ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

Band 192.

Nr. 4604.

20.

Über die periodischen Bahnen vom Typus $(p+2)/p$, insbesondere über den Fall $5/3$.

Von W. W. Heinrich.

Angeregt durch die Arbeiten der Herren *Hill*, *Schwarzschild* und *Wilkins* über das Studium der Kommensurabilitäten im Dreikörperprobleme, habe ich vor einiger Zeit Rechnungen über den Hestia-Fall vorgenommen. Nach dem Erscheinen des eleganten Aufsatzes des Herrn *Wilkins*: »Die symmetrischen und asymmetrischen periodischen Bahnen derjenigen Planeten, deren mittlere Bewegung nahezu das $(p+2)/p$ fache der des Jupiter beträgt« (Astr. Nachr. Erg.-Heft 17, 1910), welcher im Grunde dasselbe Ziel verfolgt, bin ich von der ursprünglichen Absicht abgegangen, und es geschah unter dem Einflusse der Korrespondenz mit letzterem Herrn, daß ich mich zur Diskussion der speziellen niedrigzahligen Kommensurabilität $5/3$ wandte.

Die Resultate dieser Untersuchungen will ich im folgenden mitteilen.

»Es erscheint wohl angemessen, diese Bewegungsformen (periodische Lösungen), so einfach sie sind, einmal zu isolieren und für sich quantitativ zu behandeln«. Von diesem Gesichtspunkte ausgehend hat Herr *Schwarzschild* den Hecuba-Fall $2/1$ (A. N. 160.385: Über die periodischen Bahnen vom Hecuba-Typus) behandelt. Später hat Herr *Dziwulski* den Hilda-Fall (A. N. 183.65) und Herr *Wilkins* l. c. den Hestia-Typus diskutiert. Es sind also noch die Fälle $3/3$, $7/5$ und $4/3$ des Thule-Typus zu erledigen, deren ersten wir behandeln wollen.

Der allgemeine Hestia ähnliche Fall $(p+2)/p$ erscheint insofern in einfacherer Form als der Hecuba ähnliche Fall $(p+1)/p$, als in demselben die polare Unstetigkeit $1/\epsilon$ nicht existiert und die Entwicklung des kritischen Teiles der Störungsfunktion bloß gerade Potenzen der Exzentrizität enthält. Bei der quantitativen Behandlung der periodischen Bewegungsformen ist es dann möglich, entweder die Exzentrizität oder die mittlere Bewegung n als Parameter zu wählen. Ich habe ϵ als Parameter gewählt und entwickle nach Potenzen der Veränderung des Argumentes der *Laplaceschen* Transzendenten. Da ich erst die 8. Potenz der Exzentrizität in der Störungsfunktion vernachlässige, bedeutet die erwähnte Entwicklung eine gewisse Ökonomie im numerischen Rechnen gegenüber dem Verfahren von *Wilkins* (l. c.). Zur Herleitung der nötigen analytischen Hilfsmittel bedienen wir uns der *Hill-Delaunayschen* Operation.

1. Die Differentialgleichungen und die Bedingungsgleichungen für periodische Lösungen.

Es handle sich um die allgemeine niedrigzahlige Kommensurabilität vom Typus $(p+q)/p$. Wir beziehen die Bewegung des Asteroiden auf ein festes rechtwinkliges Koordinatensystem, Anfangspunkt in der Sonne. Der Asteroid bewegt sich in der XY -Ebene der kreisförmig vorausgesetzten Jupiterbahn; die X -Achse fällt mit dem Radiusvektor Jupiters zusammen, wenn seine Länge $A' = 0$ ist.

Es bedeute k die *Gaußsche* Konstante, $a, e, \varpi, M = \pi t + M_0$ große Halbachse, Exzentrizität, Perihellänge und mittlere Anomalie des Planetoiden, $v, m', A' = n't, n', a'$ resp. wahre Länge, Masse, Länge, mittlere Bewegung, große Halbachse (Radius) der Bahn des Jupiter.

Von den *Delaunayschen* Elementen $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ kommt man vermittels der Substitution

$$\begin{aligned} \xi_1' &= \xi_1 = \sqrt{a} & \xi_2' &= \xi_1 - \xi_2 = \sqrt{a}(1 - \sqrt{1 - e^2}) \\ \eta_1 &= \eta_1' + \eta_2' & \eta_2 &= -\eta_2' & \eta_1' &= M + \varpi & \eta_2' &= -\varpi \end{aligned}$$

$$\frac{d\xi_i'}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \eta_i'} \quad \frac{d\eta_i'}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \xi_i'} \quad (i=1,2) \quad F = \frac{k^4}{2\xi_1'^2} + F'$$

$$F' = k^2 m' \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + a'^2 - 2a'r \cos(v - A')}} - \frac{r}{a'^2 \cos(v - A')} \right).$$

Die Zeit tritt rechts explizit auf. Diesem Übelstande helfen wir ab durch eine kurze geometrische Überlegung. Die Zeit tritt überall auf in der Verbindung $n't$. Stellen wir uns die Bewegung relativ zur Verbindungslinie Sonne-Jupiter vor, so ruht in diesem sich drehenden Koordinatensystem Jupiter, und die intermediäre Bahnellipse des Planetoiden dreht sich in retrograder Richtung. Wir haben somit für n' null zu setzen und für die Richtung der Apsidenlinie ϖ die veränderliche Richtung $\varpi - n't$ einzuführen. Damit die kanonische Form bestehen bleibt, braucht man nur $n'(\xi_1' - \xi_2')$ zu der charakteristischen Funktion zu addieren.

