Sugli spazii che ammettono un gruppo continuo di movimenti.

(Di GUIDO FUBINI, a Pisa.)

MEMORIA I.

Questo lavoro è un altro che mi riservo di pubblicare fra breve trattano della teoria generale degli spazii che ammettono un gruppo continuo di movimenti, delle proprietà di questi gruppi, dei loro sottogruppi finiti discontinui, e della determinazione degli spazii a quattro dimensioni che ammettono un tale gruppo di movimenti. I metodi di cui il prof. BIANCHI si servì (*) per determinare tutti gli spazii a tre dimensioni con un gruppo continuo di movimenti non illuminano abbastanza sul problema generale: uno dei risultati del presente lavoro è appunto quello di dare un metodo generale per risolvere con sole quadrature il problema, e che, applicato al caso particolare di spazii a tre dimensioni, permetterebbe di trovare rapidamente i risultati del prof. BIANCHI. Ma nè il metodo generale, nè il metodo del prof. BIANCHI generalizzato possono poi condurre senza una interminabile serie di calcoli all'effettiva determinazione di tali spazii quando il numero delle loro dimensioni è maggiore di tre: la Memoria seguente svolgerà per il caso di quattro dimensioni un metodo assai più rapido, e comodo.

Lo studio infine dei sottogruppi finiti discontinui di movimenti ammessi da tali spazii condurrà, fra l'altro, a notevoli rappresentazioni degli spazii dei tipi (VIII) e (IX) del prof. BIANCHI sulla sfera e sulla pseudosfera.

(*) Memorie della Società Italiana delle Scienze, 1897: *Sugli spazii a tre dimensioni, che ammettono*, ecc. Questa Memoria sarà in seguito indicata con (A). Avverto pure che la classica *Theorie der Transformationsgruppen* del LIE-ENGEL sarà indicata in seguito soltanto col nome di LIE.

Un altro risultato del presente lavoro che spero possa presentare qualche interesse, è di dare le condizioni necessarie e sufficienti affinchè un gruppo si possa considerare come gruppo di movimenti: condizioni, da cui si può trarre qualche proprietà degna di nota per taluni di tali gruppi.

Mi sia permesso infine di ringraziare qui vivamente l'illustre prof. LEVI-CIVITA, che acconsentì a leggere questo lavoro, prima che fosse pubblicato.

§ 1. Noi vogliamo trovare anzitutto dei teoremi generali relativi alla ricerca degli spazii che ammettono un gruppo continuo di movimenti: principio della nostra ricerca sarà di distinguere il problema in due parti: la prima relativa alla ricerca dei gruppi, che si possono considerare come gruppi di movimenti di uno spazio, la seconda relativa alla determinazione di uno spazio, di cui sia noto il gruppo corrispondente.

Il teorema fondamentale della prima parte delle nostre ricerche è il seguente:

Se un gruppo G_m trasforma in sè uno spazio S_n , e se le varietà minime invarianti sono delle V_{n-k} , ognuna di queste V_{n-k} è pure trasformata in sè da un gruppo proprio ad m parametri, e il gruppo G_m si può, con un opportuno cangiamento di variabili, ridurre a un gruppo transitivo su $n - k$ variabili ().*

Per dimostrare il nostro teorema, prendiamo una varietà $V_{n-1}^{(1)}$ composta di V_{n-k} invarianti, tale cioè che per ogni punto di $V_{n-1}^{(1)}$ passi almeno una V_{n-k} invariante contenuta nella $V_{n-1}^{(1)}$ e scegliamo come coordinata $(n - k + 1)^{\text{esima}}$ di un punto A di S_n la distanza geodetica y_{n-k+1} dal punto stesso alla $V_{n-1}^{(1)}$ in discorso. Le $y_{n-k+1} = \text{cost.}$ sono delle varietà V_{n-1} geodeticamente parallele alla $V_{n-1}^{(1)}$ e quindi sono come la $V_{n-1}^{(1)}$ invarianti, ossia composte di varietà minime invarianti. Immaginiamo ora nella $V_{n-1}^{(1)}$ scelta una $V_{n-2}^{(1)}$ composta pure di V_{n-k} invarianti e consideriamo la varietà $V_{n-1}^{(2)}$ generata dalle geodetiche dello spazio ambiente normali a $V_{n-1}^{(1)}$ nei punti di $V_{n-2}^{(1)}$. Le trasformazioni di G_m mutando la $V_{n-1}^{(1)}$ e la $V_{n-2}^{(1)}$ in sè stesse, e le geodetiche normali a $V_{n-1}^{(1)}$ pure

(*) Come seppi, dopo che questo lavoro era già terminato, in una Memoria, che io non conoscevo, del BISCONCINI, inserita nel *Nuovo Cimento* (Aprile 1901): *Su una classificazione dei problemi dinamici*, questo teorema era già stato enunciato: però la dimostrazione del BISCONCINI in realtà vorrebbe invece provare che «ogni gruppo continuo con ρ trasformazioni infinitesime indipendenti si può ridurre a un gruppo su ρ variabili» ed è perciò completamente sbagliata (cfr. LIE; vol. I, § 109), perchè questa proposizione non è vera in generale. Le mie considerazioni rendono rigorosi gli altri bei risultati del BISCONCINI.

in geodetiche normali a $V_{n-1}^{(1)}$, è ben certo che la $V_{n-1}^{(2)}$ è una varietà invariante, ossia che una V_{n-k} invariante che passa per un suo punto giace tutta in essa. La $V_{n-1}^{(1)}$ dovrà quindi tagliare ogni varietà $y_{n-k+1} = \text{cost.}$ pure in varietà invarianti. Posto questo, osserviamo che per determinare la posizione di un punto di S_n , basterà conoscerne la proiezione geodetica $A^{(1)}$ su $V_{n-1}^{(1)}$ e la coordinata y_{n-k+1} .

E noi siamo così ricondotti per determinare un sistema di coordinate in S_n , a cercare un sistema di coordinate per la $V_{n-1}^{(1)}$, la quale varietà è, come lo spazio ambiente, trasformata in sè dal gruppo G_m . E noi perciò opereremo sulla $V_{n-1}^{(1)}$, come abbiamo operato in S_n . Noi determineremo cioè la posizione di un punto $A^{(1)}$ di $V_{n-1}^{(1)}$ nel seguente modo: Prenderemo una varietà $V_{n-2}^{(1)}$, tutta contenuta in $V_{n-1}^{(1)}$ e composta di varietà minime invarianti e individueremo un punto $A^{(1)}$ di $V_{n-1}^{(1)}$ dando la sua distanza geodetica y_{n-k+2} dalla $V_{n-2}^{(1)}$ (cioè la distanza misurata sulla geodetica di $V_{n-1}^{(1)}$ tirata dal punto in discorso normalmente alla $V_{n-2}^{(1)}$) e la posizione della sua proiezione $A^{(2)}$ sulla $V_{n-2}^{(1)}$ stessa. E come coordinata $(n-k+2)^{\text{esima}}$ di un punto qualunque A di S_n prenderemo appunto la y_{n-k+2} testè definita, relativa alla sua proiezione $A^{(1)}$ sulla $V_{n-1}^{(1)}$. Ora, per un ragionamento già usato, è ben chiaro che le $y_{n-k+2} = \text{cost.}$ sono nella $V_{n-1}^{(1)}$ varietà invarianti, perchè geodeticamente parallele alla $V_{n-2}^{(1)}$ entro $V_{n-1}^{(1)}$; e per quanto abbiamo notato saranno pure invarianti quelle varietà di S_n generate dalle geodetiche di S_n normali a $V_{n-1}^{(1)}$ nei punti di una di queste varietà $y_{n-k+2} = \text{cost.}$, ossia anche *in tutto lo spazio ambiente* S_n le $y_{n-k+2} = \text{cost.}$ sono varietà (a $n-1$ dimensioni) invarianti.

