DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XXXV.

**I. Gemeinsame Wirkung von Circularpolarisation
und Doppelbrechung,
geometrisch dargestellt von Otto Wiener.**(Hierzu Taf. I Fig. 1—9.)

Ueberall wo circularpolarisirende¹⁾ und doppelbrechende Kräfte gleichzeitig auftreten, wie bei der natürlichen oder electromagnetischen Circularpolarisation in doppelbrechenden Körpern, entsteht die Frage: wie kann man aus der bekannten Einzelwirkung der Circularpolarisation und Doppelbrechung die Gesamtwirkung beider voraussagen? Diese Frage ist von Gouy²⁾ beantwortet mit Hilfe der durch die Principien der Mechanik begründeten Annahme, dass in einem unendlich kleinen Körperelement die Wirkungen beiderlei Kräfte sich geometrisch (d. h. wie Kräfte) addiren. Einen besonderen Anziehungspunkt bietet die Gouy'sche Untersuchung durch den allgemeinen Nachweis, dass in einem Körper oben bezeichneter Art *ausgezeichnete Schwingungen* (*vibrations privilégiées*) bestehen, welche sich in demselben unverändert, d. h. ohne Drehung und Formänderung fortpflanzen. Solche Schwingungen waren schon früher von Airy³⁾ angenommen worden, aber nur zur Erklärung der Erscheinungen, welche beim Durchgang des Lichtes durch den Quarz in der Nähe seiner optischen Axe auftreten.

Unabhängig von Hrn. Gouy hatte Hr. Prof. Kundt zum Zwecke weiterer Speculationen dieselbe Frage in An-

1) Da die Doppelbrechung im allgemeinen auch eine Drehung der Schwingungen bewirkt, so soll hier und im folgenden das Wort „Circularpolarisation“ dem einfacheren „Drehung“ vorgezogen werden.

2) Gouy, Journ. de phys. 4. p. 149. 1885.

3) Airy, Cambr. Trans. 4. part. I. p. 79. 198. 1831.

griff genommen. Er ging von der gleichen Annahme aus, bediente sich aber nicht der Rechnung wie Gouy, sondern stellte rein geometrische Ueberlegungen an, deren Vorzug in der Einführung von Circularcomponenten beruhte. Zur Prüfung der Ergebnisse veranlasste er Hrn. Wedding¹⁾ zu einer experimentellen Untersuchung. Ebenfalls auf seine Anregung hin versuchte ich theoretisch mit Hilfe von Circularcomponenten die Lösung der Aufgabe, und es gelang mir auch mit Hülfe dieser und durch die Einführung von Circularelementen — das sind Circularschwingungen von unendlich kleiner Amplitude — die Gouy'schen Ergebnisse geometrisch herzuleiten. Die nachstehende Untersuchung hat sich nun zum Ziel gesetzt, erstens durch diese geometrische Darstellungsweise der Theorie eine grössere Anschaulichkeit zu verleihen, und zweitens diejenigen Folgerungen aus derselben zu ziehen, welche unmittelbar mit den Experimenten, insbesondere den von Hrn. Wedding angestellten, vergleichbar sind, und die auch, wie hier gleich angeführt werden soll, durch dieselben eine Bestätigung erfahren haben. Behufs dieser Vergleichung habe ich eine einfache Construction angegeben (§ 6_a und § 7_a), an deren Hand man die Veränderung einer ankommenden Schwingung beim Durchgang durch eine endliche Strecke eines Körpers bezeichneter Art verfolgen kann, sowie Formeln, welche dieselbe zu berechnen gestatten. Ausserdem wurde der allgemeine Fall, d. h. bei dem die in den Körper eintretende Schwingung beliebiges Azimuth und beliebige Ellipticität besitzt, explicit behandelt (§ 7), was Gouy unterlassen hatte. Im übrigen ist der Gang der Untersuchung naturgemäss der gleiche wie bei Gouy. Man muss zuerst wissen, wie die Doppelbrechung und die Circularpolarisation jede für sich eine beliebige elliptische Schwingung in einem unendlich kleinen Wegelement (d. h. Linienelement in Richtung der Fortpflanzung der Schwingungen) verändert, ehe man ihre gemeinsame Wirkung bestimmen kann.

Ich beginne mit Hülfsätzen, die später benutzt werden.

1) Siehe den folgenden Aufsatz „die magnetische Drehung der Polarisationsebene bei wachsender Doppelbrechung in dilatirtem Glas“.

§ 1. Zusammensetzung von Circularschwingungen.

a. Gleichgerichtete Circularschwingungen. Unter einer circularen Schwingung soll die gleichförmige Bewegung eines Punktes auf einer Kreisbahn verstanden sein. Die Amplitude der Schwingung wird gemessen durch den Radius des Kreises, die Phase durch den Winkel zwischen Leitstrahl und einer festen Axe (x -Axe), und zwar positiv im Sinne der Schwingung.

Beliebig viele Circularschwingungen von verschiedenen Amplituden und Phasen, aber gleicher Schwingungsrichtung (und gleicher Schwingungsdauer, was im folgenden stets angenommen wird) setzen sich zu einer einzigen Circularschwingung zusammen (Satz 1). Wenn man nämlich zu zwei verschiedenen Zeiten die Leitstrahlen geometrisch addirt, so entstehen zwei resultirende Leitstrahlen von gleicher Grösse, da sich die gegenseitige Lage der Einzeleleitstrahlen nicht ändert. Denn in dem gegebenen Zeitintervall haben sich diese alle um den gleichen Winkel gedreht; um denselben hat sich dann auch der resultirende Leitstrahl gedreht.

b. Zusammensetzung von Circularschwingungen beliebiger Schwingungsrichtung. *Beliebig viele Circularschwingungen von verschiedenen Amplituden und Phasen und verschiedener Schwingungsrichtung setzen sich zu einer einzigen elliptischen Schwingung zusammen* (Satz 2). Zunächst kann man wieder alle gleichgerichteten Schwingungen zu je einer Circularschwingung addiren. Es bleiben somit zwei von entgegengesetztem Schwingungssinne übrig, denen die Amplituden r_1 und r_2 zukommen mögen. Die Leitstrahlen der beiden Schwingungen müssen bei der Bewegung nothwendig einmal zusammentreffen, und zwar stets in derselben Geraden. Diese soll die Axe der Schwingungen heissen und für die folgende Ueberlegung zur x -Axe gewählt werden. Um die Form der resultirenden Schwingung zu ermitteln, addire man für eine beliebige Phase α die Leitstrahlen OA_1 und OA_2 geometrisch und erhalte OA (s. Fig. 1).¹⁾ Die Congruenz der

1) Hier und bei den anderen Figuren wird die Anfangsphase der Circularschwingungen durch einen markirten Punkt, der Schwingungssinn durch einen Pfeil bezeichnet.

Figuren $C'OB'A_2$ und CA_1BA lehrt, dass der Punkt A auch auf die folgende Weise erhalten werden kann. Man schlage zwei Kreise mit den Halbmessern $a_1 = r_1 + r_2 (= OB)$ und $a_2 = r_1 - r_2 (= OC)$ und schneide sie mit dem Strahl OA_1 . Durch die Schnittpunkte B und C ziehe man bezüglich eine Normale und Parallele zur x -Axe. Ihr Schnittpunkt ist A . Diese Construction ist bekanntlich die Punktconstruction einer Ellipse mit den Halbaxen a_1 und a_2 . Es folgt somit der Satz:

Zwei entgegengesetzt gerichtete Circularschwingungen setzen sich zu einer elliptischen Schwingung zusammen, deren Halbaxen gleich der Summe und Differenz der Amplituden der Circularschwingungen, deren Azimuth das der Axe derselben, und deren Schwingungsrichtung diejenige der Circularschwingung mit der grösseren Amplitude ist. (Satz 3.)