Wir kommen so zum *Tisserandschen* System (Méc. cél. 4.426), von welchem Herr *Schwarzschild* l. c. ausgeht:

$$\begin{aligned} L &= k\sqrt{a} & G &= k\sqrt{a}(1 - \sqrt{1 - e^2}) \\ \lambda &= M + \varpi - n't & \gamma &= n't - \varpi \\ F &= F_0 + F' & F_0 &= (k^4/2L^2) + n'L - n'G \\ \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \lambda} & \frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L} & \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \gamma} & \frac{d\gamma}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G} \end{aligned}$$

Wir berücksichtigen die Störungen erster Ordnung und suchen eine gewisse intermediäre Bahn des Planetoiden. Es ist diejenige Bahn, welche entsteht durch den Beitrag sämtlicher Glieder der Störungsfunktion, die in der Nähe der Kommensurabilität $n/n' = (p+q)/p$ säkular werden. Wir setzen

$$\begin{aligned} F' &= k^2 m' \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{i'=-\infty}^{\infty} C_{ii'} e^{\sqrt{-1}(i\lambda + i'\gamma)} \\ 4\pi^2 C_{ii'} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\sqrt{-1}(i\lambda + i'\gamma)} \frac{F'(\lambda, \gamma)}{k^2 m'} d\lambda d\gamma \\ [F] &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F d\lambda d\gamma = F_0 + \sum_{i=1}^{\infty} k^2 m' D_i \cos i\zeta = F_0 + R \end{aligned}$$

wo $\zeta = (p+q)n't - pnt - pM_0 - (p+q)\varpi$.

Dann lauten die Gleichungen für die gesuchte intermediäre Bahn

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial[F]}{\partial\lambda} \quad \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial[F]}{\partial L} \quad \frac{dG}{dt} = \frac{\partial[F]}{\partial\gamma} \quad \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{\partial[F]}{\partial G}.$$

Wir führen nun mit *Delaunay* folgende kanonische, lineare und kontragrediente Substitutionen aus

$$\begin{aligned} 1) \quad x_1 &= G/q & y_1 &= -p\lambda + q\gamma = \zeta \\ x_2 &= L + (p/q)G & y_2 &= \lambda \\ L &= -px_1 + x_2 & G &= qx_1 \\ 2) \quad x_1 &= -L/p & y_1 &= -p\lambda + q\gamma = \zeta \\ x_2 &= (q/p)L + G & y_2 &= \gamma \\ L &= -px_1 & G &= qx_1 + x_2. \end{aligned}$$

Wir verfolgen 1). Das neue System

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{\partial[F]}{\partial y_1} & \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{\partial[F]}{\partial x_1} \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{\partial[F]}{\partial y_2} = 0 & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{\partial[F]}{\partial x_2} \end{aligned}$$

liefert sofort das Integral

$$\begin{aligned} x_2 &= qL + pG = (q+p)k\sqrt{a} - p k\sqrt{a}\sqrt{1-e^2} \\ &= (q+p)k\sqrt{a_0} - p k\sqrt{a_0}\sqrt{1-e_0^2}. \end{aligned} \quad (I)$$

Nach Integration desselben liefert die vierte Gleichung durch eine einfache Quadratur

$$y_2 = \int \frac{\partial[F]}{\partial x_2} dt.$$

Es handelt sich also um das System

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial[F]}{\partial y_1} \quad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{\partial[F]}{\partial x_1}$$

mit dem vis viva Integrale (*Jacobi*) $[F] = C$.

Wir beobachten vor allem die singulären Punkte der Bahnkurve $[F] = C$, welche sich, da x_2 parametrisch auftritt, als singuläre Kurven präsentieren. Für diese gilt

$$\frac{\partial[F]}{\partial y_1} = 0 \quad \frac{\partial[F]}{\partial x_1} = 0 \quad [F] = C \quad x_1 = \text{konst.} \quad y_1 = \text{konst.}$$

Die zwei ersten Gleichungen geben eine einfach unendliche Schar periodischer Lösungen erster Sorte. Sie enthalten an Variablen x_1, y_1, x_2 , somit einen Parameter.

Durch einfache Differentiation finden wir, daß dieselben mit den Bedingungsgleichungen *Schwarzschild's* zusammenfallen. In der Tat ist

$$\frac{\partial[F]}{\partial x_1} = q \frac{\partial(F_0 + R)}{\partial G} - p \frac{\partial(F_0 + R)}{\partial L} = 0$$

$$\begin{aligned} q \left(-n' + k^2 m' \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial D_i}{\partial G} \cos i\zeta \right) + \\ - p \left(-\frac{k^4}{L^3} + n' + k^2 m' \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial D_i}{\partial L} \cos i\zeta \right) = 0 \\ k^4/L^3 = k/a^{3/2} = n \end{aligned}$$

also $d\zeta/dt = pn - (p+q)n' + qf + pg = 0$ (II)

$$f = \frac{\partial R}{\partial G} = k^2 m' \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial D_i}{\partial G} \cos i\zeta$$

$$g = -\frac{\partial R}{\partial L} = -k^2 m' \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial D_i}{\partial L} \cos i\zeta$$

und weiter

$$\frac{\partial[F]}{\partial y_1} = \frac{\partial[F]}{\partial \zeta} = k^2 m' \sum_{i=1}^{\infty} i D_i \cos i\zeta = 0 \quad (III)$$

Man überzeugt sich in ähnlicher Weise durch bloße Derivation, daß dieselben Gleichungen, wenn man zu nicht kanonischen Elementen übergeht, mit den Bedingungsgleichungen des Herrn *Wilkins* l. c. 1), 2) p. 3 übereinstimmen.