Ci siamo dunque ridotti a determinare la posizione di un punto $A^{(2)}$ di $V_{n-2}^{(1)}$. E anche qui, procedendo con lo stesso metodo, prenderemo una $V_{n-3}^{(1)}$, contenuta nella $V_{n-2}^{(1)}$, e invariante; e definiremo la posizione di un punto $A^{(2)}$ di $V_{n-2}^{(1)}$ dandone la distanza geodetica y_{n-k+3} (cioè misurata lungo una geodetica di $V_{n-2}^{(1)}$ normale alla $V_{n-3}^{(1)}$) dalla $V_{n-3}^{(1)}$ stessa e la posizione della sua proiezione $A^{(3)}$ sulla $V_{n-3}^{(1)}$. E definiremo poi come coordinata $(n-k+3)^{\text{esima}}$ di un punto qualunque A di S_n la y_{n-k+3} , testè definita, relativa alla proiezione $A^{(2)}$ su $V_{n-2}^{(1)}$ della proiezione $A^{(1)}$ del punto A sulla $V_{n-1}^{(1)}$. Per una osservazione già usata, le $y_{n-k+3} = \text{cost.}$ (che nella $V_{n-2}^{(1)}$ sono varietà invarianti, perchè geodeticamente parallele alla $V_{n-3}^{(1)}$) sono varietà pure invarianti in $V_{n-1}^{(1)}$ e quindi anche nello spazio ambiente S_n .

Così si prosegue fino ad arrivare a una $V_{n-k+1}^{(1)}$ invariante, in cui la posizione di un suo punto qualunque $A^{(k-1)}$ si definisce dandone la distanza

geodetica y_n da una $V_{n-k}^{(1)}$ invariante della $V_{n-k+1}^{(1)}$ e la posizione della sua proiezione $A^{(k)}$ sulla $V_{n-k}^{(1)}$ stessa. E si definisce come coordinata *n-esima* di un punto A di S_n la y_n , testè definita, relativa a quel punto $A^{(k-1)}$ di $V_{n-k+1}^{(1)}$, a cui si perviene mediante le successive proiezioni considerate. Nella $V_{n-k}^{(1)}$ si assume poi un sistema qualsiasi di coordinate $y_1, y_2, \dots, y_{n-k}$; e per le prime $n-k$ coordinate di un punto A di S_n si scelgono appunto le $y_1 \dots y_{n-k}$ relative al corrispondente punto $A^{(k)}$ di $V_{n-k}^{(1)}$ a cui si arriva mediante successive proiezioni.

Le osservazioni da noi fatte ci dicono senz'altro che le

$$y_{n-k+i} = \text{cost.} \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

sono in S_n varietà invarianti, e che quindi le

$$y_{n-k+1} = \text{cost.}, \dots, y_n = \text{cost.}$$

sono precisamente le varietà minime invarianti.

Quale aspetto assume ora il nostro gruppo con questo sistema di variabili? Intanto, siccome le $y_{n-k+i} = \text{cost.}$ sono, come si disse, varietà invarianti è certo che il nostro gruppo non trasforma le $y_{n-k+1}, y_{n-k+2}, \dots, y_n$ ossia che se le trasformazioni di G_m sono date dalle:

$$y'_t = f_t(y_1 \dots y_{n-k} y_{n-k+1} \dots y_n) \quad (t = 1, 2, \dots, n) \quad (*)$$

(dove le f_t conterranno m parametri arbitrari, sarà certamente:

$$f_{n-k+i} = y_{n-k+i} \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Ma noi diciamo di più che le $f_1 \dots f_{n-k}$ non contengono $y_{n-k+1} \dots y_n$ e dipendono cioè soltanto (oltre che dai parametri del gruppo) dalle variabili $y_1 \dots y_{n-k}$.

In altre parole: noi dimostreremo che le prime « $n-k$ » coordinate $y'_1 \dots y'_{n-k}$ di quel punto A_0 , dove un punto A di coordinate $y_1 \dots y_{n-k} y_{n-k+1} \dots y_n$ è condotto da una trasformazione Γ qualsiasi di G_m non dipendono dai valori di $y_{n-k+1} \dots y_n$, ossia che Γ conduce il punto che ha per prime coordinate proprio $y_1 \dots y_{n-k}$, e che ha tutte le altre coordinate uguali a zero, nel punto, le cui prime coordinate sono $y'_1 \dots y'_{n-k}$ e di cui tutte le altre coordinate sono nulle.

O in altre parole io dimostrerò che se $A^{(1)}$ è la proiezione di un punto A di S_n sulla $V_{n-1}^{(1)}$, $A^{(2)}$ la proiezione di $A^{(1)}$ sulla $V_{n-2}^{(1)}$, $\dots$, $A^{(k)}$ quella di

(*) Dove indichiamo con y'_t i valori trasformati delle y_t .

$A^{(k-1)}$ sulla $V_{n-k}^{(1)}$, e se una trasformazione Γ di G_m conduce i punti A ed $A^{(k)}$ rispettivamente in B e in B' , il punto B' coincide con quel punto $B^{(k)}$ di $V_{n-k}^{(1)}$ che si dedurrebbe da B con le accennate successive proiezioni. E infatti, essendo $V_{n-1}^{(1)}$ invariante, la geodetica per A normale a $V_{n-1}^{(1)}$ sarà portata nella geodetica per B normale a $V_{n-1}^{(1)}$ e quindi anche $A^{(1)}$ sarà portato nella proiezione $B^{(1)}$ di B su $V_{n-1}^{(1)}$; così $A^{(2)}$ sarà portato nella proiezione $B^{(2)}$ di $B^{(1)}$ su $V_{n-2}^{(1)}$ ecc.; e così continuando arriveremo alla dimostrazione dell'asserto, cioè che Γ conduce $A^{(k)}$ in $B^{(k)}$ e che quindi i punti B' , $B^{(k)}$ coincidono.

§ 2. Posto questo, noi ora procederemo a dare alcune proprietà di un gruppo, che sono condizioni necessarie e sufficienti, affinchè esso si possa considerare come un gruppo di movimenti. E cominceremo anzitutto dalla considerazione dei gruppi a trasformazioni infinitesime linearmente indipendenti; e rammenteremo che il Prof. BIANCHI dimostrò (e più sotto io ne darò una dimostrazione intuitiva, che ne spiega l'intima ragione di essere) che ogni gruppo G_n transitivo su n variabili è ammesso da qualche spazio a n dimensioni; noi dimostreremo anzi che ciò è vero per qualsiasi gruppo a n variabili con trasformazioni infinitesime linearmente indipendenti. Noi per ora, a proposito di questi gruppi, non possiamo che dare il teorema seguente:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo G_m a trasformazioni infinitesime linearmente indipendenti su $n + m$ variabili si possa considerare come gruppo di movimenti di uno spazio ad $n + m$ dimensioni è che il gruppo sia simile a un gruppo semplicemente transitivo su m lettere; ciò che si può anche esprimere dicendo che G_m deve essere un sottogruppo di un gruppo semplicemente transitivo con $n + m$ lettere ed $n + m$ parametri ().*

La condizione è evidentemente necessaria; infatti il gruppo G_m ha come varietà minime invarianti delle V_m : e, se S_{n+m} è uno spazio che ammette G_m , si vede tosto prendendo in esso quel sistema di coordinate, che fu definito al paragrafo precedente che il gruppo G_m sarà trasformato in un gruppo simile che opera transitivamente su m lettere. Che questa condizione sia anche sufficiente, si dimostra facilmente così: Se G_m è simile a un gruppo che opera transitivamente su m variabili $y_1, y_2, \dots, y_m$, si introducano come coordinate appunto le $y_1, y_2, \dots, y_m$ insieme ad altre n funzioni qualsiasi delle coordinate iniziali $y_{m+1}, \dots, y_{m+n}$ tali che $y_1, \dots, y_m, y_{m+1}, \dots, y_{m+n}$ siano indipendenti tra

(*) Ricordiamo però *esplicitamente* (a scanso di ogni equivoco) che, come faremo vedere più tardi, queste condizioni sono sempre soddisfatte da un tale gruppo.

loro. Le trasformazioni infinitesime di G_m insieme alle trasformazioni $\frac{\partial}{\partial y_{m+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_{m+n}}$ genereranno un gruppo Γ_{m+n} , semplicemente transitivo, e di cui G_m è un sottogruppo. Per il citato teorema del prof. BIANCHI Γ_{m+n} è ammesso da qualche S_{m+n} , che ammetterà perciò anche G_m .