Die elliptische Schwingung artet in eine geradlinige, das Sinusgesetz befolgende Schwingung aus, sowie die Amplituden der beiden Circularschwingungen gleich gross werden; die Amplitude der geradlinigen Schwingung ist dann doppelt so gross wie die der Circularcomponenten.

Dass umgekehrt auch jede elliptische und geradlinige Schwingung in zwei entgegengesetzt schwingende Circularcomponenten zerlegt werden kann, ist einleuchtend.

§ 2. Veränderung einer Circularschwingung durch die Doppelbrechung allein.

Im Folgenden sollen die Richtungen parallel und senkrecht zum Hauptschnitt des doppelbrechenden Körpers Axen der Doppelbrechung genannt werden; und zwar heisse diejenige, welche der voraneilenden geradlinigen Schwingung parallel ist, die beschleunigende, und werde, wofern nichts anderes bemerkt wird, zur x -Axe gewählt; die andere der zurückbleibenden parallele heisse die verzögernde und werde zur y -Axe gewählt.

Bevor die Veränderung einer beliebigen elliptischen Schwingung durch die Doppelbrechung zu bestimmen ist, muss erst die ihrer Circularcomponenten untersucht werden. In der Längeneinheit des doppelbrechenden Körpers werde

die geradlinige Componente parallel der beschleunigenden Axe um die Phase φ gegen die andere Componente beschleunigt, in dem Längenelement dl also um $d\varphi$. Nun zerlege man die geradlinigen Componenten der Circularschwingung C , deren Amplitude gleich r sein möge (s. Fig. 2_a), in je zwei Circularcomponenten mit den Amplituden $r/2$ (s. Fig. 2_b). Dann erlangen die Circularcomponenten K_x der geradlinigen x -Componente in dem Element dl gegen die Circularcomponenten K_y eine Beschleunigung um den Betrag $d\varphi$. *Anstatt jenen Componenten diese Beschleunigung wirklich zu ertheilen, kann man auch folgendermassen verfahren* — und darin besteht das wesentliche Hilfsmittel für die weitere Untersuchung: — *man füge zu den beiden Circularschwingungen K_x zwei neue E hinzu mit der unendlich kleinen Amplitude $rd\varphi/2$, welche gegen jene jeweils um die Phasendifferenz $\pi/2$ voraus sind.* Solche Circularschwingungen mit unendlich kleinen Amplituden werden im Folgenden *Circularelemente* genannt. Dass dies Verfahren in der That die gleiche Wirkung hat, wie wenn man den Componenten K_x die Beschleunigung $d\varphi$ ertheilen würde, erkennt man leicht, wenn man (s. Fig. 2_b) jedes der beiden Circularelemente zu der Circularcomponente K_x von gleicher Schwingungsrichtung addirt.

Die beiden Circularelemente sind in ihrer Wirkung nicht gleichwerthig. Dasjenige von gleicher Schwingungsrichtung mit der ursprünglichen Circularschwingung C ändert nur die Phase, das von entgegengesetzter dagegen die Form derselben, die es zu einer elliptischen macht (Satz 2). Da im Folgenden hauptsächlich nur die Form- und Lagenänderung der Schwingungen untersucht werden, so wird das letztere Circularelement allein berücksichtigt und das andere ganz weggelassen. In Fällen, wo auch die Phasenänderung in Betracht kommt, muss man jedoch daran denken, dass die Circularschwingung im Element dl auch eine Phasenänderung erfährt, welche beiläufig gleich dem arithmetischen Mittel der Phasenänderungen der geradlinigen Componenten ist.

Das Ergebniss der vorangehenden Ueberlegung ist dieses (s. Fig. 3): *Man erhält die Formänderung einer Circularschwingung C mit der Amplitude r durch die Doppelbrechung im Weg-*

element dl , indem man zu C ein Circularelement E mit der Amplitude $r d\varphi/2$ hinzufügt, welches der zu C bezüglich der x -Axe symmetrischen Schwingung um die Phase $\pi/2$ vorausseilt. (Satz 4.)

§ 3. Veränderung einer elliptischen Schwingung durch die Doppelbrechung allein.

a. Veränderung in einem Wegelement. Die Veränderung einer beliebigen elliptischen Schwingung L mit den Halbaxen $a_1 = r_1 + r_2$ und $a_2 = r_1 - r_2$ durch die Doppelbrechung kann jetzt leicht gefunden werden durch die Veränderung ihrer Circularcomponenten K_1 mit der Amplitude r_1 und K_2 mit r_2 .

Die Ellipse stehe zunächst im Azimut 0, d. h. ihre grosse Axe falle mit der x -Axe zusammen. Für diesen Fall sind in Fig. 3 die Circularcomponenten K nebst den durch die Doppelbrechung im Element dl hinzukommenden Circularelementen E verzeichnet, und zwar K_1 mit E_1 und K_2 mit E_2 . Hier stehen die Leitstrahlen in der Anfangsphase (d. i. bei der die Leitstrahlen der Circularcomponenten aufeinander fallen) der Schwingungen bei zugehörigen K und E aufeinander senkrecht.

Steht die Ellipse im Azimut α , d. h. bildet ihre grosse Axe mit der x -Axe den Winkel α , so fallen die Leitstrahlen der Circularcomponenten in der Anfangsphase, nicht mehr mit der x -Axe zusammen, sondern bilden mit ihr den Winkel α (s. Fig. 4); ebenso schliessen die Leitstrahlen der Circularelemente mit der y -Axe den Winkel α ein, welcher aber wegen des entgegengesetzten Schwingungssinnes der K und der zugehörigen E nach der entgegengesetzten Seite wie die obigen Winkel liegen. Hieraus folgt, dass die Leitstrahlen zugehöriger K und E in der Anfangsphase Winkel von dem Betrag $(\pi/2 + 2\alpha)$ miteinander bilden.

Es entsteht jetzt die Aufgabe, die beiden Circularelemente mit den Circularcomponenten der ursprünglichen elliptischen Schwingung zu einer neuen Ellipse zusammenzusetzen. Zu dem Ende müssen zunächst gleichgerichtete Circularschwingungen miteinander vereinigt werden, also E_1 mit K_2 und E_2 mit K_1 . Man erhält so die Circularcomponenten der

neuen elliptischen Schwingung. Die Addition gleichgerichteter Circularschwingungen geschieht mittelst Addition der Leitstrahlen. Diese ist für die Anfangsphase in Fig. 5 (die Dimensionen sind gegen Fig. 4 verdreifacht) ausgeführt. Auf der grossen Axe a der ursprünglichen Ellipse sind von O aus die Radien r_1 und r_2 ihrer Circularcomponenten aufgetragen und an jene die Leitstrahlen $\varrho_2 = r_2 d\varphi/2$ und $\varrho_1 = r_1 d\varphi/2$ der gleichgerichteten Circularelemente angetragen. Die φ schliessen mit der Normalen von a Winkel gleich 2α ein. So erhält man $\overline{r_1} + \overline{\varrho_2} = \overline{r_1'}$ und $\overline{r_2} + \overline{\varrho_1} = \overline{r_2'}$ (wobei die Striche über den Buchstaben die geometrische Addition bezeichnen sollen). r_1' und r_2' sind die Leitstrahlen der Circularcomponenten der neuen Ellipse L' . Die Halbierungslinie a' des Winkels zwischen r_1' und r_2' ist die Richtung der grossen Axe von L' .

Man sieht also, dass im allgemeinen durch die Doppelbrechung sowohl die Grösse der Axen als auch das Azimuth der elliptischen Schwingung verändert wird. D. h. *es findet gleichzeitig eine Veränderung der Ellipticität* (darunter soll das Verhältniss der kleinen zur grossen Axe der Ellipse verstanden sein) *und eine Drehung der Ellipse statt.*

Die Ellipticitätsänderung bleibt aus, wenn die ϱ zu den r senkrecht stehen, d. i. wenn die Axen der elliptischen Schwingung L mit den Axen der Doppelbrechung zusammenfallen (Satz 5). Indess ist dieses Ausbleiben im allgemeinen nur ein momentanes, weil die Schwingung stets aus ihrer Lage herausgedreht wird, wofern sie nicht in eine geradlinige ausartet.