Wenn man in unserem kanonischen System mit einem Freiheitsgrade die Differentiation auch links ausführt mit Berücksichtigung der Substitutionsgleichungen (1), so findet man $dy_2/dt = n - n' + g$, und somit ist der Sinn unserer Größe g »die Störung der mittleren Bewegung in Länge«. Ähnlich ergibt sich aus

$$d\zeta/dt = -p(dy_2/dt) + qn' - q(d\varpi/dt)$$

daß $f = d\varpi/dt$ der »säkularen Perihelbewegung« gleich kommt.

Dieselben Bedingungsgleichungen II, III folgen aus der zweiten kanonischen Substitution (2).

Wir finden somit für die gesuchte intermediäre periodische Bahn eines Planetoiden in der Nachbarschaft der niedrigzahligen Kommensurabilität $(p+q)/p$ eine Ellipse, welche sich mit der Apsidengeschwindigkeit $d\varpi/dt = f$ im ursprünglichen festen Koordinatensystem direkt oder retrograd dreht. Die mittlere Bewegung in Länge des Planetoiden weicht von der *Kepler'schen* Bewegung um einen konstanten Störungsbetrag g ab.

2. Quantitative Behandlung

der periodischen Bewegungsformen.

Wir benutzen zur numerischen Behandlung unserer Bedingungen (II), (III) die *Leverrierschen* Entwicklungen der Störungsfunktion. Wenn man $R = k^2 m' s/a'$ setzt, so findet man auf bekannte Weise in unserem Falle $(p+2)/p$ die Ausdrücke $s, a \cdot ds/da$ als Funktionen der e und ζ . Führen wir in diesen die Bezeichnung für die Koeffizienten resp. A_{mn}, N_{mn} ein, wo der erste Index das Multiplum des Argumentes ζ , der zweite den Grad der Exzentrizität bezeichnet, so erhalten wir folgende explizite Darstellung der säkularen Perihelbewegung f und der Störung der mittleren Bewegung in Länge g im Falle der symmetrisch periodischen Lösungen $\zeta = 0, \pi \quad \zeta = (p+2)l' - p\lambda - 2\varpi$

$$\begin{aligned} f &= \frac{k^2 m'}{a'} \frac{\sqrt{1-e^2}}{ek\sqrt{a}} \frac{\partial s}{\partial e} = \frac{k m'}{a' \sqrt{a}} \frac{\partial s}{\partial e} \left(\frac{1}{e} - \frac{e}{2} \right) \\ &= \frac{k m'}{a' \sqrt{a}} \left[\frac{1}{2} A_{02} + \left(\frac{1}{2} e \right)^2 A_{04} + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} e \right)^4 A_{06} \right. \\ &\quad \pm \frac{1}{2} A_{12} \pm \left(\frac{1}{2} e \right)^2 A_{14} \pm \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} e \right)^4 A_{16} \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2} e \right)^2 A_{24} + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} e \right)^4 A_{26} \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} e \right)^4 A_{36} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{2} e \right)^2 A_{02} - 2 \left(\frac{1}{2} e \right)^4 A_{04} \right. \\ &\quad \mp \left(\frac{1}{2} e \right)^2 A_{12} \mp 2 \left(\frac{1}{2} e \right)^4 A_{14} \\ &\quad \left. - 2 \left(\frac{1}{2} e \right)^4 A_{24} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{2} e \right)^4 A_{02} \right. \\ &\quad \left. \mp \left(\frac{1}{2} e \right)^4 A_{12} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g &= (1 - \sqrt{1 - \epsilon^2})f - \frac{2km'}{a'\sqrt{a}} \left(a \frac{\partial s}{\partial a} \right) \\
&= \frac{km'}{a'\sqrt{a}} \frac{\partial s}{\partial \epsilon} \left(\frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^3}{8} \right) - \frac{2km'}{a'\sqrt{a}} \left(a \frac{\partial s}{\partial a} \right) \\
&= \frac{km'}{a'\sqrt{a}} \left[-A_1^0 - 2N_{02} \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^2 - 2N_{04} \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^4 \right. \\
&\quad \mp 2N_{12} \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^2 \mp 2N_{14} \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^4 \\
&\quad \left. - 2N_{24} \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^4 \right. \\
&\quad + A_{02} \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^2 + 2A_{04} \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^4 \\
&\quad \pm A_{12} \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^2 \pm 2A_{14} \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^4 \\
&\quad \left. + 2A_{24} \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^4 \right. \\
&\quad \left. - A_{02} \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^2 \right. \\
&\quad \left. \mp A_{12} \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

Diese Ausdrücke sind dann in unsere Bedingung (II)

$$pn - (p+2)n' + 2f + pg = 0$$

einzusetzen, und es ergeben sich mit verschiedenen Werten von ϵ die entsprechenden n .

Um die einzelnen Charakteristika der periodischen Lösungen scharf auseinander zu trennen, ist es in unserem Falle $(p+2)/p$ wohl geboten, nach Potenzen des Zuwachses des Arguments der *Laplaceschen* Transzendenten zu entwickeln. Wir finden so

$$\begin{aligned}
A_n^j(\alpha + \xi) &= A_n^j(\alpha) + \eta [n A_n^j(\alpha) + (n+1) A_{n+1}^j(\alpha)] \\
\eta &= \xi/\alpha = \xi a'/a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f/q &= \frac{1}{2}(A_1^0 + A_2^0) \pm \left[\frac{1}{4}(4p+3)(p+2)A^{p+2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}[2(p+2)-1]A_1^{p+2} + \frac{1}{2}A_2^{p+2} \right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\eta \left[\frac{1}{2}A_1^0 + \frac{1}{2}A_2^0 + 3A_3^0 \right. \\
&\quad \left. \pm \left(-\frac{1}{4}(p+2)(4p+3)A_0^{p+2} \right. \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}[(p+2)(4p+3) + 2p+3]A_1^{p+2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}(8p+15)A_2^{p+2} + 3A_3^{p+2} \right] \\
&\quad + f_\epsilon \text{ (eine Funktion, die mit } \epsilon^2 \text{ verschwindet)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g/q &= -A_1^0 - \eta \left(\frac{1}{2}A_1^0 + 2A_2^0 \right) \\
&\quad + g_\epsilon \text{ (eine Funktion, die mit } \epsilon^2 \text{ verschwindet)}
\end{aligned}$$