Nella seconda parte di questa dimostrazione abbiamo visto incidentalmente che se un G_m è simile a un gruppo transitivo su m lettere, esso è anche sottogruppo di un Γ_{m+n} transitivo in S_{m+n} . Viceversa se G_m è sottogruppo di un Γ_{m+n} transitivo in S_{m+n} , esso sarà certo un gruppo di movimento di ciascuno degli spazii, che ammettono Γ_{m+n} e quindi, per quanto abbiamo dimostrato, sarà simile a un gruppo semplicemente transitivo su m lettere.

Noi più tardi dimostreremo che ogni gruppo a trasformazioni infinitesime linearmente indipendenti può essere considerato come gruppo di movimenti: il presente teorema ci darà perciò alcune interessanti proprietà generali di gruppi siffatti; ciò che permette di agevolarne di molto la ricerca.

§ 3. Abbiamo così studiato i gruppi a trasformazioni infinitesime linearmente indipendenti, che possono essere considerati (tutti) come gruppi di movimenti e abbiamo visto che in fin dei conti essi si riducono tutti ai gruppi transitivi, in cui il numero dei parametri eguaglia quello delle variabili. Ora ci proporremo la questione di riconoscere quando un gruppo a trasformazioni infinitesime linearmente dipendenti può essere considerato come gruppo di movimenti. Noi ora daremo una prima risoluzione di questo problema, avvertendo però che noi vi ritorneremo più oltre, con altri metodi, e ottenendo una risoluzione più elegante ed intuitiva.

Anzitutto osserveremo che per il teorema fondamentale del § 1, se il nostro gruppo è un gruppo G_{n+m} a « $n + m$ » parametri con sole n trasformazioni infinitesime linearmente indipendenti, esso (avendo delle V_n per varietà minime invarianti) sarà certo simile a un gruppo transitivo su n variabili, e si potrà considerare come gruppo di movimenti di una varietà ad n dimensioni. Noi supporremo senz'altro che il gruppo sia già stato ridotto sotto questa forma, che diremo forma *normale* del gruppo, con un opportuno cangiamento di variabili. Siano dunque

$$X_t = \sum_{r=1}^n \xi_r^{(t)}(x_1 \dots x_n) \frac{\partial}{\partial x_r} \quad (t = 1, 2, \dots, n + m)$$

le trasformazioni infinitesime del nostro gruppo G_{n+m} e sia

$$ds^2 = \sum_{i,k}^n a_{ik} dx_i dx_k$$

l'elemento lineare di uno spazio S_n che ammetta G_{n+m} . Le formule di KILLING danno che

$$\sum_r \xi_r^{(l)} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r} + \sum_r \left(a_{ir} \frac{\partial \xi_r^{(l)}}{\partial x_k} + a_{kr} \frac{\partial \xi_r^{(l)}}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (l, r = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

E noi le scriveremo, ponendo

$$a_{ik}^{(l)} = \sum_r \left(a_{ir} \frac{\partial \xi_r^{(l)}}{\partial x_k} + a_{kr} \frac{\partial \xi_r^{(l)}}{\partial x_i} \right)$$

sotto la forma

$$\sum_r \xi_r^{(l)} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r} + a_{ik}^{(l)} = 0, \quad \text{ossia} \quad X_l(a_{ik}) + a_{ik}^{(l)} = 0. \quad (1)$$

Il prof. BIANCHI osservò che in virtù delle (1)' si ha che

$$X_l[X_t(a_{ik}) + a_{ik}^{(t)}] - X_t[X_l(a_{ik}) + a_{ik}^{(l)}] \quad (l, t = 1, 2, \dots, n+m) \quad (2)$$

è identicamente nullo: ciò che del resto è intuitivo perchè se un S_n ammette due trasformazioni infinitesime X_l, X_t esso deve ammettere anche la (X_l, X_t) . Per ipotesi m delle trasformazioni infinitesime del gruppo sono combinazione lineare delle altre n , le quali sono poi linearmente indipendenti. Noi ammetteremo che queste ultime sieno le $X_1, X_2, \dots, X_n$ e porremo, indicando con $\varphi_l^{(t)}$ delle funzioni di $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$X_{n+t} = \sum_{l=1}^n \varphi_l^{(t)} X_l \quad (t = 1, 2, \dots, m).$$

E il sistema delle equazioni di KILLING sarà da noi scritto nella forma:

$$X_l(a_{ik}) + a_{ik}^{(l)} = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

$$X_{n+t}(a_{ik}) - \sum_{l=1}^n \varphi_l^{(t)} X_l(a_{ik}) + a_{ik}^{(n+t)} - \sum_{l=1}^n \varphi_l^{(t)} a_{ik}^{(l)} = 0 \quad (t = 1, 2, \dots, m). \quad (4)$$

Ciò è chiaramente lecito perchè se alla (4) aggiungiamo

$$\sum_{l=1}^n \varphi_l^{(t)} [X_l(a_{ik}) + a_{ik}^{(l)}]$$

somma evidentemente nulla in causa delle (3), otteniamo appunto l'equazione di KILLING relativa a X_{n+t} ed a a_{ik} , come è scritta nella (1)'. E ora poichè è identicamente

$$X_{n+t}(a_{ik}) - \sum_{l=1}^n \varphi_l^{(t)} X_l(a_{ik}) = 0$$

le (4) diventano

$$a_{ik}^{(n+t)} - \sum_{l=1}^n \varphi_l^{(t)} a_{ik}^{(l)} = 0 \quad (4)'$$

ossia

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{r=1}^n a_{ir} \left[\sum_l \frac{\partial (\varphi_l^{(t)} \xi_r^{(l)})}{\partial x_k} - \sum_l \varphi_l^{(t)} \frac{\partial \xi_r^{(l)}}{\partial x_k} \right] + \\ & + \sum_{r=1}^n a_{kr} \left[\sum_l \frac{\partial (\varphi_l^{(t)} \xi_r^{(l)})}{\partial x_i} - \sum_l \varphi_l^{(t)} \frac{\partial \xi_r^{(l)}}{\partial x_i} \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)''$$

ossia

$$\sum_{r=1}^n \left(a_{ir} \xi_r^{(l)} \frac{\partial \varphi_l^{(t)}}{\partial x_k} + a_{kr} \xi_r^{(l)} \frac{\partial \varphi_l^{(t)}}{\partial x_i} \right) = 0 \quad \begin{matrix} (l, i, k, r = 1, 2, \dots, n) \\ (t = 1, 2, \dots, m). \end{matrix} \quad (4)'''$$

Il nostro sistema di equazioni resta così mutato nel sistema di equazioni formato dalle (3) e dalle (4)'''. Ora dalle (3), essendo il determinante delle $\xi_r^{(l)}$ ($r, l = 1, 2, \dots, n$) differente da zero si possono trarre le derivate delle a_{ik} in funzione delle a_{ik} stesse; e, per l'osservazione testè citata del professore BIANCHI si vede che affinchè il sistema delle (3), (4)''' sia integrabile basta che

1.° Le (4)''' considerate come equazioni lineari algebriche per le a_{ik} ammettono in un punto almeno una soluzione (che ci darà i valori iniziali delle a_{ik}). Si dovrà poi solo esaminare (volendoci restringere a spazii reali) se le solite disuguaglianze sono soddisfatte.

2.° I primi membri delle (4)''' derivate rispetto a $x_1, x_2, \dots, x_n$ successivamente diano per le (3) e le (4)''' stesse risultati identicamente nulli. Questa seconda condizione equivale anche (essendo il determinante delle $\xi_r^{(l)}$ diverso da zero) all'altra condizione che applicando ai primi membri delle (4)''' le $X_1 \dots X_n$ si ottenga in virtù delle (3) e delle (4)''' stesse un risultato identicamente nullo.

Noi ora vogliamo far vedere che questa seconda condizione è sempre soddisfatta.