Die Drehung von L unterbleibt, wenn die ϱ in die r hineinfallen, d. i. wenn die Axen der Ellipse mit denen der Doppelbrechung Winkel von 45° bilden, oder wenn $\varrho_1 = \varrho_2$ wird, d. i. bei einer geradlinigen Schwingung (Satz 6). Im letzteren Falle ist der Stillstand im allgemeinen nur momentan.

Die Drehung pro Wegelement ist um so grösser, je mehr das Verhältniss von ϱ_2/ϱ_1 , oder was das gleiche ist, das von r_2/r_1 von 1 abweicht, d. h. je grösser die Ellipticität ist (Satz 7). Die Drehung ist zweitens um so grösser, je weniger die ϱ (Fig. 5) von der zu den r senkrechten Lage abweichen. D. h.

bei gleicher Ellipticität ist die Drehung pro Wegelement um so grösser, je weniger die Richtungen der Axen der Ellipse von denen der Doppelbrechung abweichen (Satz 8).

Auf ähnliche Weise kann man mit Hülfe der Circular-elemente sämmtliche noch hierher gehörigen Fragen, z. B. über die Abhängigkeit des Drehungssinnes der Ellipse von dem Schwingungssinn, in dem sie vom schwingenden Punkt durchlaufen wird, beantworten. Ich hatte das ursprünglich auch gethan und systematisch durchgeführt. Ich verzichte hier darauf, um nicht weitschweifig zu werden, erlaube mir dagegen eine einfache Construction anzugeben, welche die Veränderung der elliptischen Schwingung innerhalb einer endlichen Strecke des doppelbrechenden Körpers leicht zu übersehen gestattet.

b. Veränderung innerhalb einer endlichen Strecke. Eine beliebige elliptische Schwingung soll derart in vier circulare Componenten zerlegt werden, dass sich je zwei davon zu einer geradlinigen Componente parallel einer Axe der Doppelbrechung zusammensetzen. Man braucht dann nur den Circularcomponenten der geradlinigen Componente längs der beschleunigenden Axe gegenüber den anderen Componenten Beschleunigungen zu ertheilen nach Maassgabe des vom Licht zurückgelegten Weges und sie darauf wieder mit diesen zusammenzusetzen, um die gesuchten Veränderungen zu erhalten.

Der Einfachheit halber werde zunächst die einfallende Schwingung als geradlinig, aber von beliebigem Azimuth angenommen. Ihre Amplitude sei 2ρ , also ρ diejenige ihrer einfachen Circularcomponenten K , d. h. derjenigen zwei Circularschwingungen, deren Summe die ursprüngliche Schwingung darstellt. Die Amplituden der gesuchten vier Circularcomponenten, zwei Componenten K_x und zwei K_y , sind dann einfach gleich den Projectionen von ρ im Azimuth α auf die Axen (s. Fig. 6). Um die Wirkung der Doppelbrechung zu erhalten, lasse man die Leitstrahlen der K_x in ihrer Anfangslage und ertheile den K_y Verzögerungen oder Beschleunigungen, je nachdem y die verzögernde oder beschleunigende Axe der Doppelbrechung ist. Für den Gangunterschied δ

der Componenten K_x und K_y erhält man als Summe der Leitstrahlen gleichgerichteter Circularcomponenten ρ_1' und ρ_2' . Das sind die Leitstrahlen der einfachen Circularcomponenten K' der resultirenden Schwingung L' . Die Halbierungslinie a' des Winkels zwischen ρ_1' und ρ_2' bezeichnet die Richtung der grossen Axe von L' . Man erhält sämtliche Zustände, in welche die Schwingung im weiteren Verlauf unter dem Einfluss der Doppelbrechung übergeht, wenn man die Endpunkte A_1 und A_2 von ρ_1' und ρ_2' auf dem Kreis K_y sich mit gleicher Geschwindigkeit von ihrem Ausgangspunkt A in entgegengesetzter Richtung bewegen lässt und sich aus ρ_1' und ρ_2' immer die resultirende Ellipse construirt denkt. Es ergibt sich, dass die grosse Axe zwischen den äussersten Lagen OA und OA' hin und her pendelt. In diesen artet die Schwingung jeweils zu einer geradlinigen aus, während das Maximum der Ellipticität in dem Azimuth o erreicht wird. Der Sinn der Schwingung wird stets durch denjenigen der grösseren Circularcomponente bestimmt. Je nachdem die y -Axe die verzögernde oder beschleunigende Axe der Doppelbrechung darstellt, ist der Sinn, in dem die Endpunkte A der ρ den Kreis K_y durchlaufen, entgegengesetzt oder gleich dem Schwingungssinn der zugehörigen Circularcomponenten K , deren Leitstrahlen die ρ sind.

Hieraus folgt: *je nachdem die ankommende geradlinige Schwingung näher bei der beschleunigenden oder verzögernden Axe der Doppelbrechung liegt* (d. h. einen kleineren spitzen Winkel als mit der anderen bildet), *wird sie durch die Doppelbrechung zu einer elliptischen Schwingung vom entgegengesetzten oder gleichen Sinn verwandelt, wie der Sinn einer Drehung, welche die ankommende Schwingung zu der näheren Axe der Doppelbrechung hinbewegen würde* (Satz 9).

Da nun nicht allein eine geradlinige, sondern auch jede elliptische Schwingung in der angegebenen Weise sich in vier Circularcomponenten zerlegen lässt (die Zerlegung siehe unten) so folgt auch umgekehrt:

Eine elliptische Schwingung wird durch die Doppelbrechung im entgegengesetzten oder gleichen Sinn gedreht, in dem ihre

Schwingung erfolgt, jenachdem sie der beschleunigenden oder verzögernden Axe der Doppelbrechung näher liegt (Satz 10).

Ebenso folgt leicht an Hand der Fig. 6:

Die Ellipticität einer elliptischen Schwingung wird durch die Doppelbrechung vergrößert oder vermindert, je nachdem die letztere eine Annäherung oder Entfernung derselben bezüglich derjenigen Axe der Doppelbrechung bewirkt, welche ihr näher liegt (Satz 11).

Bildet die einfallende geradlinige Schwingung mit den Axen Winkel von 45° , so fällt der Punkt O (der Fig. 6) auf den Kreis K_y . Die Halbierungslinie des Winkels zwischen ϱ_1' und ϱ_2' geht dann stets durch den Punkt A , so lange $\delta < \pi/2$; d. h. das Azimuth bleibt 45° ; für $\delta = \pi/2$ wird die Schwingung circular, worauf das Azimuth -45° wird.

Um die oben gegebene Konstruktion (Fig. 6) für jede beliebige ankommende elliptische Schwingung anwenden zu können, ist es erforderlich, eine solche ebenfalls in vier Circularcomponenten zu zerlegen, deren je zwei sich zu einer geradlinigen Componente parallel einer Axe der Doppelbrechung zusammensetzen.

Aus Fig. 6 ist ersichtlich, dass dies auf folgende Aufgabe führt:

Es sind von einem Punkt O aus zwei Strecken von gegebener Grösse ϱ_1' und ϱ_2' so zu legen, dass sie mit einer durch O gehenden Geraden a' gleiche Winkel einschliessen, und dass ihre Endpunkte A sich in gleichem Abstand von der durch O gehenden x -Axe befinden.