$$n = \bar{n} \left(1 - \frac{3}{2}\eta + \frac{15}{8}\eta^2 \right)$$

$$\frac{km'}{a'\sqrt{a}} = \frac{km'}{a'\sqrt{a}} \left(1 - \frac{1}{2}\eta \right)$$

$$\zeta = 5l' - 3\lambda - 2\varpi$$

$$\begin{aligned}
s &= \frac{1}{2}A^0 + \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^2 (A_1^0 + A_2^0) + 3(A_3^0 + A_4^0) \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^4 + 10 \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^6 (A_5^0 + A_6^0) \\
&\quad + \cos \zeta \left[(37.5A^6 + 9A_1^6 + A_2^6) \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^2 + \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^4 (-665A^5 - 169A_1^5 + 11A_2^5 + 20A_3^5 + 4A_4^5) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^6 (3657.1875A^5 + 1201.125A_1^5 - 179.375A_2^5 - 265.5A_3^5 - 4.5A_4^5 + 55A_5^5 + 15A_6^5) \right] \\
&\quad + \cos 2\zeta \left[\left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^4 (2760A^{10} + 729A_1^{10} + 139A_2^{10} + 17A_3^{10} + A_4^{10}) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^6 (-116856A^{10} - 32725.2A_1^{10} - 5378A_2^{10} + 96A_3^{10} + 300A_4^{10} + 70A_5^{10} + 6A_6^{10}) \right] \\
&\quad + \cos 3\zeta \left[\left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^6 (230486.3125A^{15} + 62874.075A_1^{15} + 13937.375A_2^{15} + 2409.5A_3^{15} \right. \\
&\quad \left. + 304.5A_4^{15} + 25A_5^{15} + A_6^{15}) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a ds/da &= \frac{1}{2}A_1^0 + \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^2 (A_1^0 + 4A_2^0 + 3A_3^0) + \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^4 3(3A_3^0 + 8A_4^0 + 5A_5^0) \\
&\quad + \cos \zeta \left[(46.5A_1^5 + 20A_2^5 + 3A_3^5) \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^2 + \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^4 (-834A_1^5 - 316A_2^5 + 93A_3^5 + 96A_4^5 + 20A_5^5) \right] \\
&\quad + \cos 2\zeta \left[\left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^4 (3489A_1^{10} + 1736A_2^{10} + 468A_3^{10} + 72A_4^{10} + 5A_5^{10}) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s &= \frac{1}{2}A^0 + 2.899480 \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^2 + 25.83763 \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^4 + 343.5779 \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^6 \\
&\quad + \cos \zeta \left[13.09532 \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^2 - 82.02944 \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^4 + 967.964 \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^6 \right] \\
&\quad + \cos 2\zeta \left[360.4988 \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^4 - 8973.526 \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^6 \right] + \cos 3\zeta 12559.14 \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a ds/da &= 0.5532197 + 17.22089 \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^2 + 330.0330 \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^4 + \cos \zeta [84.36327 \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^2 - 25.11951 \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^4] \\
&\quad + \cos 2\zeta 4215.143 \left(\frac{1}{2}\epsilon \right)^4.
\end{aligned}$$

Unsere Bedingungsgleichung (II) lautet dann

$$\begin{aligned}
0 &= p\bar{n} - (p+2)n' + 2\bar{f} + p\bar{g} - \frac{3}{2}p\eta\bar{n} + \frac{15}{8}p\eta^2\bar{n} \\
&\quad + \eta q \left[\frac{1}{2}(1-p)A_1^0 + \frac{1}{2}(7-4p)A_2^0 + 3A_3^0 \right] \\
&\quad \pm \eta q \left(-\frac{1}{4}[(p+2)(4p+3)]A_0^{p+2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}[(p+2)(4p+3) + 2p+3]A_1^{p+2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}(8p+15)A_2^{p+2} + 3A_3^{p+2} \right)
\end{aligned}$$

wo gesetzt wurde

$$q = \alpha m' \bar{n} \quad f(\eta = 0) = \bar{f} \quad g(\eta = 0) = \bar{g}.$$

Die Relation hat die Form $L\eta^2 + M\eta + N = 0$. Wählen wir nun ϵ als Parameter, so genügt es, dieselbe in bezug auf η aufzulösen. Die numerische Rechnung wird schematisch und erledigt sich sehr schnell, da mit ϵ sich nur N ändert. Es wird

$$\eta = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - 4LN}}{2L}$$

$$L = \frac{15}{8}p\bar{n}$$

$$N = p\bar{n} - (p+2)n' + 2\bar{f} + p\bar{g}$$

$$\begin{aligned}
M &= -\frac{3}{2}p\eta\bar{n} + q \left[\frac{1}{2}(1-p)A_1^0 + \frac{1}{2}(7-4p)A_2^0 + 3A_3^0 \right. \\
&\quad \left. \pm \left(-\frac{1}{4}(p+2)(4p+3) \right) A_0^{p+2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}(p+2)(4p+3) + 2p+3 \right] A_1^{p+2} \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}(8p+15)A_2^{p+2} + 3A_3^{p+2} \right].
\end{aligned}$$

Nachdem so für einzelne ϵ des Konvergenzbereiches η gefunden wurde, findet man gleich nach den angegebenen Ausdrücken n , f und g .