Infatti per l'osservazione del prof. BIANCHI è sempre per le (3) e le (4)''' identicamente :

$$\begin{aligned} X_l [X_{n+t} (a_{ik}) + a_{ik}^{(n+t)}] - X_{n+t} [X_l (a_{ik}) + a_{ik}^{(l)}] &= 0 \\ [t = 1, 2, \dots, m] \quad [i, k, l = 1, 2, \dots, n] \end{aligned}$$

ossia

$$X_l [X_{n+t} (a_{ik})] - X_{n+t} [X_l (a_{ik})] + X_l (a_{ik}^{(n+t)}) - X_{n+t} (a_{ik}^{(l)}) = 0. \quad (5)$$

Si ha pure identicamente :

$$X_l [X_r (a_{ik})] - X_r [X_l (a_{ik})] + X_l [a_{ik}^{(r)}] - X_r [a_{ik}^{(l)}] = 0$$

$$(l, r, i, k = 1, 2, \dots, n)$$

ossia

$$\varphi_r^{(l)} X_l [X_r (a_{ik})] - \varphi_r^{(l)} X_r [X_l (a_{ik})] + \varphi_r^{(l)} X_l (a_{ik}^{(r)}) - \varphi_r^{(l)} X_r (a_{ik}^{(l)}) = 0$$

ossia :

$$X_l [\varphi_r^{(l)} X_r (a_{ik})] - X_l (\varphi_r^{(l)} X_r (a_{ik})) - \varphi_r^{(l)} X_r [X_l (a_{ik})] +$$

$$+ X_l [\varphi_r^{(l)} a_{ik}^{(r)}] - X_l [\varphi_r^{(l)} a_{ik}^{(r)}] - \varphi_r^{(l)} X_r (a_{ik}^{(l)}) = 0.$$

E, poichè per le (3)

$$X_r (a_{ik}) + a_{ik}^{(r)} = 0$$

sarà pure identicamente (in virtù delle (3) e delle (4)''')

$$X_l [\varphi_r^{(l)} X_r (a_{ik})] - \varphi_r^{(l)} X_r [X_l (a_{ik})] + X_l [\varphi_r^{(l)} a_{ik}^{(r)}] - \varphi_r^{(l)} X_r (a_{ik}^{(l)}) = 0$$

e quindi anche identicamente :

$$\sum_{r=1}^n \left\{ X_l [\varphi_r^{(l)} X_r (a_{ik})] - \varphi_r^{(l)} X_r [X_l (a_{ik})] + X_l [\varphi_r^{(l)} a_{ik}^{(r)}] - \varphi_r^{(l)} X_r (a_{ik}^{(l)}) \right\} = 0 \dots \quad (6)$$

Sottraendo dalla (5) la (6) troviamo l'identità :

$$X_l \left[X_{n+t} (a_{ik}) - \sum_{r=1}^n \varphi_r^{(l)} X_r (a_{ik}) \right] - \left[X_{n+t} - \sum_{r=1}^n \varphi_r^{(l)} X_r \right] (X_l (a_{ik})) +$$

$$+ X_l \left[a_{ik}^{(n+t)} - \sum_{r=1}^n \varphi_r^{(l)} a_{ik}^{(r)} \right] - \left[X_{n+t} - \sum_{r=1}^n \varphi_r^{(l)} X_r \right] (a_{ik}^{(l)}) = 0.$$

E poichè è identicamente :

$$X_{n+t} - \sum_{r=1}^n \varphi_r^{(l)} X_r = 0$$

troveremo senz'altro identicamente :

$$X_l \left(a_{ik}^{(n+t)} - \sum_{r=1}^n \varphi_r^{(l)} a_{ik}^{(r)} \right) = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, n)$$

che è appunto quanto si voleva dimostrare. (Si ricordi che i primi membri delle (4)' e delle (4)''' sono identici.)

Prima ora di venire a parlare della 1.^a condizione vogliamo fare un'osservazione generale.

Se un gruppo Γ qualsiasi si può considerare come gruppo di movimenti di uno spazio a n dimensioni, esso può essere anche considerato come gruppo di movimenti di uno qualche spazio a un numero $n+t$ di dimensioni (t intero qualsiasi).

Supposto infatti il gruppo ridotto a forma normale in n o meno variabili, e se

$$ds^2 = \sum_{i,k} a_{ik} dx_i dx_k \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

è l'elemento di uno spazio a n dimensioni che ammette il nostro gruppo, allora, come tosto si verifica

$$ds^2 = \sum_{i,k} a_{ik} dx_i dx_k + \sum_{lm} a_{lm} dx_l dx_m \\ (i, k = 1, 2, \dots, n) \quad (l, m = n+1, \dots, n+t)$$

dove le a_{lm} non dipendono dalle $x_1, x_2, \dots, x_n$ è l'elemento lineare di uno spazio a $n+t$ dimensioni che ammette il nostro gruppo.

Dunque:

Affinchè un dato gruppo, già ridotto a forma normale in n variabili, possa essere ammesso come gruppo di movimenti da uno spazio (che naturalmente non potrà avere meno di n dimensioni) è condizione necessaria e sufficiente che le (4)''' considerate come equazioni lineari algebriche nelle a_{ik} sieno in un punto risolubili rispetto alle a_{ik} . Dunque questa condizione si esprime semplicemente con l'annullarsi di una matrice.

Ora osserviamo il primo membro delle (4)''' e vediamo tosto che il termine $\sum_{i,r} a_{ir} \xi_r^{(t)} \frac{\partial \varphi_i^{(t)}}{\partial x_k}$ è un termine del determinante che si ottiene moltiplicando con le note regole, in modo opportuno il determinante delle a_{ik} per il determinante delle $\xi_r^{(t)}$ e per l'Iacobiano delle $\varphi_i^{(t)}$. Quindi abbiamo:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il nostro gruppo già ridotto a forma normale possa essere considerato come gruppo di movimenti è che si possa trovare un determinante non nullo simmetrico $|a_{ik}|$, il prodotto del quale per il determinante $|\xi_r^{(t)}|$ ($r, l = 1, 2, \dots, n$) e per l'Iacobiano delle $\varphi_i^{(t)}$ ($r = 1, 2, \dots, n$) ottenuto in modo opportuno con le note regole sia, almeno in un punto, semisimmetrico. E ciò per ciascun valore particolare di t .

Se ora n è dispari, il determinante semisimmetrico così ottenuto è nullo; e poichè $|a_{ik}| \neq 0$ $|\xi_r^{(t)}| \neq 0$, sarà $\frac{\partial (\varphi_1^{(t)} \varphi_2^{(t)} \dots \varphi_n^{(t)})}{\partial (x_1 x_2 \dots x_n)} = 0$ ossia le $\varphi_1^{(t)} \dots \varphi_n^{(t)}$ non sono funzioni indipendenti.

Quindi in particolare:

Se un S_n ammette un G_{n+1} transitivo, esiste certamente nel caso che n sia dispari, qualche trasformazione infinitesima permutabile con G_{n+1} .

§ 4. Sia ora dato un gruppo, già ridotto sotto forma normale, cioè con tante trasformazioni infinitesime linearmente indipendenti quante sono le variabili su cui opera il gruppo. Noi vogliamo esaminare come si semplificano in questo caso le equazioni di KILLING. Siano

$$X_l = \sum_{r=1}^n \xi_r^{(l)} (x_1 x_2 \dots x_n) \frac{\partial}{\partial x_r} \quad (l = 1, 2, \dots, n + m)$$

le trasformazioni infinitesime del gruppo e sia

$$ds^2 = \sum_{i,k} a_{ik} dx_i dx_k \quad (i, k = 1, 2, \dots, n + t)$$

l'elemento lineare di uno spazio a « $n + t$ » dimensioni che ammetta il nostro gruppo.

Se noi scriviamo le equazioni di KILLING noi riconosciamo facilmente:

1.° Per le a_{ik} ($i, k = 1, 2, \dots, n$) queste equazioni assumono proprio la stessa forma, come se noi volessimo cercare gli spazii ad n dimensioni ammessi dal gruppo.

2.° Per le a_{ik} ($i, k = n + 1, n + 2, \dots, n + t$) le equazioni di KILLING diventano semplicemente:

$$\sum_{r=1}^n \xi_r^{(l)} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r} = 0.$$

E poichè delle X_l proprio n sono linearmente indipendenti, si ha semplicemente:

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

e le equazioni di KILLING dicono soltanto che le a_{ik} in discorso sono funzioni soltanto di $x_{n+1}, \dots, x_{n+t}$.

3.° Per le a_{ik} ($i \leq n, k > n$) le equazioni di KILLING diventano:

$$\sum_r \xi_r^{(l)} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r} + \sum_r a_{kr} \frac{\partial \xi_r^{(l)}}{\partial x_i} = 0$$

che è un sistema di equazioni che non contiene nessuna a_{ik} del primo o del secondo tipo. Anzi questo sistema di equazioni si scinde per ciascun valore di k in t sistemi di equazioni distinti, l'uno relativo alle $a_{i,n+1}$, il secondo alle $a_{i,n+2}$, ecc. ($i = 1, 2, \dots, n$).

