IV. *Ueber die Schwingungen einer kreisförmigen elastischen Scheibe*[1]*; von G. Kirchhoff.*

Die Entdeckung Chladni's, die Ruhelinien einer schwingenden Scheibe durch aufgestreuten Sand sichtbar zu machen, leitete auch die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf das Problem der schwingenden Scheiben. Frl. Sophie Germain hat das Verdienst, zuerst einen Versuch zur Lösung des Problems gemacht zu haben; aus einer Hypothese, die sie über die Kräfte ersonnen hatte, mit der eine elastische Platte Formveränderungen widerstrebt, entwickelte sie, unterstüzt von Lagrange, die Differentialgleichungen für die Schwingungen einer solchen. Sie war im Stande, diese Gleichungen für den Fall einer rechteckigen Scheibe zu integriren, und erhielt in Beziehung auf die Höhe der Töne und die Knotenlinien, die diese begleiten, Resultate, die mit ihren Beobachtungen in Uebereinstimmung waren. Diese Uebereinstimmung kann indessen nur als eine zufällige angesehen werden; jene Differentialgleichungen sind nicht die richtigen; denn es läfst sich nachweisen, dafs sie einen Widerspruch gegen sich selbst in sich tragen. Die Schuld hiervon fällt auf die Hypothese, von der Frl. Germain ausgegangen ist.

Auf einer festeren Grundlage hat Poisson eine zweite Theorie der Schwingungen einer Scheibe aufgebaut. Die allgemeinen Gleichungen für das Gleichgewicht und die Bewegung eines beliebig gestalteten elastischen Körpers waren durch Navier und durch ihn aufgestellt; aus diesen leitete er die entsprechenden Gleichungen für den Fall ab, dafs der Körper eine sehr dünne Platte ist. Diese Gleichungen hat er integrirt unter der Annahme, dafs die Platte eine kreisförmige ist, und so schwingt, dafs alle Punkte, die gleich weit vom Mittelpunkte abstehen, sich immer in demselben Schwingungszustande befinden. Er fand, dafs eine

1) S. Crelles Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. XL.

solche Platte unendlich viele Töne geben kann, von denen der tiefste Ton von 1, der zweite von 2, der dritte von 3 Knotenkreisen etc. begleitet wird; er berechnete die Radien der Knotenkreise, die zu den beiden tiefsten Tönen gehören, und fand eine gute Uebereinstimmung mit den Werthen, die Savart durch Messung dieser Radien erhalten hatte.

Aber auch die Poisson'sche Theorie der Schwingungen einer Platte bedurfte einer Berichtigung. Ich habe nachgewiesen, dafs den drei Gränzbedingungen, die Poisson entwickelt hat, im Allgemeinen nicht gleichzeitig genügt werden kann, und habe zwei Gränzbedingungen entwickelt, die an die Stelle jener zu setzen sind. Hiernach hatte es keine Schwierigkeit die Schwingungen einer kreisförmigen Platte im allgemeinen Falle durch die Rechnung zu verfolgen. Nach der Theorie Poisson's war dieses nicht möglich, da hier sich schon der Widerspruch seiner drei Gränzbedingungen zeigt, während in dem von ihm behandelten speciellen Falle diesen gleichzeitig genügt werden kann, und dieselben gleichbedeutend sind mit den beiden von mir aufgestellten.

Bevor ich die Resultate meiner Rechnung angebe, mufs ich folgende Bemerkung voranschicken. In den Gleichungen, die sich auf das Gleichgewicht und die Bewegung eines beliebig gestalteten elastischen Körpers beziehen, kommt eine Gröfse vor, die ich θ nennen will, für die bisher, den theoretischen Betrachtungen Poisson's und den Beobachtungen von Cagniard-Latour gemäfs, der Werth $\frac{1}{2}$ angenommen worden ist. Hr. Wertheim hat aus seinen Versuchen auf einen andern Werth von θ schliefsen zu müssen geglaubt, nämlich auf den Werth $\theta = 1$. Da die Gröfse θ auch in den Gleichungen vorkommt, die sich auf die Schwingungen einer Platte beziehen, so habe ich die Rechnung in Beziehung auf die Töne und die Knotenlinien einer Kreisscheibe für beide Werthe von θ angestellt. Es zeigte sich, dafs der Unterschied beider Rechnungen immer nicht erheblich und desto kleiner ausfällt, je höher der Ton ist. Ich begnügte mich daher für die höheren Töne die Rechnung allein unter der älteren Annahme für θ durchzuführen.