Für den speziellen Fall $5/3$, den wir näher behandeln wollen, ergibt sich

$$\begin{aligned}
f &= \dots + \eta q \left(\frac{1}{4}A_1^0 + \frac{7}{4}A_2^0 + \frac{3}{2}A_3^0 \right) \\
&\quad \pm \eta q \left(-\frac{75}{8}A^5 + \frac{42}{2}A_1^5 + \frac{39}{4}A_2^5 + \frac{3}{2}A_3^5 \right) + \dots \\
g &= -qA_1^0 - \eta q \left(\frac{1}{2}A_1^0 + 2A_2^0 \right) + \dots \\
3\bar{n} - 5n' + 2\bar{f} + 3\bar{g} - \frac{9}{2}\eta\bar{n} + \frac{45}{8}\eta^2\bar{n} \\
&\quad + \eta q \left[-A_1^0 - \frac{5}{2}A_2^0 + 3A_3^0 \right. \\
&\quad \left. \pm \left(-\frac{75}{4}A^5 + 42A_1^5 + \frac{39}{2}A_2^5 + 3A_3^5 \right) \right] = 0. \quad (II)
\end{aligned}$$

Der kritische Teil der Störungsfunktion, den man zur Bestimmung der Koeffizienten A_{mn} , N_{mn} , sowie weiter bei der Untersuchung der Stabilitätsverhältnisse braucht, lautet in diesem Falle

Nach dem Kriterium von *Sundman* konvergieren diese Entwicklungen, wenn

$$1 + 2e + e^2 + \frac{2}{3}e^3 + \frac{2}{3}e^4 \dots \leq (1/\alpha)(1 - 2e' + e'^2 - \frac{2}{3}e'^3 + \frac{2}{3}e'^4 + \dots) \quad \alpha = a/a', e' = 0$$

$$e \leq (1/\sqrt{\alpha}) - 1 \quad e \leq 0.185.$$

Bei der oben angedeuteten Grenze der Präzision gewinnen wir so alle Glieder, welche noch auf resp. f, g, n in der dritten Dezimale Wirkung haben. Unter Zugrundelegung der numerischen Konstanten $\alpha^{-1/2} = 5/3 = (\bar{n}/n')\sqrt{1+m'}$, $\alpha = 0.711379$, $\bar{n} = 498.3094$, $\log m' = 6.9799061$, $n' = 299.1284$, $(km')/(a'\sqrt{a}) = \bar{n}m'\alpha = \text{numlog } 9.5295061$ lauten dann die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \zeta = 0 \quad f &= 2.7068 + 15.8376\eta + 97.5819\left(\frac{1}{2}e\right)^2 + 2274.825\left(\frac{1}{2}e\right)^4 \\ g &= -0.3744 - 1.4010\eta - 63.3506\left(\frac{1}{2}e\right)^2 - 2859.131\left(\frac{1}{2}e\right)^4 \\ \zeta = \pi \quad f &= -1.7255 - 10.4997\eta + 161.9736\left(\frac{1}{2}e\right)^2 - 11562.475\left(\frac{1}{2}e\right)^4 \\ g &= -0.3745 - 1.4010\eta + 41.9991\left(\frac{1}{2}e\right)^2 - 2773.220\left(\frac{1}{2}e\right)^4 \\ \zeta = 0 \quad 3\bar{n} - 5n' + 2\bar{f} + 3\bar{g} - 2214.9200\eta + 2802.990\eta^2 &= 0 \\ \zeta = \pi \quad 3\bar{n} - 5n' + 2\bar{f} + 3\bar{g} - 2267.5948\eta + 2802.990\eta^2 &= 0 \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Entwicklungen ist es nun leicht, nach dem angegebenen Verfahren die Hauptcharakteristika der periodischen Lösungen mit dem Argumente e zu tabulieren. Die Tabellen geben: f die säkulare Bewegung des Perihels, g die Störung der mittleren Bewegung in Länge, $n = ka^{-3/2}$, welches zweimal zur Kontrolle berechnet wird [aus dem Ausdrucke $n = f(\bar{n})$ und aus der Bedingungsgleichung (II)], die *Wilken*sche Größe n_0 (vergl. § 3) und das Entwicklungsargument η .

Die Tabelle lehrt, daß im Gegensatze zu den Hecuba ähnlichen Fällen n einen sehr kleinen Bereich hat. Während

$$\begin{aligned} \zeta = 0 \quad 3\bar{n} - 5n' + 2\bar{f} + 3\bar{g} - 2214.9200\eta + 2802.990\eta^2 &= 0 \quad n = \bar{n}(1 - \frac{3}{2}\eta + \frac{15}{8}\eta^2) \\ \zeta = \pi \quad 3\bar{n} - 5n' + 2\bar{f} + 3\bar{g} - 2267.5948\eta + 2802.990\eta^2 &= 0. \end{aligned}$$

Die Apsidendrehung $f = d\varpi/dt$ ist im Falle symmetrischer Konjunktion direkt (+), im Falle symmetrischer Opposition retrograd (-).

Die Bedingungsgleichung für asymmetrisch periodische Lösungen lautet

$$13.095 - 82.029\left(\frac{1}{2}e\right)^2 + 1441.9952\left(\frac{1}{2}e\right)^2 \cos \zeta = 0$$

$$\cos \zeta = \frac{-13.095 + 82.029\left(\frac{1}{2}e\right)^2}{1441.995\left(\frac{1}{2}e\right)^2} < 1$$

$$e^2 \geq 0.034 \quad e \geq 0.185 \quad (0.185 \text{ Konvergenzbereich}).$$

Wir sehen somit, daß dieselben, wenn sie überhaupt existieren, nur durch mechanische Quadraturen zu ermitteln sind.

