end{array} \right.$$

Nimmt man an, dass für einen kleinen um den Mittelpunkt des Strahles gezogenen Kreis mit dem Radius r_0 die Geschwindigkeit v_0 von derselben Grössenordnung wie in dem auffallenden Strahl selbst ist, so erhält man für $\cos \gamma$ sehr kleine Werthe. Der Winkel γ ist also nur wenig kleiner als $2\pi/3$ und nähert sich noch weiter diesem Werthe mit wachsendem r .

Dementsprechend ist v bis an die Grenze des Unstetigkeitskreises fast constant, während die Tiefe der Flüssigkeit fortdauernd abnimmt. Ich habe diese Rechnungen auf das folgende Beispiel angewandt. Es sei die in der Zeiteinheit zufließende Menge $m = 100$ ccm, die Höhe in grosser Entfernung $h = 0,4$ cm. Für den Kreis $r_0 = 0,5$ cm sei die Geschwindigkeit 400 cm/sec.

Dann ergibt sich für den Unstetigkeitskreis:

$$\varrho = 3,69 \text{ cm}, \quad \omega = 16,18 \text{ cm/sec}, \quad \xi = 0,2667 \text{ cm}.$$

Im inneren Gebiete bleibt die Geschwindigkeit nahezu constant auf 400 cm. Der Winkel γ beträgt schon für $r=r_0$ $269^\circ 51'$ und nähert sich noch mehr dem Grenzwert von 270° mit wachsendem r .

Dagegen nimmt die Tiefe mit wachsendem r von 0,08 bis 0,01 cm ab. Hiernach ist $2Gx$ sehr klein im Vergleich zu v^2 . Die Dicke der Flüssigkeitsschicht nimmt plötzlich einen 27fachen Werth an, während die Geschwindigkeit in demselben Verhältniss kleiner wird.

Aus Gleichung (9) folgen ferner die bei den Versuchen auftretenden Erscheinungen: Der Radius des Unstetigkeitskreises wächst mit der zufließenden Menge und nimmt ab mit der Höhe, auf welcher die Flüssigkeit in grösserer Entfernung gehalten wird.

Wie oben auseinander gesetzt wurde, erhält man andere Gestalten der Unstetigkeitscurven, wenn der einfallende Wasserstrahl die Platte in schräger Richtung trifft, oder wenn die Platte nicht mehr horizontal ist.

Auf den ersten Fall lassen sich die bisherigen Entwicklungen ohne Schwierigkeit anwenden. Zu diesem Zweck möge um den Mittelpunkt des Strahles ein Kreis beschrieben und durch denselben eine verticale Cylinderfläche gelegt werden. Der Radius dieses Kreises sei derart gewählt, dass in demselben die Strömung der Flüssigkeit nahezu als horizontal angesehen werden kann. Die Geschwindigkeit der durch die Cylinderfläche strömenden Flüssigkeit ist dann annähernd überall dieselbe, nicht aber die Tiefe der Flüssigkeit. Dieselbe ist am grössten in der Richtung, in welcher der Strahl mit den horizontalen Flüssigkeitsfäden den grössten (stumpfen) Winkel bildet; am kleinsten in der entgegengesetzten Richtung.

Bezeichnet man mit m_1 die in der Zeiteinheit durch den, über der Längeneinheit des zuvor erwähnten Kreises liegenden Theil der Cylinderfläche hindurchgehende Flüssigkeitsmenge, so ist dieselbe als Function des Winkels anzusehen, welchen der betreffende Radiusvector mit der zuvor erwähnten Richtung bildet. Diese Function wird etwa von der Form:

$$m_1 = a + b \cos \varphi$$

sein müssen.

Es lassen sich dann die früheren Betrachtungen auf ein zwischen zwei benachbarten Radienvectoren liegendes Stück der Ebene anwenden. Die Curve der unstetigen Niveauänderung würde sich in der Form ergeben:

$$\varrho = \text{Const.} \{a + b \cos \varphi\},$$

durch welche die Beobachtungen an schräg treffenden Strahlen wiedergegeben werden.

Bei Vergleichung der auseinandergesetzten Rechnung mit den beschriebenen Versuchen mag noch erwähnt werden, dass in Wirklichkeit die Niveauänderung nicht ganz so schroff erfolgt, wie es die Rechnung ergibt.

Dies liegt zum Theil daran, dass der Capillardruck bei sehr starken Krümmungen einen erheblichen Einfluss auf die Bildung der freien Oberfläche ausübt, während derselbe an Orten geringerer Krümmung im allgemeinen im Vergleich zu dem Glied $\frac{1}{2}\omega^2 + Gx$ zu vernachlässigen ist. Ferner vollzieht sich der Uebergang der einen Bewegungsform in

die andere — wenigstens bei grösseren Geschwindigkeiten — nicht ausschliesslich in einer geometrischen Fläche, da der Energieverlust auf der Bildung eines Wirbelringes beruht.

Die eben beschriebenen Erscheinungen gestatteten eine sehr einfache Art der Berechnung, weil es sich um die Bewegung einer Flüssigkeit von geringer Tiefe handelte. Ich möchte jedoch zum Schluss darauf hinweisen, dass ähnliche Vorgänge auch an der Oberfläche tieferer Flüsse vorkommen. Wird die Strömung derselben an einzelnen Stellen durch ein Hinderniss gestört, so beobachtet man in einiger Entfernung von demselben Niveauerhebungen, welche wohl als Stauung bezeichnet werden. Dieselbe ist eine für die praktische Hydraulik nicht unwichtige Erscheinung. Es scheint mir nicht unmöglich, diese Vorgänge in ähnlicher Weise zu behandeln, wie dies hier zunächst für die Bewegung von flachen Strömungen geschehen ist.

Greifswald, den 1. Februar 1890.