Man schlage um O als Mittelpunkt (s. Fig. 7) zwei Kreise K_1 und K_2 bezüglich mit den Radien ϱ_1' und ϱ_2' . Dieselben mögen auf a' die Punkte B_1 und B_2 abschneiden. Durch B_2 ziehe man eine Parallele zur x -Axe und durch B_1 eine Gerade B_1C , sodass $\sphericalangle CB_1B_2 = \sphericalangle CB_2B_1$. Dann lege man durch O die Gerade OC und eine andere, die mit a' einen entgegengesetzt gleichen Winkel bilde. Die Gerade OC treffe K_1 in A_1 , die andere K_2 in A_2 . Die Punkte A_1 und A_2 entsprechen den gleichbenannten der Fig. 6. Die Mittelsenkrechte von A_1A_2 schneidet die x -Axe im Mittelpunkt M des gesuchten Kreises K_y . Es ist nur noch nachzuweisen, dass A_1A_2 parallel der x -Axe. Dazu lege man durch B_1 eine

Parallele zur x -Axe. Dieselbe treffe die Gerade OA_2 im Punkt C' , welcher somit zu C bezüglich a' symmetrisch liegt; also $OC = OC'$. Ferner treffe CB_2 die Gerade OC' in C'' . Dann ist $OB_2 : OB_1 = OC'' : OC' = OC'' : OC$. Da aber $OB_2 = OA_2$ und $OB_1 = OA_1$, so ist auch $OC'' : OC = OA_2 : OA_1$; da ferner $C''C$ parallel der x -Axe gezogen wurde, so ist auch A_2A_1 derselben parallel.

c. Berechnung der Drehung und Phasenänderung im Falle des Parallelismus der Axen der Ellipse und der Doppelbrechung. Diese Grössen werden später benutzt und sollen daher jetzt bestimmt werden. Da nur der angeführte besondere Fall in Betracht kommt, werden die allgemeinen Formeln nicht abgeleitet. Dann müssen aber die beiden Fälle, dass die Hauptaxe der Ellipse mit der x - und mit der y -Axe parallel ist, getrennt behandelt werden. Im ersten Fall ist (vgl. Fig. 5) der Winkel zwischen r_1' und r_1 , $\varphi_1 = \varphi_2/r_1 = r_2 d\varphi/2r_1$; der Winkel zwischen r_1' und r_2 , $\varphi_2 = \varphi_1/r_2 = r_1 d\varphi/2r_2$. Die Drehung der Ellipse im Element dl ist dann $d\omega_x = (\varphi_2 - \varphi_1)/2 = (r_1^2 - r_2^2) d\varphi/4r_1 r_2$; die Phasenänderung ist, abgesehen von derjenigen, durch die oben (§ 2) weggelassenen Circularelemente E hervorgebracht werden, als Beschleunigung ausgedrückt: $d\delta_x = (\varphi_1 + \varphi_2)/2 = (r_1^2 + r_2^2) d\varphi/4r_1 r_2$. Führt man statt der r die Halbaxen der Ellipse ein: $a_1 = r_1 + r_2$ und $a_2 = r_1 - r_2$, so erhält man $d\omega_x = a_1 a_2 d\varphi/(a_1^2 - a_2^2)$ und $d\delta_x = (a_1^2 + a_2^2) d\varphi/2(a_1^2 - a_2^2)$. Wie man sieht, geht hier nur das Verhältniss der Axen ein: $k = a_2/a_1$. Mit Benutzung dieser Grösse ist $d\omega_x = k d\varphi/(1 - k^2)$ und $d\delta_x = (1 + k^2) d\varphi/2(1 - k^2)$.

Ähnlich erhält man $d\omega_y = k d\varphi/(1 - k^2)$, also den gleichen Werth wie für $d\omega_x$. Dagegen ist $d\delta_y = -(1 + k^2) d\varphi/2(1 - k^2)$. Später wird die Differenz benutzt werden: $d\delta = d\delta_x - d\delta_y = (1 + k^2) d\varphi/(1 - k^2)$. Zu dieser ist nichts mehr hinzuzufügen, da die Phasenänderungen, welche den oben weggelassenen Circularelementen E entsprechen, sich hier wegheben. Um diesen Betrag eilt also eine elliptische Schwingung vom Azimuth 0 einer ebensolchen von gleicher Ellipticität vom Azimuth 90° voraus.

§ 4. Wirkung der Circularpolarisation allein auf eine elliptische Schwingung.

Die Circularpolarisation ertheilt Circularschwingungen verschiedener Schwingungsrichtung in einem Wegelement dl einen gewissen Gangunterschied $d\omega$. Derselbe kommt dadurch zu Stande, dass Circularschwingungen, deren Schwingungssinn mit dem Sinn der Circularpolarisation übereinstimmt, um die Phase $d\omega/2$ beschleunigt, solche vom entgegengesetzten Schwingungssinn aber um denselben Betrag verzögert werden.

Die Wirkung der Circularpolarisation auf eine beliebige elliptische Schwingung besteht in der Beschleunigung, bezüglich Verzögerung ihrer Circularcomponenten. Setzt man die letzteren nach Ertheilung der ihnen zukommenden Phasenänderungen wieder zusammen, so *ergibt sich als einzige Aenderung der ursprünglichen elliptischen Schwingung eine Drehung derselben um den Winkel $d\omega/2$ im Sinne der Circularpolarisation* (Satz 12).

§ 5. Gemeinschaftliche Wirkung von Doppelbrechung und Circularpolarisation.

a. Die ausgezeichneten Schwingungen. Will man die gemeinschaftliche Wirkung von Doppelbrechung und Circularpolarisation auf eine beliebige Schwingung untersuchen, so fragt es sich, ob man diese in solche Componenten zerlegen kann, welche von den gleichzeitig wirkenden Kräften in besonders einfacher Weise verändert werden. Eine solche Componente wird im allgemeinsten Fall eine elliptische Schwingung sein. Es ist nun möglich, die Ellipticität derselben so zu wählen, dass die von der Doppelbrechung herrührende Drehung der von der Circularpolarisation verursachten gleich und entgegengesetzt ist, sodass durch die gemeinschaftliche Wirkung überhaupt keine Drehung zu Stande kommt. Im allgemeinen wird aber die Ellipticität durch die Doppelbrechung wieder verändert, sodass dann der Vortheil wieder verloren ginge. Nun wurde (Satz 5) gezeigt, dass in einem Falle die Ellipticität ungeändert bleibt; nämlich dann, wenn die Axen der Ellipse mit denen der Doppelbrechung

parallel sind. Wählt man für eine solche Lage die Ellipticität und die Schwingungsrichtung so, dass die Drehung der Doppelbrechung diejenige der Circularpolarisation aufhebt, so bleibt die Ellipse überhaupt unverändert. Denn da dieselbe aus ihrer ausgezeichneten Lage nicht entfernt wird, muss auch die Ellipticität dieselbe bleiben. Dann wird aber auch im nächsten Element dl und somit immer die Drehung der Doppelbrechung derjenigen der Circularpolarisation das Gleichgewicht halten. Also bleibt sowohl das Azimuth als auch die Ellipticität, d. h. die ganze Ellipse ungeändert. Es ist das Verdienst von Gouy, das Vorhandensein solcher ausgezeichneten Schwingungen (*vibrations privilégiées*) allgemein nachgewiesen zu haben, die sich in einem Körper oben bezeichneter Art ungeändert fortpflanzen.