Die Knotenlinien, die zu irgend einem Tone der Kreisscheibe gehören, bestehen der Theorie gemäfs, welches auch der Werth von θ sey, aus Kreisen, die concentrisch sind mit der Peripherie der Scheibe, und Durchmessern, die dieselbe in gleiche Theile theilen. Einen jeden Ton kann man charakterisiren durch die Zahl der Durchmesser und die der Kreise, die in der zugehörigen Knotenfigur sich finden. Es bezeichne m die Anzahl der Durchmesser, μ die der Kreise; dann werden sich die Schwingungszahlen der Töne, welche eine und dieselbe Scheibe geben kann, ordnen lassen in eine Tafel mit doppeltem Eingange, mit einem in Beziehung auf m und einem in Beziehung auf μ. Die Höhe der Töne, die eine Scheibe liefert, ist abhängig von ihrer Gröfse, Dicke und ihrem Stoffe; jedoch sind die Intervalle zwischen zwei entsprechenden Tönen von diesen Bedingungen unabhängig und bei allen Kreisscheiben die nämlichen. Die beiden folgenden Tafeln enthalten diese Intervalle; die erste ist unter der Annahme $\theta = \frac{1}{2}$, die zweite unter der Annahme $\theta = 1$ berechnet; in jeder ist die Anzahl der Schwingungen angegeben, die bei den einzelnen Tönen in der Zeit vollführt werden, in der bei dem Grundton der Scheibe eine Schwingung geschieht. Der Grundton ist derjenige Ton, dessen Knotenfigur aus zwei auf einander senkrechten Durchmessern besteht.

$$\theta = \tfrac{1}{2}.$$

μ.	$m=0$.	$m=1$.	$m=2$.	$m=3$.	$m=4$.	$m=5$.
0			1,0000	2,3124	4,0485	6,1982
1	1,6131	3,7032	6,4033	9,6445	13,3937	17,6304
2	6,9559	10,8383	15,3052	20,3249		
3	15,9031.					

$$\theta = 1.$$

μ.	$m=0$.	$m=1$.	$m=2$.	$m=3$.
0			1,0000	2,3274
1	1,7284	3,9072	6,7111	10,0762
2	7,3344	11,4003.		

Chladni hat in seiner Akustik Beobachtungen über die Töne einer kreisförmigen Scheibe mitgetheilt; aus diesen ergaben sich die folgenden Schwingungszahlen:

μ.	$m=0$.	$m=1$.	$m=2$.	$m=3$.	$m=4$.	$m=5$.
0			1,0	2,2	4,0	6,0 ... 6,4
1	1,6	3,6	6,0	9,0 ... 9,5	12,7	17,0
2	6,4 +	10,1	14,3	19,0		
3	14,3 ... 15,1.					

Das hinzugefügte Zeichen + deutet hier an, dafs der beobachtete Ton etwas höher war. Die beobachteten Tonverhältnisse stimmen etwas besser mit denjenigen überein, die unter der Annahme $\theta = \frac{1}{2}$ bezeichnet sind, als mit denjenigen, die sich bei der Annahme $\theta = 1$ ergeben haben; indessen steht zu hoffen, dafs genauere Beobachtungen der Töne auf eine bestimmte Weise für die eine oder die andere dieser Annahmen sprechen werden.

In Beziehung auf die Tonverhältnisse bemerke ich hier noch Folgendes. Wie die Schwingungszahlen der Töne, die ein frei schwingender Stab geben kann, sich immer mehr und mehr den Quadraten der ungeraden Zahlen nähern, je höher die Töne werden; so nähern sich auch die Schwingungszahlen der höheren Töne der kreisförmigen Scheibe den Quadraten gewisser Zahlen, nämlich den Quadraten von $m+2\mu$. Diese Thatsache hat schon Chladni durch Beobachtungen festgestellt; und die Theorie bestätigt sie, welchen Werth man auch für θ annehme.

Um mit Hülfe der bisherigen Angaben die absolute Höhe der Töne einer Kreisscheibe berechnen zu können, ist es noch nöthig die Bestimmung für die Höhe des Grundtones hier herzusetzen. Dieser ist von den Dimensionen und dem Stoffe der Scheibe abhängig; bezeichnet l ihren Radius, ε ihre halbe Dicke, q den Elasticitätscoëfficienden und ϱ die Dichtigkeit ihres Stoffes, so ergiebt sich die Anzahl der Schwingungen, die in der Zeiteinheit bei dem Grundton vollführt werden:

bei der Annahme $\theta = \frac{1}{2}$: $\frac{\varepsilon}{l^2}\sqrt{\frac{q}{\varrho}}\,1{,}04604$,

und bei der Annahme $\theta = 1$: $\frac{\varepsilon}{l^2}\sqrt{\frac{q}{\varrho}}\,1{,}02357$.

Durch Beobachtung ist diese Gröſse, soviel mir bekannt, bisher nicht ermittelt worden.

Ich komme jetzt zur Angabe der Werthe der Radien der Knotenkreise, die zu den verschiedenen Tönen gehören, wie sie die Rechnung unter den beiden Annahmen für θ und wie die Beobachtung sie geliefert hat. Die Anordnung der folgenden Tafeln, in denen diese Werthe enthalten sind, ist entsprechend der Anordnung in den Tafeln für die Höhe der Töne; der Radius der Scheibe ist $= 1$ gesetzt.