Le equazioni relative alle a_{ik} ($i, k \leq n$) si semplificano, ossia si possono ridurre a un numero minore di incognite mediante le equazioni lineari (4)''', mentre nello stesso tempo per ciascuna delle a_{ik} da determinarsi si ottengono soltanto n equazioni. Queste osservazioni riescono utili specialmente per il calcolo effettivo degli elementi lineari da determinarsi.

§ 5. Ora noi vogliamo dimostrare, servendoci dei risultati finora ottenuti, il seguente teorema fondamentale:

Con la sola risoluzione di equazioni algebriche si possono determinare tutti i gruppi, che si possono considerare come gruppi di movimenti, trovando le loro trasformazioni infinitesime; con sole quadrature si possono determinare le trasformazioni finite di tali gruppi, e gli elementi lineari degli spazii loro corrispondenti.

La dimostrazione di questo teorema è semplicissima: basta a tale scopo la semplice osservazione che ogni gruppo continuo, che si possa considerare come gruppo di movimenti, si può, con un cangiamento di variabili ridurre sotto forma normale, cioè si può far sì che possieda tante trasformazioni infinitesime linearmente indipendenti quante sono le variabili su cui opera effettivamente: in altre parole si può ridurre a essere transitivo sulle variabili che esso effettivamente trasforma. Ora noi sappiamo che con la risoluzione di sole equazioni algebriche si possono trovare tutte le possibili composizioni realmente distinte dei gruppi a un numero qualsiasi di parametri. Di più (LIE, Kap. 27, 29) con la sola risoluzione di equazioni algebriche si possono trovare tutti i gruppi continui transitivi, appena se ne conosca la composizione, e non si considerino distinti due gruppi simili. È così dimostrata senz'altro la prima parte del nostro teorema. Esaminando la forma delle trasformazioni infinitesime dei nostri gruppi si potrebbe dimostrare anche la terza parte del nostro teorema; ma il procedimento più breve a tale scopo è il seguente: Si ricordi anzitutto che con sole quadrature si possono trovare le equazioni finite del nostro gruppo, perchè il gruppo è transitivo (LIE, l. c.), ciò che intanto dimostra la seconda parte del nostro teorema. Allora distinguiamo due casi: secondoche le dimensioni dello spazio da determinarsi sono in numero uguale o maggiore del numero delle variabili, su cui il nostro gruppo, che col procedimento precedente è stato evidentemente ottenuto sotto forma normale, opera effettivamente. Cominciamo a trattare il primo caso: sia cioè uguale il numero n delle dimensioni dello spazio da determinarsi e delle variabili su cui opera (transitivamente) il gruppo. Sia A un punto generico dello spazio e siano $a_{ik}^{(0)}$ valori qualsiasi che soddisfano alle equa-

zioni lineari (4)''' (supposte naturalmente risolubili) (dove alle x_i si sostituiscono le coordinate $(x_i^{(0)})$ del punto A) e, se vogliamo restringerci a spazi reali, anche alle solite disuguaglianze, se questo è possibile. Sia ora B un punto qualunque dello spazio, in cui si vogliono trovare i valori delle a_{ik} . Siccome il gruppo opera transitivamente nello spazio ambiente esiste almeno una trasformazione T del gruppo che trasporta il punto B nel punto A ; essa porterà anche un intorno qualunque di B in un intorno di A ; di più essa si potrà ottenere con la sola risoluzione di equazioni finite. Sieno $x_i^{(1)}$ le coordinate di B , e siano $a_{ik}^{(1)}$ i valori finora incogniti delle a_{ik} nel punto B . La T , stabilendo una corrispondenza biunivoca tra gli intorni di B o di A , stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i punti $x_i^{(1)} + dx_i^{(1)}$ e i punti $x_i^{(0)} + dx_i^{(0)}$, corrispondenza determinabile con differenziazioni; le $dx_i^{(0)}$ vengono date come espressioni lineari omogenee nelle $dx_i^{(1)}$, a coefficienti costanti. Sostituiamo nella $a_{ik}^{(0)} dx_i^{(0)} dx_k^{(0)}$ alle $dx_i^{(0)}$ i loro valori così determinati, otterremo una forma quadratica nelle $dx_i^{(1)}$, che deve essere identica con $\sum a_{ik}^{(1)} dx_i^{(1)} dx_k^{(1)}$; esprimendo questa identità, si hanno senz'altro i valori delle $a_{ik}^{(1)}$ nel punto qualunque $x_i^{(1)}$ dello spazio ambiente, espressi in funzione delle costanti iniziali $a_{ik}^{(0)}$.

Passiamo ora al caso che il numero $n + m$ delle dimensioni dello spazio sia maggiore del numero n delle variabili $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, su cui opera effettivamente il gruppo, cosicchè nello spazio in discorso il gruppo non opera più transitivamente. E sia

$$ds^2 = \sum_{i,k} a_{ik} dx_i dx_k \quad (i, k = 1, 2, \dots, n + m)$$

l'elemento lineare dello spazio. Per le a_{ik} ($i, k = n + 1, \dots, n + m$) nulla vi sarebbe da dire, poichè noi sappiamo già che esse sono funzioni (del resto arbitrarie) delle $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ (§ 4). In ogni modo si osservi che affinchè il nostro spazio ammetta effettivamente il gruppo in discorso, è condizione necessaria e sufficiente che una trasformazione T del gruppo che porta un punto $B \equiv x_i^{(1)}$ di una varietà V_n invariante in un altro punto $A \equiv x_i^{(0)}$ della stessa V_n e quindi stabilisce anche una corrispondenza biunivoca tra gli intorni dei due punti, porti anche la forma

$$\sum_{i,k} a_{ik} (x_i^{(1)}) dx_i^{(1)} dx_k^{(1)}$$

nella forma

$$\sum_{i,k} a_{ik} (x_i^{(0)}) dx_i^{(0)} dx_k^{(0)}.$$

Allora prendiamo una varietà qualsiasi V_m a m dimensioni che abbia uno e un sol punto comune con ciascuna delle varietà V_n minime invarianti e fissiamo in ciascun punto della V_m dei valori arbitrarii per le a_{ik} ancora da determinarsi, purchè naturalmente essi soddisfino alle solite equazioni lineari: ciò che corrisponde all'introduzione di funzioni arbitrarie. Per poi determinare i valori $a_{ik}^{(1)}$ delle a_{ik} in un altro punto B qualsiasi di S_{n+m} basta trovare quel punto A , in cui la varietà invariante V_n passante per B incontra la V_m , e in cui le a_{ik} ricevono dei valori noti $a_{ik}^{(0)}$ e applicare quindi ai punti A, B il precedente procedimento. Il nostro teorema è così dimostrato in generale.

Naturalmente non con ogni speciale scelta delle funzioni e costanti arbitrarie su descritte si otterrà un tipo di spazio realmente distinto: anzi per le considerazioni generali del § 1, noi possiamo supporre, senza diminuire la generalità

$$\begin{array}{ll}
 a_{n+1,k} = 0 & (k = 1, 2, \dots, n, n+2, \dots, n+m) \\
 & a_{n+1,n+1} = 1 \\
 (a_{n+2,k} = 0)_{x_{n+1}=0} & (k = n+2) \\
 & (a_{n+2,n+2})_{x_{n+1}=0} = 1 \\
 (a_{n+3,k} = 0)_{x_{n+1}=x_{n+2}=0} & (k = n+3) \\
 & (a_{n+3,n+3})_{x_{n+1}=x_{n+2}=0} = 1, \text{ ecc.}
 \end{array}$$

dove le uguaglianze scritte in basso fuori delle parentesi indicano su quali varietà si possono supporre senz'altro verificate le equazioni stesse.