Von vornherein lässt sich über die ausgezeichneten Schwingungen folgendes ausmachen. Es giebt deren zwei; die grosse Axe der einen ist parallel, die der anderen senkrecht zur x -Axe. Nach Satz 10 ist der Sinn der von der Doppelbrechung herrührenden Drehung entgegengesetzt oder gleich gerichtet mit dem Sinn der elliptischen Schwingung, je nachdem die grosse Axe der beschleunigenden oder verzögernden Axe der Doppelbrechung näher liegt. Dieser Drehungssinn muss demjenigen der Circularpolarisation entgegengesetzt sein, soll eine Aufhebung der Drehungen überhaupt stattfinden. Hieraus folgt: *die beiden ausgezeichneten Schwingungen haben entgegengesetzten Schwingungssinn; gleichen Sinn mit dem der Circularpolarisation hat diejenige, deren grosse Axe der beschleunigenden Axe der Doppelbrechung parallel läuft* (Satz 13).

b. Berechnung der Ellipticität und der Gangunterschiede der ausgezeichneten Schwingungen. Eine elliptische Schwingung, deren Axen mit denen der Doppelbrechung zusammenfallen, wird nach § 3c durch die Doppelbrechung allein im Element dl um den Winkel $k d\varphi (1 - k^2)$ gedreht, wenn k die Ellipticität und $d\varphi$ der durch die Doppelbrechung unter den geradlinigen Componenten erzeugte Gangunterschied ist. Dieselbe elliptische Schwingung würde durch die Circularpolarisation allein im

Element dl um den Winkel $d\omega/2$ gedreht, wenn $d\omega$ der durch die Circularpolarisation unter den circularen Componenten erzeugte Gangunterschied ist. Eine Vernichtung beider Drehungen bei gleichzeitiger Wirkung beiderlei Kräfte tritt ein, wenn jene entgegengesetzt gerichtet und gleich gross sind. Das erstere ist der Fall bei oben bestimmten Schwingungsrichtungen; das letztere, wenn die Ellipticität k so gewählt wird, dass: $d\omega/2 = k d\varphi/(1-k^2)$. Die Grösse von k hängt also von dem Verhältniss $v = d\omega/d\varphi$ ab; dies ist das Verhältniss der Stärke der Circularpolarisation zu derjenigen der Doppelbrechung; denn es ist dasjenige der Gangunterschiede, welche die Circularpolarisation unter Circularcomponenten entgegengesetzter Schwingungsrichtung und die Doppelbrechung unter den geradlinigen Componenten parallel ihren Axen ertheilt. Es ist also $v = 2k/(1-k^2)$, woraus folgt $k = (v' - 1):v$; worin $v' = \sqrt{1+v^2}$. Gemäss der Definition von k gilt das positive Vorzeichen der Wurzel.

Im § 3c ist auch der Gangunterschied elliptischer Schwingungen von der Ellipticität k und dem Azimuth 0 und 90° für das Element dl berechnet. Er ist $d\delta = (1+k^2)d\varphi/(1-k^2)$. Wählt man k gemäss der Gleichung $v = 2k/(1-k^2)$, so ergibt sich $(1+k^2)/(1-k^2) = \sqrt{1+v^2}$, also $d\delta = d\varphi \sqrt{1+v^2} = \sqrt{d\varphi^2 + d\omega^2}$. Dabei eilt nach Satz 13 die Schwingung vom Azimuth 0 voraus. Im gewöhnlichen Fall ist die Doppelbrechung und Circularpolarisation in Richtung der Lichtstrahlen constant, also auch $d\varphi/dl$ und $d\omega/dl$; das Gleiche gilt also auch von $d\delta/dl$. Folglich ist $d\varphi/dl = \varphi/l$; $d\omega/dl = \omega/l$ und $d\delta/dl = \delta/l$. Dann kann man die obige Gleichung auch schreiben: $\delta = \sqrt{\varphi^2 + \omega^2}$ oder $\delta^2 = \varphi^2 + \omega^2$. Zur Vergleichung der Formeln mit denen von Gouy sei bemerkt, dass bei ihm ω/π das bedeutet, was hier mit ω allein bezeichnet wird. Demnach lautet bei ihm¹⁾ die obige Gleichung so: $\delta = \sqrt{\varphi^2 + (\omega/\pi)^2}$. Ferner bezeichnet er mit h das Reziproke von v . Also ist $k = -h + \sqrt{1+h^2}$.

c. Allgemeine Lösung der Aufgabe. Mit den entwickelten Sätzen ist die anfangs gestellte Aufgabe leicht zu

1) l. c. p. 158.

lösen. Eine beliebige elliptische Schwingung, welche in den Körper eintritt, wird in zwei ausgezeichnete Schwingungen zerlegt. Diese pflanzen sich in demselben ungestört fort, erhalten aber gegen einander den Gangunterschied $\delta = \sqrt{q^2 + \omega^2}$. Die aus dem Körper austretende Schwingung setzt sich aus den bevorzugten Schwingungen mit diesen Gangunterschieden wieder zusammen. Es ist indess noch die Aufgabe zu lösen, jene Zerlegung der ankommenden Schwingung in zwei ausgezeichnete thatsächlich auszuführen, d. h. die Axen der Ellipsen und den Gangunterschied der beiden Schwingungen zu bestimmen. Bevor diese Aufgabe allgemein erledigt wird, soll des leichtern Verständnisses halber der folgende besondere Fall behandelt werden.

§ 6. Das einfallende Licht sei parallel einer Axe der Doppelbrechung geradlinig polarisirt.¹⁾

a. Lösung mit Hülfe der bevorzugten Schwingungen. Die Schwingung des einfallenden Lichtes erfolge geradlinig und parallel der beschleunigenden Axe der Doppelbrechung. Ihre Amplitude sei $2a$; die Circularpolarisation wirke im Sinn S_1 .

Zunächst zerlege man die einfallende Schwingung in die beiden bevorzugten Schwingungen L_x und L_y , deren grosse Axen bezüglich mit der x - und y -Axe zusammenfallen mögen. Die Circularcomponenten von L_x seien K_{1x} und K_{2x} mit den Amplituden r_{1x} und r_{2x} , diejenigen von L_y seien K_{1y} und K_{2y} mit den Amplituden r_{1y} und r_{2y} . Nach dem vorangehenden Paragraphen ist die Ellipticität der bevorzugten Schwingungen $k = (r_{1x} - r_{2x}) / (r_{1x} + r_{2x}) = (r_{1y} - r_{2y}) / (r_{1y} + r_{2y})$. Für den Gangunterschied $\delta = 0$ der L , d. h. beim Eintreten der Schwingung in den Körper müssen sie sich zu einer geradlinigen Schwingung zusammensetzen, d. h. die Summe gleichgerichteter Circularcomponenten muss Circularschwingungen gleicher Amplitude, und zwar von einer solchen $= a$ ergeben; d. h.: $a = r_{1x} - r_{2x} = r_{2y} + r_{1y}$. Aus den voran-

1) l. c. p. 157. Gouy setzt hier die Gleichungen nur an, ohne sie zu discutiren.

gehenden vier Gleichungen ergeben sich die folgenden Werthe für die Radien der Circularcomponenten:

$$r_{1x} = a \frac{1+k}{1+k^2}; \quad r_{2x} = a \frac{1-k}{1+k^2}; \quad r_{1y} = ak \frac{1+k}{1+k^2}; \quad r_{2y} = ak \frac{1-k}{1+k^2}.$$