$\theta = \frac{1}{2}$.

μ.	$m=0$.	$m=1$.	$m=2$.	$m=3$.	$m=4$.	$m=5$.
1	0,68062	0,78136	0,82194	0,84523	0,86095	0,87256
2	0,39151	0,49774	0,56043	0,60365		
	0,84200	0,87057	0,88747	0,89894		
3	0,25679					
	0,59147					
	0,89381.					

$\theta = 1$.

μ.	$m=0$.	$m=1$.	$m=2$.	$m=3$.
1	0,67941	0,78088	0,82274	0,84681
2		0,49715		
		0,87015.		

Die Beobachtungen, deren Resultate nun folgen, sind von Hrn. Strehlke angestellt, der die Güte gehabt hat, sie mir mitzutheilen. Hr. Strehlke hat seine Messungen an sechs sehr sorgfältig gearbeiteten Scheiben ausgeführt, die durch I, II, III, IV, V, VI bezeichnet werden sollen; die vier ersten waren von Glas, die beiden letzten von Metall; Dicke und Durchmesser der Scheiben waren, nach Pariser Maaſs, ungefähr die folgenden:

		Dicke.	Durchmesser.
Scheibe	I	1 Linie	6 Zoll
»	II	1,1 »	7 »
»	III	$\frac{2}{3}$ »	7 »
»	IV	$\frac{2}{3}$ »	7 »
»	V	$\frac{2}{3}$ »	5 »
»	VI	$\frac{2}{3}$ »	6 »

Die an diesen Scheiben gemessenen Radien der Knotenkreise, waren, diese in Theilen des Radius der Scheiben ausgedrückt:

Scheibe I.

μ.	$m=0$.	$m=1$.
1	0,6792	0,7811.

Scheibe II.

μ.	$m=0$.	$m=1$.
1	0,6782	0,7802.

Scheibe III.

μ.	$m=0$.	$m=1$.	$m=2$.	$m=3$.	$m=4$.	$m=5$.
1	0,6780	0,7800	0,8210	0,8447	0,8601	0,8717.
2	0,3915	0,4977	0,5605	0,6038		
	0,8414	0,8697	0,8867	0,8981.		

Scheibe IV.

μ.	$m=0$.	$m=1$.	$m=2$.	$m=3$.	$m=4$.	$m=5$.
1	0,6770	0,7792	0,8205	0,8445	0,8601	
2	0,3911	0,4971	0,5608	0,6043		
	0,8411	0,8698	0,8870	0,8983		
3	0,2575					
	0,5921					
	0,8954					

Scheibe V.

μ.	$m=0$.	$m=1$.
1	0,6781	0,7796

Scheibe VI.

μ.	$m=0$.	$m=1$.	$m=2$.
1	0,6783	0,7802	0,8213.

Die an den verschiedenen Scheiben erhaltenen Resultate stimmen auf eine ausgezeichnete Weise unter einander überein, und mit den Resultaten der Rechnung, sowohl derjenigen, die unter der Annahme $\theta = \frac{1}{4}$, als derjenigen, die unter der Annahme $\theta = 1$ angestellt ist. Für die eine oder die andere dieser Annahmen entscheiden die Messungen der Radien der Knotenkreise nicht, da der Unterschied der Werthe, die die Rechnung bei beiden ergiebt, ein zu geringer ist.

V. *Beschreibung des Gyreidometers, eines Instrumentes zur genauen Messung der Farbenringe; von E. Wilde.*

Zur Erzeugung der *reflectirten Newton'schen Farbenringe* ist schon vor einigen Jahren von Jerichau [1]) eine Vorrichtung ersonnen worden, die sich vor andern [2]) zu demselben Zwecke bestimmten durch die den Gläsern gegebene Stellung auszeichnet. Dadurch nämlich, dafs in diesem Apparate, den Jerichau ein *Gyreidoskop* (von ὁ γῦρος, der Kreis; τὸ εἶδος, die Gestalt und σκόπεω, ich sehe) genannt hat, einem planparallelen Glase gegen eine bewegliche Horizontalebene, in der sich die Convexlinse befindet, eine geringe Neigung gegeben ist, wird man in den Stand gesetzt, beide Gläser allmälig und mit sehr kleiner Abnahme ihrer Entfernung immer mehr nähern, und die Aenderungen, die nach und nach in den Farben der Ringe eintreten, beobachten zu können.

Für das *Gyreidometer* habe ich diese zweckmäfsige Anordnung der Gläser im Wesentlichen beibehalten, sonst

1) Diese Ann. Bd. 54, S. 139.

2) Die Beschreibung einer von Ritchie zu eben diesem Zwecke angegebenen Vorrichtung findet man in diesen Ann. Bd. 42, S. 176.