3. Über die Stabilitätsverhältnisse der periodischen Anschlußbahnen.

Wenn wir die kleinen Schwingungen der Variationen unserer Koordinaten betrachten, so finden wir aus

$$\begin{aligned} \frac{d\delta x_1}{dt} &= \frac{\partial^2[F]}{\partial x_1 \partial y_1} \delta x_1 + \frac{\partial^2[F]}{\partial y_1^2} \delta y_1 \\ \frac{d\delta y_1}{dt} &= \frac{\partial^2[F]}{\partial x_1^2} \delta x_1 + \frac{\partial^2[F]}{\partial x_1 \partial y_1} \delta y_1 \end{aligned}$$

$$\delta x_1 = a e^{i h t} \quad \delta y_1 = b e^{i h t} \quad \text{also } h^2 = LN - M^2$$

wo gesetzt wurde

$$L = \frac{\partial^2[F]}{\partial x_1^2} = q^2 \frac{\partial^2(F_0 + R)}{\partial G^2}; \quad M = \frac{\partial^2[F]}{\partial x_1 \partial y_1} = q \frac{\partial^2 R}{\partial G \partial \zeta}$$

$$N = \frac{\partial^2[F]}{\partial y_1^2} = \frac{\partial^2 R}{\partial \zeta^2}.$$

die Herren *Schwarzschild* und *Dziwulski* für resp. $\frac{2}{1} \frac{3}{2}$ denselben auf etwa $\pm 50'' \pm 30''$ weit von der strengen Kommensurabilität schätzen, hat derselbe in unserem Falle einen beinahe konstanten Wert für die ganze Schar symmetrisch periodischer Lösungen. Auch ist unmittelbar aus der Tabelle abzulesen, daß die periodischen Bahnen sich in je einer Richtung hin erstrecken. Die entgegengesetzte Richtung $n > 497.102$, $n > 500.053$ gibt für e^2 einen negativen Wert. Letztere Grenzlösungen ergeben sich resp. durch Auflösen der Gleichungen

$$\text{Es gilt } LN \gtrless M^2 \quad \frac{\partial^2(F_0 + R)}{\partial G^2} \frac{\partial^2 R}{\partial \zeta^2} \gtrless \left(\frac{\partial^2 R}{\partial G \partial \zeta} \right)^2.$$

Daraus folgern wir sofort ein Kriterium der Stabilität, welches für symmetrische periodische Lösungen $\zeta = 0, \pi$ mit demjenigen von *Schwarzschild* l. c. übereinstimmt. Es verschwindet dann die rechte Seite der Ungleichung, und die Bahnen sind $\left\{ \begin{array}{l} \text{stabil periodisch} \\ \text{instabil} \end{array} \right\}$, je nachdem beide Faktoren

links $\left\{ \begin{array}{l} \text{gleiches} \\ \text{entgegengesetztes} \end{array} \right\}$ Vorzeichen besitzen. Es zeigt sich mittels einfacher Differentiation, daß

$$N = \frac{\partial^2 R}{\partial \zeta^2} = A \quad \frac{3}{2} \frac{k^4}{L^4} = C$$

$$\left(\frac{q}{p} \right)^2 \frac{\partial^2 R}{\partial G^2} - \left(\frac{q}{p} \right) \frac{\partial^2 R}{\partial L \partial G} = B \quad (A B C \text{ l. cit.})$$

$$L = 2C + B.$$

Für die numerische Rechnung ist es vorteilhafter, zu den Veränderlichen e, a überzugehen. Wir finden so nach kurzer Umformung mit Vernachlässigung von η

$$= 3 \frac{(p+q)n' - qf - pg}{p} + \left(\frac{1}{e} - \frac{e}{2} \right) \frac{\partial}{\partial e} \left[\frac{q}{p} g + f \left(\frac{q}{p} \right)^2 \right].$$

Setzen wir nun voraus, daß $N = A$ sein Vorzeichen im Konvergenzbereich nicht ändert, dann ist offenbar der Stabilitätscharakter von dem Vorzeichenwechsel des Faktors $\partial^2(F_0 + R)/\partial G^2$ abhängig. Unsere Beziehung $\partial[F]/\partial x_1 = 0 = f(x_1, x_2)$ repräsentiert in der $X_1 X_2$ -Ebene eine graphische Kurve. Durch jeden Punkt dieser Kurve geht eine Bahn-

kurve $[F(x_1, x_2)] = C$ und hat in demselben einen Verzweigungspunkt. Wir können somit unsere graphische Kurve definieren als geometrischen Ort der Verzweigungspunkte der Bahnkurvenschar $[F] = C$.

Für den Verzweigungspunkt der Bahnkurve gilt das Integral (I) § 1, $x_2 = qL + pG = \text{konst.}$, wogegen bei der graphischen Kurve dieses nur in dem Falle gilt, wo die Tangente beider Kurven zusammenfällt und zur X_2 -Achse senkrecht steht, d. i., wo $\partial^2[F]/\partial x_1^2 = 0$. In diesem Punkt hat die graphische Kurve einen Verzweigungspunkt, und nach obigem ändert sich zugleich der Stabilitätscharakter. *)

Um die graphischen Kurven zeichnen zu können, haben wir in den Tafeln in der letzten Kolumne eine einfache Funktion der Größe x_2 tabuliert. Dazu wählen wir mit Hilfe unseres Integrals (I) § 1, diejenige Größe n_0 , welche Herr *Wilkins* als Argument seiner Tafeln hat und welche, wie man gleich einsieht, bis auf eine multiplikative Konstante mit dem *Schwarzschild'schen* N zusammenfällt. Es gilt nämlich

$$qL + pG = k\sqrt{a}(q + p - p\sqrt{1 - e^2}) = qk\sqrt{a_0}$$

$$N = k^4/(qL + pG)^3 = q^{-3}(k/a_0^{3/2}) = q^{-3}n_0$$

für $p = 3$, $q = 2$, $N = 1/8 n_0$.