Beim Fortschreiten der Schwingung durch den Körper erhalten die Componenten L gewisse Gangunterschiede δ . Einem jeden δ entspricht eine resultirende elliptische Schwingung L' . Um die allmähliche Veränderung von L besser übersehen zu können, werde die folgende Construction (s. Fig. 8) ausgeführt, welche für jedes δ die Summe der L leicht zu bilden gestattet. Man trage auf der x -Axe von einem Punkte O nach der gleichen Seite die Radien der Circularcomponenten von L_x ab, und zwar $OM_1 = r_{1x}$, $OM_2 = r_{2x}$. Sodann schlage man um die Punkte M als Mittelpunkte mit den Radien der Circularcomponenten von L_y die Kreise K_{2y} (um M_1), und K_{1y} (um M_2). Dieselben müssen sich in einem Punkte A berühren, weil $r_{1x} - r_{2y} = r_{2x} + r_{1y}$ ist. Nach der im vorigen Paragraphen gegebenen Regel wird L_x gegen L_y beschleunigt. Lässt man bei ihrer Addition die Anfangsphase von L_x constant, so ist L_y jeweils die Phasenverzögerung δ zu ertheilen. Bei der Addition sind ferner Circularschwingungen gleicher Richtung zu addiren, also K_{1y} zu K_{2x} und K_{2y} zu K_{1x} . Nach obiger Construction ist für die Anfangsphase o von L_x und beliebige Phasenverzögerungen δ von L_y die Addition zugehöriger Leitstrahlen schon ausgeführt. Die Endpunkte A der Summen R zugehöriger Leitstrahlen bewegen sich bei wachsenden Phasenverzögerungen δ auf den Kreisen K_y , und zwar im entgegengesetzten Sinn als die zugehörigen Schwingungen erfolgen. Für ein beliebiges δ bilden die Leitstrahlen r_y mit der x -Axe die Winkel δ . Ihre Summen mit den r_x ergeben $\overline{\varrho_1'} = \overline{OM_1} + \overline{M_1A_1} = \overline{OA_1}$ und $\overline{\varrho_2'} = \overline{OM_2} + \overline{M_2A_2} = \overline{OA_2}$ (geometrische Addition). An Grösse gleichen sie den Radien der Circularcomponenten der resultirenden elliptischen Schwingung L' . Die Axe von L' ist die Halbierungslinie des Winkels zwischen ϱ_1' und ϱ_2' .

Der Gang der Veränderungen von L' lässt sich jetzt leicht übersehen. Für $\delta = 0$ liegen beide A in der x -Axe und fallen zusammen; die Schwingung L' ist also eine ge-

radlinige in der x -Axe, wie sie es sein muss. Für wachsende δ bewegen sich die A im Sinne der Circularpolarisation von der x -Axe weg. L' wird also ebenfalls in diesem Sinne gedreht; gleichzeitig wird sie elliptisch, denn die ρ' erhalten verschiedene Grösse. Bei der Weiterbewegung der A auf den Kreisen K_y kehren sie aber wieder zur x -Axe zurück; die Drehung von L' muss also ein Maximum erleiden und abnehmen, bis sie für $\delta = \pi$ sogar 0 geworden ist. Gleichzeitig hat die Ellipticität aber fortwährend zugenommen, da die A sich bisher immer mehr voneinander entfernen. Von nun an kommen die A auf die andere Seite der x -Axe und nähern sich wieder einander. Die Drehung von L' wird also jetzt negativ, während die Ellipticität gleichzeitig abnimmt. L' erhält eine maximale negative Drehung und kehrt dann abermals zur x -Axe zurück. Für $\delta = 2\pi$ ist der Ausgangszustand wieder erreicht. L' schwingt geradlinig in der Axe.

Das merkwürdige an diesem Verlauf ist der Umstand, dass die Drehung von L im vorliegenden Fall zeitweilig im entgegengesetzten Sinn der Circularpolarisation stattfindet, ja sogar eine negative werden kann. Anders ausgedrückt heisst das: *die Doppelbrechung vermag die Wirkung der Circularpolarisation so zu verändern, dass die Polarisationsene des Lichtes dem Sinne der Circularpolarisation entgegen gedreht wird.*

Zum besseren Verständniss dieses Ergebnisses soll dasselbe in einfacherer Weise ohne Benutzung einer Zerlegung in ausgezeichnete Schwingungen, allein mit Hülfe der früher abgeleiteten Sätze über die Wirkung der Doppelbrechung gewonnen werden.

b. Unmittelbare Lösung. Im vorliegenden Falle würde die Doppelbrechung allein keine Veränderung der einfallenden Schwingung herbeiführen. Es kommt daher im ersten Augenblick nur die drehende Kraft der Circularpolarisation zur Geltung. Sowie die geradlinige Schwingung aber aus der x -Axe herausgedreht ist, wird sie durch die Doppelbrechung elliptisch, und erhält (Satz 9 und 10) einen solchen Schwingungssinn, der sie wieder nach der x -Axe zurückdrehen versucht. Da indess die der Doppelbrechung allein

entsprechende Drehung derjenigen, welche die Circularpolarisation allein bewirkt, noch an Grösse nachsteht, so wird die Schwingung zwar weniger stark, doch immer noch im Sinne der Circularpolarisation gedreht werden. Indess nimmt die Ellipticität derselben fortwährend zu (Satz 11). Mit ihr wächst die der Doppelbrechung allein entsprechende Drehung (Satz 7). Ist nun die letztere gegenüber der Circularpolarisation so stark — wie stark sie mindestens sein muss, wird später angegeben — dass sie, bevor das Azimuth 45° erreicht ist, derjenigen der Circularpolarisation an Grösse gleich wird, so wird die Schwingung momentan still stehen. Da aber die Ellipticität fortwährend zunimmt, so erfolgt im nächsten Augenblicke eine Rückwärtsdrehung nach der x -Axe, und zwar mit wachsender Geschwindigkeit (Satz 8) bis das ursprüngliche Azimuth 0 wieder erreicht ist. Zu gleicher Zeit ist das Maximum der Ellipticität erreicht. Denn sowie die Schwingung auf die andere Seite der x -Axe gedreht wird, muss die Ellipticität (Satz 11) wieder abnehmen. Der Verlauf der Veränderungen auf dieser Seite braucht nicht weiter verfolgt zu werden, er ist demjenigen auf der anderen Seite symmetrisch. Die Schwingung muss abermals zur x -Axe zurückkehren, indem sie gleichzeitig wieder geradlinig wird. Von hier ab beginnt das Spiel von neuem.

c. Verlauf der Drehung bei verschiedenen Verhältnissen der Circularpolarisation zur Doppelbrechung. Es ist noch die Frage zu beantworten, wie stark die Doppelbrechung sein muss, um eine Drehung der Schwingungen dem Sinn der Circularpolarisation entgegen zu bewirken. Hierzu betrachte man die Fig. 8. Solange der Kreis K_{1y} den Punkt O ausschliesst, muss eine Umkehr im Drehsinn der Schwingungen stattfinden. Sowie dagegen K_{1y} den Punkt O einschliesst, muss unaufhörlich die Drehung der Schwingungen im Sinn der Circularpolarisation erfolgen. Den Uebergang bildet der Fall, dass O auf die Peripherie von K_{1y} zu liegen kommt. Nun lässt sich das Verhältniss v der Stärke der Circularpolarisation zu derjenigen der Doppelbrechung durch Strecken der Fig. 8 ausdrücken. Es ist nämlich (nach § 5) $v = 2k(1 - k^2)$; k kann aber durch

die in § 6_a gegebenen Radien der Circularcomponenten dargestellt werden. So findet man $v = (OB - OC)(OB + OC)$, wobei B und C die voneinander getrennten Schnittpunkte der Kreise K_{2y} und K_{1y} mit der x -Axe bedeuten. Je nachdem O ausserhalb oder zwischen BC fällt, schliesst auch der Kreis K_{1y} den Punkt O aus oder ein; zugleich ist v kleiner, bezüglich grösser als 1. Fällt C mit O zusammen, so wird $v = 1$. Für $v = 1$ tritt also der oben bezeichnete Grenzfall ein. Ist aber $v < 1$, die Doppelbrechung somit stärker als die Circularpolarisation, so kann sie eine Drehung der Schwingungen entgegen dem Sinn der letzteren bewirken. Wird v sehr klein, so wird auch die maximale Drehung sehr klein, bis sie bei einer gegenüber der Doppelbrechung verschwindenden Circularpolarisation verschwindet. Ist umgekehrt v sehr gross, so rückt O (in Fig. 8) nahe an M_2 heran und M_1 an A . Die Drehung erfolgt dann stets im Sinne der Circularpolarisation, während gleichzeitig nur ein schwaches Elliptischwerden auftritt; dieses verschwindet ganz, wenn die Doppelbrechung gegenüber der Circularpolarisation verschwindet.

d. Formeln. Bezeichnet man mit α den Winkel, um welchen die Schwingung aus der x -Axe im Sinne der Circularpolarisation herausgedreht wird; mit δ , v , $v' = \sqrt{1 + v^2}$ die gleichen Grössen wie oben, so gilt die folgende Beziehung, welche leicht an der Hand der Fig. 8 oder aus den später folgenden allgemeinen Formeln abgeleitet werden kann:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{v v' \sin \delta}{1 + v^2 \cos \delta}.$$

Hieraus findet man also die Drehung der einfallenden Schwingung, welche einem bestimmten Gangunterschied δ ihrer Componenten, den ausgezeichneten Schwingungen, entspricht.