§ 6. Ora noi ci vogliamo chiedere qual'è il significato delle relazioni lineari (4)''', a cui i valori iniziali delle a_{ik} devono sempre soddisfare. A questa domanda risponde subito la seguente considerazione. Se noi ci riferiamo p. es. al primo dei casi testè trattati e ricordiamo il metodo di cui noi ci siamo serviti, notiamo tosto che per trovare i valori delle a_{ik} in un punto B in funzione dei valori delle a_{ik} in un punto A , ci siamo serviti di una trasformazione T che conducesse il punto B nel punto A . Ora nel caso di trasformazioni infinitesime linearmente dipendenti osserviamo che i punti A, B non individuano la trasformazione T , ma che anzi di tali trasformazioni ve ne sarà, in generale più di una: chè se S è la trasformazione più generale che lascia fisso A , tutte le trasformazioni TS (o ST a seconda della notazione che si usa) conducono il punto B nel punto A . E poichè le (4)''' ci danno le uniche condizioni a cui devono soddisfare i valori iniziali delle a_{ik} , è ben chiaro che il loro significato è questo, che cioè, qual-

siasi trasformazione TS venga usata, i valori delle a_{ik} nel punto B siano sempre quelli che si otterrebbero considerando la T . In altre parole esse significano, che ogni trasformazione S del gruppo che lascia fisso il punto A deve trasformare in sè la forma $\Sigma a_{ik}^{(0)} dx_i^{(0)} dx_k^{(0)}$. Del resto risulta senz'altro chiaro dal procedimento usato testè che se questa condizione è soddisfatta, allora i valori che si ottengono in un punto B sono perfettamente determinati, e il gruppo è ammesso da uno spazio, il cui elemento lineare ha dei coefficienti, che nel punto A assumono il valore $a_{ik}^{(0)}$. Possiamo dunque esprimere sotto forma più elegante e concisa le condizioni necessarie e sufficienti affinchè un gruppo possa essere considerato come gruppo di movimenti.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo G ridotto o no sotto forma normale si possa considerare come gruppo di movimenti è che quel suo sottogruppo Γ che lascia fisso un punto A determinato, in cui il gruppo sia regolare, sia tale che esista almeno un sistema di quadriche omotetiche in guisa che un punto infinitamente vicino ad A non esca mai per le trasformazioni di Γ da quella di queste quadriche, che passa per esso, o, in altre parole Γ trasformi in sè ciascuna quadrica di un sistema di quadriche omotetiche infinitamente vicine ad A ().*

Se il gruppo è transitivo basterà chiaramente che questo avvenga in un solo punto (perchè allora avviene in tutti); se è intransitivo ciò dovrà accadere in un punto di ciascuna varietà minima invariante. Questa distinzione è evidentemente superflua, se il gruppo è già ridotto a forma normale.

Se queste condizioni sono soddisfatte, esiste infatti una forma $\Sigma a_{ik}^{(0)} dx_i^{(0)} dx_k^{(0)}$, che Γ trasforma in sè.

Osservazione 1.^a *Se uno di questi cosiffatti sistemi di quadriche è formato di ellissoidi, lo spazio corrispondente si può supporre reale.*

Osservazione 2.^a *Le condizioni analitiche, che traducono queste condizioni geometriche sono date dall'annullarsi di quella matrice, che esprime essere le (4)''' compatibili.*

§ 7. È ben evidente ora che i gruppi G_n transitivi su n variabili possono essere considerati come gruppi di movimenti (teorema del prof. BIANCHI) perchè in tal caso il sottogruppo Γ si riduce all'identità; o in altre parole, è compiutamente determinata la trasformazione che porta un punto B in un punto A ; e quindi, dati arbitrariamente i valori delle a_{ik} in A riescono senz'altro, coi nostri metodi, determinati i valori delle a_{ik} nel punto B . Quest'osservazione rende evidente *a priori* il bel teorema del prof. BIANCHI.

(*) Si noti che così immaginiamo il gruppo operante in uno spazio euclideo.

Ma questa stessa osservazione si può senz'altro applicare a ogni gruppo con trasformazioni infinitesime linearmente indipendenti e ne traggiamo il teorema :

Ogni gruppo a trasformazioni infinitesime linearmente indipendenti si può considerare come gruppo di movimenti.

Confrontando questo risultato, che è immediato corollario del precedente teorema generale, con quello del § 2 otteniamo il seguente teorema :

Ogni gruppo G_n generato da n trasformazioni linearmente indipendenti su un numero qualsiasi $n + m$ di variabili è simile a un gruppo G'_n semplicemente transitivo in uno spazio ad n dimensioni, e, ciò ch'è lo stesso, si può pensare sottogruppo di un gruppo transitivo su $n + m + k$ lettere e con $n + m + k$ parametri (dove k è un intero qualsiasi nullo o positivo).

Nei precedenti paragrafi noi abbiamo risoluto due questioni: la prima, di riconoscere se un gruppo continuo si può considerare come gruppo di movimenti, la seconda di indicare un mezzo, col quale si possa determinare con sole quadrature, differenziazioni e risoluzione di equazioni finite tutti questi gruppi, e gli spazii che loro corrispondono.

§ 8. Noi aggiungeremo ora una facile osservazione, che ci condurrà a un notevole risultato :

Nessun gruppo, che si possa considerare come gruppo di movimenti, è più di una volta transitivo.

Infatti se G è un tale gruppo ed S lo spazio corrispondente, due punti di S hanno almeno un invariante: la loro distanza geodetica.

Per la stessa ragione :

Se un gruppo G , si può considerare come gruppo di movimenti, quel suo sottogruppo che lascia fisso un punto generico è certo intransitivo.

Ne deduciamo :

Nessun spazio S_n a un numero $n > 2$ di dimensioni può ammettere un gruppo reale a $\frac{n^2 + n - 2}{2}$ parametri nè come gruppo di movimenti, nè come sottogruppo del gruppo totale di movimenti.

Questo teorema per $n = 3$ fu dimostrato dal prof. BIANCHI; noi lo ammetteremo vero per $n = m - 1$ lo dimostreremo per $n = m$. Sia, se è possibile, S_m uno spazio che ammetta un $G_{\frac{m^2 + m - 2}{2}}$ di movimenti. Questo gruppo è certamente transitivo, perchè se non lo fosse, esso sarebbe per il teorema del § 1 simile a un gruppo di movimenti di uno spazio a meno di m di-

mensioni: ciò che è assurdo, perchè $\frac{m^2 + m - 2}{2} > \frac{m(m-1)}{2}$. Quindi quel suo sottogruppo che lascia fisso un punto generico è proprio un gruppo a

$$\frac{m^2 + m - 2}{2} - m$$

parametri, cioè è proprio un $G_{\frac{(m-1)^2 + (m-1) - 2}{2}}$. Questo gruppo per l'osservazione precedente è intransitivo in G_m e per il teorema del § 1 è simile a un gruppo di movimenti di uno spazio a « $m-1$ » dimensioni. Ciò che è pure assurdo, perchè noi abbiamo supposto dimostrato il nostro teorema per $n = m-1$.

La nostra asserzione resta così dimostrata in generale. Così pure si dimostra: *Se un S_n ammette un $G_{\frac{n^2+n-2}{2}}$ (certo immaginario se $n > 2$), esso è a curvatura costante, ossia ammette anche un $G_{\frac{n^2+n}{2}}$.* Anche questo teorema

si dimostra col metodo di induzione completa. Ecco p. es. come si dimostra per un S_4 . Quel sottogruppo G_5 di G_9 che lascia fisso un punto generico di S_4 sarà intransitivo e avrà delle V_3 per varietà minime invarianti, p. es. le $x_4 = \text{cost.}$, geodeticamente parallele. Esso si potrà immaginare operante (transitivamente) sulle x_1, x_2, x_3 (§ 1). Questo G_5 può chiaramente portare ogni segmento T di una di queste varietà in ogni altro segmento della varietà stessa uguale a T . Quindi dovendo esso ricondurre tutto lo S_4 in sè senza mutare le distanze, a due segmenti uguali di una delle $x_4 = \text{cost.}$ corrispondono (per mezzo delle geodetiche normali alle $x_4 = \text{cost.}$) due segmenti tra di loro uguali su ogni $x_4 = \text{cost.}$ Ma una $x_4 = \text{cost.}$ ammettendo un G_5 , ammetterà un G_6 . Quel gruppo G'_6 che opera sulle x_1, x_2, x_3 come questo G_6 e lascia invariato x_4 trasformerà dunque in sè ogni $x_4 = \text{cost.}$, senza mutar l'elemento lineare e perciò sarà un gruppo di movimenti dello S_4 , che quindi ammetterà un G_{10} .