Wenn wir nun unseren Fall $(p + 2)/p = 5/3$ näher fixieren, so finden wir für symmetrisch periodische Lösungen folgende Charakteristika der Stabilität. Für symmetrische Konjunktion:

$$A(a'/k^2 m')$$

$$= -13.0953(1/2 e)^2 - 1359.966(1/2 e)^4 - 78106.11(1/2 e)^6$$

$$(2C + B)k\sqrt{a} = 1491.918 - 902.0323(1/2 e)^2$$

für symmetrische Opposition:

$$A(a'/k^2 m')$$

$$= +13.0953(1/2 e)^2 - 1524.025(1/2 e)^4 + 149894.32(1/2 e)^6$$

$$(2C + B)k\sqrt{a} = 1550.236 - 7541.22(1/2 e)^2$$

Wir sehen sogleich, daß im ganzen *Sundmanschen* Konvergenzbereich unsere Ausdrücke ihr Vorzeichen nicht ändern. Es sind daher die Bahnen der Gruppe $\zeta = 0$ instabil $(-+)$, wogegen die Bahnen symmetrischer Opposition stabil periodisch $(++)$ sind, und zwar gilt dieses im ganzen Konvergenzbereich. Da beide Ausdrücke A ihr Vorzeichen behalten, kann man auch das graphische Verfahren anwenden und man findet sogleich unsere analytischen Schlüsse bestätigt. Vergl. die Figuren auf p. 335-336.

Außerdem besteht, wie in § 3 gefunden wurde, instabiler Bereich asymptotischer Bewegungen auf derjenigen Seite der Kommensurabilität, wo zugleich gilt

$$\zeta = 0 \quad n > 497.102$$

$$\zeta = \pi \quad n > 500.053.$$

Den Übergang bildet in beiden Fällen eine nahezu kreisförmige rotierende Bahnform. Dieselbe ist selbstverständlich

instabil, was man übrigens auch aus unserem Ausdrucke für h sieht. Es ist in demselben nicht nur $M = 0$, sondern auch $N = 0$ (welches mit e^2 verschwindet). Das gibt die bekannte degenerierte Lösung.

Was endlich die Stabilitätsverhältnisse der asymmetrischen periodischen Lösungen betrifft, so kann man dieselben in unserem Falle, wenn sie überhaupt existieren, nur mittels mechanischer Quadraturen ermitteln.

Numerische Werte.

$\zeta = 0$. Symmetrische Konjunktion.

e	f	g	n	n_0	η
0.01	+2.735	-0.378	497.102	497.00	+0.001623
0.02	+2.742	-0.383	497.102	496.67	1619
0.03	+2.755	-0.391	497.102	496.11	1619
0.04	+2.772	-0.403	497.102	495.33	1619
0.05	+2.794	-0.418	497.102	494.33	1619
0.06	+2.822	-0.436	497.102	493.11	1619
0.07	+2.855	-0.459	497.102	491.67	1619
0.08	+2.894	-0.486	497.103	490.02	1617
0.09	+2.939	-0.517	497.105	488.15	1615
0.10	+2.990 ²⁾	-0.553	497.107	486.07	1612
0.11	+3.048	-0.595	497.110	483.79	1608
0.12	+3.113	-0.642	497.114	481.31	1603
0.13	+3.185	-0.695	497.120	478.63	1595
0.14	+3.265	-0.756 ²⁾	497.127	475.75	1586
0.15	+3.353	-0.823	497.135	472.69	1573
0.16	+3.449	-0.899	497.147	469.44	1558
0.17	+3.555	-0.984 ¹⁾	497.161	466.01	1539
0.18	+3.670 ¹⁾	-1.077	497.178	462.41	1517

$\zeta = \pi$. Symmetrische Opposition.

e	f	g	n	n_0	η
0.01	-1.697	-0.370	500.049	499.96	-0.002320
0.02	-1.685	-0.367	500.038	499.61	2306
0.03	-1.666	-0.362	500.020	499.03	2281
0.04	-1.639	-0.355	499.995	498.22	2249
0.05	-1.605	-0.346	499.964	497.18	2208
0.06	-1.566	-0.336	499.927	495.91	2159
0.07	-1.522	-0.324	499.886	494.43	2104
0.08	-1.475	-0.311	499.842	492.72	2044
0.09	-1.424	-0.298	499.795	490.79	1982
0.10	-1.372	-0.284	499.747	488.66	1918
0.11	-1.322 ²⁾	-0.270	499.699	486.32	1855
0.12	-1.273	-0.257	499.653	483.77	1793
0.13	-1.229	-0.244 ²⁾	499.611	481.03	1737
0.14	-1.192 ¹⁾	-0.233	499.575	478.10	1689
0.15	-1.163	-0.224	499.546	474.98	1651
0.16	-1.145	-0.217	499.528	471.69	1627
0.17	-1.142	-0.213	499.522	468.23	1620
0.18	-1.15	-0.21	499.5	464.60	(1631)

¹⁾ resp. ²⁾ bedeutet: die Zahl ist (infolge der wachsenden Exzentrizität) richtig bis auf 1 oder 2 Dezimalen inklusive.