Ist $v < 1$, so besteht eine Maximaldrehung α_m , die nie überschritten wird; dieselbe ist durch die einfache Beziehung bestimmt: $\sin 2\alpha_m = v$; der zugehörige Gangunterschied δ_m ergibt sich aus: $\cos \delta_m = -v^2$. Die Ableitung dieser Formeln bietet keine Schwierigkeit.

Aus Fig. 8 ersieht man ferner, dass die maximale Ellip-

ticität E_m der Schwingung für $\delta = \pi$ eintritt und $= (OB - OC)$ ($OB + OC$) ist. Sie ist demnach $= [v]$, wenn $[v]$ denjenigen der beiden Werthe v und $1/v$ bedeutet, der < 1 ist. Denn der Definition gemäss stellt E_m im Gegensatz zu v eine Grösse kleiner als Eins dar.

§ 7. Allgemeiner Fall.

a. Construction. Zur x -Axe werde wieder die beschleunigende Axe der Doppelbrechung gewählt. Die ankommende Schwingung L habe das beliebige Azimut α und die beliebige Ellipticität e . Ihre einfachen Circularcomponenten seien K_1 und K_2 mit den Amplituden ϱ_1 und ϱ_2 , deren Verhältniss ϱ_2/ϱ_1 mit ε bezeichnet werde. Unter K_1 sei die im Sinne S_1 der Circularpolarisation schwingende Circularcomponente, unter K_2 die im entgegengesetzten Sinne schwingende verstanten. Hieraus folgt, dass, je nachdem der Schwingungssinn von L mit dem Sinn der Circularpolarisation übereinstimmt oder nicht, ϱ_1 grösser oder kleiner als ϱ_2 ist. Es ist nun die Aufgabe zu lösen, L in die ausgezeichneten Schwingungen L_x und L_y zu zerlegen, von denen die Ellipticität k , bezw. das Verhältniss der Radien ihrer Circularcomponenten $\varkappa = 1 - k/1 + k$ gegeben ist. Das Verfahren ist analog wie bei dem besprochenen besonderen Fall. Es müssen die einfachen Circularcomponenten K_1 und K_2 von L in die gleichgerichteten Circularcomponenten der ausgezeichneten Schwingungen zerlegt werden, d. h. K_1 in K_{1x} und K_{2y} ; K_2 in K_{2x} und K_{1y} (s. Fig. 9). Dies geschieht mittelst der Zerlegung der entsprechenden Leitstrahlen, sodass wird: $\overline{\varrho_1} = \overline{r_{1x}} + \overline{r_{2y}}$ und $\overline{\varrho_2} = \overline{r_{2x}} + \overline{r_{1y}}$ (geometrische Addition). Die Zerlegung werde wie oben für eine solche Phase vorgenommen, dass die Leitstrahlen von K_{1x} und K_{2x} sich in der Anfangslage, d. i. in der x -Axe befinden. Die übrigen Leitstrahlen werden sich im allgemeinen nicht in ihrer Anfangslage befinden. Dagegen müssen immer zwei, die zu einer elliptischen Schwingung gehören, mit der zugehörigen Axe entgegengesetzt gleiche Winkel bilden, d. h. ϱ_1, ϱ_2 mit der Axe a von L und r_{1y}, r_{2y} mit der y -Axe, der Axe von L_y . Demnach ist die gewünschte Zerlegung auf die folgende

geometrische Aufgabe zurückgeführt: Es sind zwei Dreiecke (s. Fig. 9) OM_1A_1 und OM_2A_2 zu construiren, die folgenden Bedingungen genügen müssen. Gegeben ist die Länge von $OA_1 = \rho_1$ und von $OA_2 = \rho_2$; ferner das Verhältniss von $OM_2/OM_1 = r_{2x}/r_{1x} = \kappa = 1 - k/1 + k$ und das von $M_1A_1/M_2A_2 = r_{2y}/r_{1y}$ ebenfalls $= \kappa$. OM_1 und OM_2 liegen auf der x -Axe, OA_1 und OA_2 bilden entgegengesetzt gleiche Winkel mit der Axe a (von L) und M_1A_1, M_2A_2 entgegengesetzt gleiche Winkel mit der y -Axe. Ich nehme an, die Aufgabe sei bereits gelöst (s. Fig. 9), dann lässt sich zeigen, dass die Construction der Punkte A_1 und A_2 auf eine bereits früher (§ 3_b) angegebene Construction zurückgeführt werden kann. Man denke sich durch A_2 eine Parallele zur x -Axe gelegt und mit der Geraden OA_1 im Punkte A_1' geschnitten. Eine Parallele zu A_2M_2 durch A_1' werde von der x -Axe im Punkte M_2' geschnitten. Dann ist $A_1'M_2' = A_2M_2 = r_{1y}$. Eine Parallele zu A_1M_1 werde von der x -Axe im Punkte M_1' geschnitten. Dann ist $A_1'M_1'$ ebenfalls $= r_{1y}$, weil M_2A_2 und M_1A_1 mit der y -Axe gleiche Winkel bilden. Hieraus ergibt sich aber die Länge von OA_1' . Es ist nämlich $OA_1':OA_1 = r_{1y}:r_{2y}$; also $OA_1' = \rho_1/k$. Die Aufgabe, A_2 und A_1' zu finden, ist aber die gleiche, wie die in § 3_b bezeichnete und gelöste Aufgabe. Mit A_1' ist aber auch A_1 gegeben. Um nun noch die Punkte M_1 und M_2 zu finden, trage man auf OA_2 einen Punkt A_2' derart ab, dass $OA_2' = \rho_2/\kappa$ wird. Zu A_2' suche man bezüglich der x -Axe den symmetrischen Punkt A_2'' . Die Verbindungslinie von A_2'' mit A_1 trifft die x -Axe im Punkte M_1 . Damit ist noch M_2 gefunden, weil ja $OM_2:OM_1 = \kappa$. Die Richtigkeit der Construction ergibt sich leicht an der Hand der Figur.

Die vollständige Construction der beiden gesuchten Dreiecke OM_1A_1 und OM_2A_2 ist also die folgende: Man schlage um O als Mittelpunkt zwei Kreise mit den Radien ρ_2 und ρ_1/κ und schneide dieselben mit der Axe a von L in den Punkten B_2 und B_1 (vgl. Fig. 7). Durch B_2 ziehe man eine Parallele zur x -Axe und durch B_1 eine Gerade B_1C , sodass $\sphericalangle CB_1B_2 = \sphericalangle CB_2B_1$ wird. Durch O lege man die Gerade OC und OC' , welche letztere mit a den entgegen-

gesetzt gleichen Winkel einschliessen möge, wie OC . Ferner trage man von O aus auf OC die Strecke ϱ_1 und auf OC' die Strecke ϱ_2 ab. Dann erhält man die Punkte A_1 und A_2 (s. Fig. 9). Ferner trage man auf OC' die Strecke $OA_2' = \varrho_2/\kappa$ ab, suche zu A_2' bezüglich der x -Axe den symmetrischen Punkt A'' und verbinde denselben mit A_1 ; diese Verbindungslinie schneidet auf der x -Axe den Punkt M_1 ab. OM_2 ist dann $= \kappa \cdot OM_1$.