§ 9. Ritorniamo ora alle condizioni necessarie e sufficienti date al § 6 affinchè un dato gruppo continuo si possa considerare come un gruppo di movimenti. Queste condizioni si possono anche enunciare così: *Quel sottogruppo che lascia fisso un punto A deve essere un sottogruppo di uno spazio a curvatura costante, quando lo si pensi operante sulle rette uscenti da A , considerate come elementi, o, in altre parole, deve lasciare fisso un cono quadratico col vertice in A ; di più egli deve lasciare invariate le quadriche in-*

finitamente vicine ad A aventi questo cono per cono assintotico. La prima parte di queste condizioni non sarebbe evidentemente sufficiente, perchè p. es. anche il G_7 delle similitudini dello spazio euclideo soddisfa ad esse. Esistono dunque altri gruppi che soddisfano soltanto a quella prima condizione e che non sono altro che i gruppi di trasformazioni conformi. Osserverò che la condizione affinchè una trasformazione infinitesima generi un gruppo di trasformazioni conformi per lo spazio

$$ds^2 = \sum a_{ik} dx_i dx_k$$

è che esista una funzione k delle x_i tale che

$$X(\sum a_{ik} dx_i dx_k) = k \sum a_{ik} dx_i dx_k.$$

Se k è costante essa si può chiamare una trasformazione simile.

Un'altra osservazione è la seguente: Almeno per gruppi transitivi valgono ancora i teoremi seguenti, che si dimostrano come gli analoghi dei paragrafi precedenti per le forme quadratiche:

Si possono costruire per quadrature tutte le forme differenziali di ordine qualunque che ammettono un gruppo continuo transitivo di operazioni, e i gruppi corrispondenti.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo transitivo possa trasformare in sè una forma differenziale di ordine qualunque n , è che quel suo sottogruppo che lascia fisso un punto A trasformi i punti infinitamente vicini ad A in modo che esista un sistema di superficie omotetiche di n^{esimo} ordine infinitamente vicine ad A , ciascuna delle quali venga dal detto sottogruppo trasformata in sè.

Così si possono pure generalizzare molti altri dei precedenti risultati.

§ 10. Ricerchiamo ora effettivamente i gruppi a 1, 2, 3, 4 parametri che possono essere realmente considerati come gruppi di movimenti. Osserviamo che se il numero delle loro trasformazioni dipendenti è minore o uguale a 3, essi devono (§ 1) potersi considerare come gruppi di movimenti di uno spazio a non più di tre dimensioni, e quindi si possono prendere senz'altro dalla Memoria del prof. BIANCHI; si potrebbe però anche, poichè il LIE diede tutti i gruppi su due variabili e insegnò un metodo per trovare tutti quelli su tre variabili, esaminare l'un dopo l'altro tutti quelli dei tipi enunciati da LIE che non posseggono più di quattro parametri, e di questi ritenere soltanto quelli che soddisfano alle condizioni del § 6. Questo metodo sarebbe assai rapido, e servirebbe a trovare senz'altro direttamente i ri-

sultati della più volte citata Memoria del prof. BIANCHI. Si potrebbe anche infine costruire questi gruppi secondo il mio metodo del § 5; ma questa via sarebbe un po' più lunga della precedente. Noi naturalmente prenderemo questi gruppi addirittura dalla Memoria del prof. BIANCHI, perchè il lettore può facilmente da sè vedere che questi altri metodi condurrebbero appunto ai risultati del prof. BIANCHI.

Gruppi G_1 :

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Gruppi G_2 a trasformazioni infinitesime naturalmente linearmente indipendenti.

$$\text{I}^0) \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$\text{II}^0) \quad X_1 = e^{-x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Gruppi G_3 a trasformazioni infinitesime linearmente dipendenti.

$$\text{I}^0) \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} \quad X_3 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$\text{II}^0) \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2} \quad X_2 = \sin x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cotg x_1 \cos x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \quad X_3 = (X_1, X_2)$$

$$\text{III}^0) \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2} \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \quad X_3 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{2} (e^{-2x_1} - x_2^2) \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Gruppi G_3 a trasformazioni infinitesime linearmente indipendenti.

$$\text{I}^0) \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad X_3 = -\frac{\partial}{\partial x_1} + \left(\frac{x_2}{2} + x_3\right) \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{x_3}{2} \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\text{II}^0) \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad X_3 = -\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + h x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\text{III}^0) \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + (x_2 + h x_3) \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\text{IV}^0) \quad X_1 = e^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2^2 e^{-x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} - 2 x_2 e^{-x_1} \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad X_3 = e^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$\text{V}^0) \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad X_2 = \cos x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - \cotg x_1 \sin x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\sin x_2}{\sin x_1} \frac{\partial}{\partial x_3};$$

$$X_3 = (X_1, X_2)$$

$$\text{VI}^\circ) \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad X_3 = -\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$\text{VII}^\circ) \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Gruppi G_4 a trasformazioni infinitesime linearmente dipendenti.

$$\text{I}^\circ) \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad X_3 = -\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2};$$

$$X_4 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{2} (x_1^2 - x_3^2) \frac{\partial}{\partial x_2} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\text{II}^\circ) \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2};$$

$$X_4 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{e^{-2x_1}}{1-n^2} - x_2^2 \right) \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{n e^{-x_1}}{1-n^2} \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\text{III}^\circ) \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3};$$

$$X_3 = \cos x_2 - \cotg x_1 \sin x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{n \sin x_2}{\sin x_1} \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad X_4 = (X_1, X_3).$$

Il tipo II^o e III^o si potrebbero da un punto di vista generale considerare come identici.

§ 11. Troviamo ora i gruppi G_4 a trasformazioni infinitesime indipendenti. Questo gruppo (§ 1) si deve poter ridurre a un gruppo transitivo su 4 lettere. Per determinare questi gruppi potremmo, seguendo il procedimento generale del § 5, ricorrere senz'altro ai metodi di LIE. Ma però noi possiamo usare di metodi più rapidi, in quanto che noi conosciamo tutti i G_3 transitivi. Potremo dunque prendere un sottogruppo G_3 di G_4 , di cui cercheremo la composizione. Da questa potremo subito dedurre (per mezzo della penultima tabella) una forma, a cui possiamo immaginare ridotte le sue trasformazioni infinitesime; la quarta trasformazione infinitesima di G_4 si determina poi in guisa che non sia combinazione lineare delle precedenti, e che il G_4 abbia la composizione voluta.

Sia ora il G_4 non integrabile (cfr. LIE: Vol. III, § 137); il gruppo derivato (X_1, X_2, X_3) dovrà avere una delle seguenti composizioni:

$$(X_1, X_2) = X_1 \quad (X_1, X_3) = 2 X_2 \quad (X_2, X_3) = X_3$$

oppure

$$(X_1, X_2) = X_3 \quad (X_2, X_3) = X_1 \quad (X_3, X_1) = X_1.$$

E in ambi i casi si può poi scegliere X_4 in modo che sia permutabile con le precedenti trasformazioni.

Il $G_3(X_1, X_2, X_3)$ è certo a trasformazioni infinitesime linearmente indipendenti e (§ 1) si può immaginare semplicemente transitivo su tre lettere.

Nel primo di questi casi avremo:

$$X_1 = e^{-x_3} \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2^2 e^{-x_3} \frac{\partial}{\partial x_2} - 2 x_2 e^{-x_3} \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad X_3 = e^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Posto:

$$X_4 = \sum_{i=1}^4 \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \left(\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, x_3, x_4) \right)$$

avremo, essendo $(X_i, X_4) = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$

$$e^{-x_3} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \xi_3 e^{-x_3} = 0; \quad e^{-x_3} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + 2 x_2 \xi_2 e^{-x_3} - \xi_3 e^{-(x_2+x_3)} = x_2^2 e^{-x_3} \xi_3$$

$$e^{-x_3} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} + 2 \xi_2 e^{-x_3} - 2 \xi_3 x_2 e^{-x_3} = 0$$

$$e^{-x_3} \frac{\partial \xi_4}{\partial x_1} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} = \frac{\partial \xi_4}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} - \xi_3 = 0 \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial x_3} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

dove, integrando,

$$\xi_1 = \alpha x_1^2 + 2 \beta x_1 + \gamma \quad \xi_2 = -2 x_2 (\alpha x_1 + \beta) + \alpha$$

$$\xi_3 = -2 (\alpha x_1 + \beta) \quad \xi_4 = -\frac{1}{l_4}$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, l_4$ sono funzioni qualunque di x_4 .