*) Als Berichtigung zu der Arbeit von *Dziwulski* »Über periodische Bahnen vom Hilda-Typus« A. N. 183.65 sei bemerkt, daß, da sein Faktor $2C + 1/2 B$, wie er selbst bemerkt, das Vorzeichen nicht ändert, im Falle $\zeta = 0$ eigentlich kein Grund vorliegt, daß seine Kurven Verzweigungen aufweisen, und man braucht daher deren Ursache nicht in der »ungenügenden Konvergenz« der Reihen zu suchen (l. c. p. 72 Ende). Es sind vielleicht auch sonst seine Schlüsse betreffend die Stabilität l. c. p. 70 zu modifizieren, da er beim Verallgemeinern des *Schwarzschild'schen* Kriteriums eine unrichtige Formel erhält und mit derselben numerisch rechnet. Sein Ausdruck p. 70 l. c. soll heißen

$$2C + 1/2 B = 3k^4/L_0^4 + 1/4(\partial^2 R/\partial G^2) - 1/2(\partial^2 R/\partial L \partial G).$$

Darstellung von $n = k a^{-8/3}$ und von e als Funktion von n_0
(mit Vernachlässigung sämtlicher von η abhängenden Glieder in f und g).

Prag, 1912 Mai 20.

Wladimír Wáclav Heinrich.

Henri Poincaré.

Henri Poincaré naquit à Nancy, le 29 avril 1854. Sa famille était lorraine; son grand-père fut pharmacien à Nancy; son père fut, dans la même ville, un médecin désintéressé et un savant professeur à la Faculté; sa mère, comprenant admirablement ses devoirs, assurait le bonheur et la prospérité de son foyer. Le jeune *Henri Poincaré* fut placé vers l'âge de 8 ans au Lycée de sa ville natale. Après de brillantes études littéraires et scientifiques, il entra, en 1873, premier à l'Ecole Polytechnique. A sa sortie, en 1875, il fut nommé élève ingénieur à l'Ecole nationale supérieure des Mines; et, en avril 1879, il devint ingénieur des Mines. Dans cette fonction, *Henri Poincaré* se fit remarquer par son respect du devoir et son courage. Tout en restant inscrit dans le corps des Mines, dont il devint inspecteur général en 1910, *Henri Poincaré* entra dans l'Université le 1^{er} décembre 1879 comme chargé de Cours à la Faculté des Sciences de Caen. Moins de deux ans après, le 21 octobre 1881, il était nommé à la Faculté des Sciences de Paris. Les savantes leçons qu'il y professa, sur l'Analyse mathématique, la Mécanique analytique, la Physique mathématique et, à partir du 5 novembre 1896, la Mécanique céleste, nous ont été conservées, grâce à l'initiative de quelques-uns de ses élèves qui, les ayant soigneusement recueillies, les publièrent avec son assentiment. En outre, de 1904 à 1908 il occupa la chaire d'Astronomie générale à l'Ecole Polytechnique et, depuis 1902, il était professeur d'Electricité théorique à l'Ecole supérieure des Postes et des Télégraphes. Lorsque *Henri Poincaré* fut élu membre de l'Académie des Sciences, le 31 janvier 1887, il était depuis plusieurs années déjà membre de deux Sociétés royales des Sciences, celles de Göttingue et d'Upsal. Il fut, à l'étranger, membre de vingt et une Académies royales ou nationales et d'un grand nombre de Sociétés savantes importantes. Huit Universités étrangères lui conférèrent le titre de docteur honoris causa. Il obtint de France, de Suède, d'Angleterre, de Hongrie, des prix et des médailles d'or en récompense des beaux travaux qui, dans les deux Mondes, ont fait hautement apprécier son nom et louer son génie. En 1906, il occupa le fauteuil de la Présidence de l'Académie des Sciences. Le 5 mars 1908, il fut élu membre de l'Académie Française en remplacement de *Sully Prud'homme*. Ce fut une surprise et une consternation générale lorsqu'on apprit la mort soudaine de *Henri Poincaré*, le 17 juillet 1912; on ignorait même que, quelques jours auparavant, il avait dû subir une difficile opération chirurgicale. On eut l'impression douloureuse que la Science perdait son représentant le plus actif, le plus universel, le plus écouté, le plus apte à apporter de précieux éclaircissements dans les questions difficiles et délicates. En lui, la France perdait un de ses meilleurs et de ses plus illustres enfants.

L'espace dont nous disposons ne nous permet qu'un exposé rapide des recherches faites par *Henri Poincaré*; toutefois, la nature de ce Périodique exige que les principaux travaux astronomiques de notre si regretté savant soient avec soin mis en relief. Je pense donc qu'il me sera pardonné de n'indiquer que très rapidement les principales recherches d'Analyse pure et de Physique mathématique de l'éminent géomètre dont le monde entier déplore la perte.

Les premières recherches de *Henri Poincaré*, sur la théorie des nombres, sur la théorie des équations différentielles, des équations aux différences partielles et des fonctions analytiques à une ou plusieurs variables, conduisent à des résultats entièrement nouveaux qui montrent un esprit original et profond ainsi qu'une grande puissance d'invention. Elles attirèrent vivement l'attention. En s'appuyant sur des propositions dues à Briot, à Bouquet et à lui-même, et sur des développements en séries donnés par *Sophie Kowalevski*, *Henri Poincaré* a trouvé que les courbes lieux des équations différentielles du premier ordre présentent trois espèces de points singuliers, les cols, les nœuds et les foyers, et découvre, entre les courbes qui passent par ces trois espèces de points, une relation constante identique au théorème d'*Euler* sur le nombre des sommets, des faces et des arêtes d'un polyèdre. Ces recherches et d'autres de même importance sur les équations différentielles du premier ordre et du premier degré, sur l'intégration des équations différentielles linéaires, sur les fonctions Θ ont