Die Veränderung von L ist jetzt wie bei den früheren Constructionen leicht zu übersehen. Erhalten die beiden ausgezeichneten Schwingungen den Gangunterschied δ , so sind die Leitstrahlen r_y um den Winkel δ zu drehen, je nachdem die y -Axe die verzögernde oder beschleunigende Axe der Doppelbrechung ist, im entgegengesetzten oder gleichen Sinn wie der Schwingungssinn der zugehörigen K_y . A_1 und A_2 gehen dann in die Punkte A_1' und A_2' über, und OA_1' und OA_2' sind dann die Radien der einfachen Circularcomponenten der resultirenden Schwingung L' .

b. Formeln. Aus der Construction lassen sich die folgenden Formeln ableiten. Gegeben sind die in § 7_a bereits bezeichneten Grössen. Gesucht sind zunächst die Radien der Circularcomponenten der ausgezeichneten Schwingungen L_x und L_y , nämlich r_{1x} , r_{2x} und r_{1y} , r_{2y} und ferner die anfängliche Phasenverzögerung δ_0 von L_y gegen L_x , wobei die Phasen als gleich angenommen werden, wenn die schwingenden Punkte von L_x und L_y die x -Axe gleichzeitig und auf der gleichen Seite des gemeinsamen Schwingungsmittelpunktes passiren (der Winkel δ_0 der Fig. 9). Gesucht ist zuletzt die elliptische Schwingung L' , in welche L übergeht, nachdem ihre Componenten L_y gegen L_x in dem Körper die weitere Verzögerung δ erlitten, d. h. ihr Azimuth α' und die Radien ihrer Circularcomponenten ϱ_1' und ϱ_2' . Ihr Verhältniss sei $\varepsilon' = \varrho_2'/\varrho_1'$. Findet sich, dass ε' als Zahl von ε durch die 1 getrennt ist, so folgt daraus, dass L' den entgegengesetzten Schwingungssinn wie L angenommen hat. Zunächst führe man die Hilfsgrössen ein:

$$c_1 = +\sqrt{1 + \varepsilon^2 x^2 + 2\varepsilon x \cos 2\alpha}, \quad c_2 = +\sqrt{\varepsilon^2 + x^2 - 2\varepsilon x \cos 2\alpha}$$

Dann ist:

$$r_{1x} = \frac{c_1 \varrho_1}{1 + \kappa^2}, \quad r_{2x} = \frac{\kappa c_1 \varrho_1}{1 + \kappa^2}, \quad r_{1y} = \frac{c_2 \varrho_1}{1 + \kappa^2}, \quad r_{2y} = \frac{\kappa c_2 \varrho_1}{1 + \kappa^2},$$

$$\sin \delta_o = \frac{\varepsilon (1 + \kappa^2)}{c_1 c_2} \sin 2\alpha, \quad \operatorname{tg} 2\alpha' = \frac{(1 + \kappa^2) \sin A}{(\mu - \nu) + (1 - \kappa^2) \cos A},$$

worin bedeutet $A = \delta_o + \delta$; $\mu = \frac{r_{2x}}{r_{1y}} = \kappa \frac{c_1}{c_2}$; $\nu = \frac{r_{2y}}{r_{1x}} = \kappa \frac{c_2}{c_1}$.

Ferner ist:

$$\varrho_1' = + \frac{\varrho_1}{1 + \kappa^2} \sqrt{c_1^2 + (\kappa^2 c_2^2 - 2\kappa c_1 c_2 \cos A)},$$

$$\varrho_2' = + \frac{\varrho_1}{1 + \kappa^2} \sqrt{\kappa^2 c_1^2 + c_2^2 + 2\kappa c_1 c_2 \cos A},$$

$$\varepsilon' = \frac{\varrho_2'}{\varrho_1'} = \sqrt{\frac{\kappa^2 c_1^2 + c_2^2 + 2\kappa c_1 c_2 \cos A}{c_1^2 + \kappa^2 c_2^2 - 2\kappa c_1 c_2 \cos A}}.$$

§ 8. Schluss.

Es wurde gezeigt (§ 6 c), dass bei gleichzeitiger Wirkung von Circularpolarisation und Doppelbrechung, je nach dem mehr oder minder starken Ueberwiegen der einen die andere mehr oder weniger verdeckt wird. Für extreme Fälle tritt die Frage auf: welches ist die günstigste Lage der Polarisationsebene des einfallenden Lichtes, damit man das Vorhandensein der schwächeren Wirkung noch erkennen kann? Ueberwiegt die Doppelbrechung, so unterliegt es keinem Zweifel, dass die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes am vortheilhaftesten mit einer Axe der Doppelbrechung zusammenfällt. Die letztere allein vermöchte ja solches Licht nicht zu verändern. Jedes Auftreten einer Drehung oder Ellipticität desselben beweist dann das Vorhandensein einer Circularpolarisation. Ueberwiegt dagegen die letztere bedeutend, so könnte man im Zweifel sein. Jedenfalls wird man die Doppelbrechung durch eine auftretende Ellipticität nachweisen wollen. Eine Discussion der obigen Formeln ergibt, dass diese für das Azimuth 0 am stärksten wird. Im allgemeinen ist daher auch hier das Azimuth 0 vorzuziehen.

Zuletzt sollen noch einige Zahlenbeispiele angeführt werden, um eine bessere Vorstellung über die gegenseitige Störung der beiden Wirkungen zu ermöglichen. Gegeben sei ein Körper, in welchem die Circularpolarisation allein

einen Gangunterschied von λ unter den Circularcomponenten, also eine Drehung von 180° hervorbringen würde. In demselben Körper bewirke die Doppelbrechung unter den geradlinigen Componenten einen Gangunterschied von 2λ . Demnach ist $v = 1/2$. Fällt die Polarisationssebene des ankommenden Lichtes mit einer Axe der Doppelbrechung zusammen, so besteht eine Maximaldrehung φ_m . Und zwar ist dann $\sin 2\varphi_m = 1/2$. Also $\varphi_m = 15^\circ$. Die Doppelbrechung lässt demnach die Drehung um 180° nicht zu Stande kommen, sie gestattet höchstens eine Drehung von 15° . Ist die Doppelbrechung zehnmal stärker als die Circularpolarisation, so wird die Maximaldrehung auf nicht ganz 3° , ist sie 100 mal stärker, so wird diese auf etwa $17'$ herabgedrückt.

Umgekehrt sei ein Körper gegeben, von welchem ein Strahl, der unter dem Azimuth 45° geradlinig polarisirt einfällt, vermöge der Doppelbrechung allein circularpolarisirt entlassen würde. In demselben Körper möge die Circularpolarisation allein eine Drehung von 60° hervorbringen. Dann ist $v = 4/3$ und die maximale Ellipticität ($E_{45} = \kappa = (1-k)/(1+k)$) $= 1/3$. Die Circularpolarisation lässt also ein Circularwerden des Strahles nicht zu Stande kommen; sie gestattet höchstens eine maximale Ellipticität $= 1/3$. Ist die Circularpolarisation zehnmal stärker als die Doppelbrechung, so wird die maximale Ellipticität auf etwa $1/20$; ist sie 100 mal stärker, so wird sie auf etwa $1/200$ herabgedrückt. Würde das Anfangsazimuth mit einer Axe der Doppelbrechung zusammenfallen, so wäre die maximale Ellipticität ungefähr doppelt so gross.

Zusammenfassend soll noch einmal gesagt werden:

Herrscht bei der gleichzeitigen Wirkung von Circularpolarisation und Doppelbrechung die eine vor, so wird die andere theilweise verdeckt. Eine starke Doppelbrechung drückt die Drehung der Circularpolarisation und eine starke Circularpolarisation das Elliptischmachen der Doppelbrechung herab.

Phys. Inst. der Univ. Strassburg i. E.