Con procedimento analogo troviamo nel secondo caso:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad X_2 = \cos x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - \cotg x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\sin x_2}{\sin x_1} \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad X_3 = (X, X_2).$$

E, posto

$$X_4 = \sum_{i=1}^4 \xi_i(x_1, x_2, x_3, x_4) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

si ottiene

$$\xi_1 = \xi_2 = 0 \quad X_4 = \varphi \frac{\partial}{\partial x_3} + \psi \frac{\partial}{\partial x_4}$$

dove φ, ψ sono funzioni di x_4 .

Del resto questi due casi, quando non si distingue reale da immaginario, sono da riputarsi identici.

Sia ora il G_4 integrabile e sia un G_3 a trasformazioni non permutabili il gruppo derivato. Indicando con X_1, X_2, X_3, X_4 le trasformazioni generatrici di G_4 potremo porre (LIE, loc. cit.) o

$$\begin{aligned} \text{I}^\circ) \quad (X_1 X_2) = (X_1 X_3) = 0 \quad (X_2 X_3) = X_1 \\ (X_1 X_4) = c X_1 \quad (X_2 X_4) = X_2 \quad (X_3 X_4) = (c-1) X_3 \end{aligned}$$

oppure

$$\begin{aligned} \text{II}^\circ) \quad (X_1 X_2) = (X_1 X_3) = 0 \quad (X_2 X_3) = X_1 \\ (X_1 X_4) = 2 X_1; \quad (X_2 X_4) = X_2; \quad (X_3 X_4) = X_2 + X_3. \end{aligned}$$

In ambi i casi potremo fare

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad X_3 = -\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

E posto

$$X_4 = \sum_{i=1}^4 \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

avremo, nel primo caso,

$$\begin{aligned} \xi_1 = (c-1)x_1 + \varphi_1 \quad \xi_2 = -x_1 \varphi_3 + c x_2 + \varphi_2 \\ \xi_3 = x_3 + \varphi_3 \quad \xi_4 = -\frac{1}{l_4} \end{aligned}$$

e nel secondo

$$\begin{aligned} \xi_1 = x_1 + \varphi_1 \quad \xi_2 = -\frac{x_1^2}{2} - x_1 \varphi_3 + 2x_2 + \varphi_2 \\ \xi_3 = x_3 - x_1 + \varphi_3 \quad \xi_4 = -\frac{1}{l_4} \end{aligned}$$

dove $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, l_4$ sono funzioni di x_4 .

Sia ora il gruppo derivato di G_4 un G_2 e non contenga il G_4 un G_3 a trasformazioni permutabili. Allora o il G_4 ha la penultima composizione, dove si ponga $c=1$, oppure avrà la composizione:

$$(X_1 X_2) = (X_2 X_3) = (X_1 X_4) = (X_3 X_4) = 0 \quad (X_1 X_3) = X_1 \quad (X_2 X_4) = X_2.$$

Potremo fare:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad X_3 = -\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

e, posto

$$X_4 = \sum_{i=1}^4 \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

avremo :

$$\xi_1 = \varphi_1 \quad \xi_2 = e^{-x_1} \varphi_2 \quad \xi_3 = x_3 + \varphi_3 \quad \xi_4 = -\frac{1}{l_4},$$

dove $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, l_4$ sono funzioni di x_4 .

Contenga ora il G_4 un $G_3 \equiv (X_1, X_2, X_3)$ a trasformazioni a due a due permutabili. Potremo fare

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad X_4 = \sum_{i=1}^4 \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Si potrà poi scegliere X_4 in guisa che o

$$I^o) \quad (X_1 X_4) = X_1 \quad (X_2 X_4) = a X_2 \quad (X_3 X_4) = c X_3$$

e quindi

$$\xi_1 = x_1 + \varphi_1, \quad \xi_2 = a x_2 + \varphi_2, \quad \xi_3 = c x_3 + \varphi_3, \quad \xi_4 = -\frac{1}{l_4}$$

oppure

$$II^o) \quad (X_1 X_4) = c X_1 \quad (X_2 X_4) = (1+c) X_2 \quad (X_3 X_4) = X_3 + c X_3$$

e quindi :

$$\xi_1 = c x_1 + x_3 + \varphi_1; \quad \xi_2 = (1+c) x_2 + \varphi_2; \quad \xi_3 = c x_3 + \varphi_3; \quad \xi_4 = -\frac{1}{l_4}$$

oppure

$$III^o) \quad (X_1 X_4) = X_2 \quad (X_2 X_4) = 0 \quad (X_3 X_4) = X_1$$

e quindi :

$$\xi_1 = x_3 + \varphi_1 \quad \xi_2 = x_1 + \varphi_2 \quad \xi_3 = x_3 + \varphi_3 \quad \xi_4 = -\frac{1}{l_4}$$

oppure

$$IV^o) \quad (X_1 X_4) = X_1 + X_2 \quad (X_2 X_4) = X_2 \quad (X_3 X_4) = X_1 + X_3$$

e quindi :

$$\xi_1 = \varphi_1 \quad \xi_2 = x_3 + \varphi_2 \quad \xi_3 = \varphi_3 \quad \xi_4 = -\frac{1}{l_4}$$

oppure :

$$V^o) \quad (X_1 X_4) = (X_2 X_4) = 0, \quad (X_3 X_4) = X_2$$

e quindi:

$$\xi_1 = \varphi_1; \quad \xi_2 = x_3 + \varphi_2; \quad \xi_3 = \varphi_3; \quad \xi_4 = -\frac{1}{l_4}$$

oppure:

$$\text{VI}^\circ) \quad (X_1 X_4) = X_1 \quad (X_2 X_4) = X_2 \quad (X_3 X_4) = X_2 + X_3$$

e quindi:

$$\xi_1 = x_1 + \varphi_1 \quad \xi_2 = x_2 + x_3 + \varphi_2 \quad \xi_3 = x_3 + \varphi_3 \quad \xi_4 = -\frac{1}{l_4}$$

oppure

$$\text{VII}^\circ) \quad (X_i X_4) = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

e quindi

$$X_4 = \varphi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \varphi_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{1}{l_4} \frac{\partial}{\partial x_4}$$

dove $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, l_4$ sono funzioni di x_4 .

§ 12. Veniamo ora a un'altra parte del presente lavoro, dove io voglio esporre un metodo per la ricerca dei sottogruppi finiti discontinui dei gruppi continui e, in modo speciale, dei gruppi che si possono considerare come gruppi di movimenti. Io svolgerò questi metodi, applicandoli dapprima effettivamente a due esempi, agli spazii cioè del tipo VIII^o) e IX^o) del prof. BIANCHI, ciò che ci permetterà anche di trovare delle notevolissime rappresentazioni geometriche di tali spazii sulla sfera e sulla pseudosfera.

Cominceremo dagli spazii del tipo IX^o), che ammettono, con le notazioni del prof. BIANCHI un gruppo generato dalle

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad X_2 = \cos x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - \cotg x_1 \sin x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\sin x_2}{\sin x_1} \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$X_3 = (X_1 X_2)$$

con la composizione:

$$(X_1 X_2) = X_3; \quad (X_2 X_3) = X_1; \quad (X_3 X_1) = X_2.$$

Costruiamo il gruppo aggiunto di questo gruppo. Con le usuali notazioni di LIE, esso si ottiene dall'integrazione del sistema:

$$\frac{d e'_1}{d t} = \lambda_2 e'_3 - \lambda_3 e'_2 \quad (1)$$

$$\frac{d e'_2}{d t} = \lambda_3 e'_1 - \lambda_1 e'_3 \quad (2)$$

$$\frac{d e'_3}{d t} = \lambda_1 e'_2 - \lambda_2 e'_1. \quad (3)$$

Donde

$$e'_1 \frac{de'_1}{dt} + e'_2 \frac{de'_2}{dt} + e'_3 \frac{de'_3}{dt} = 0$$

ossia

$$e'^2_1 + e'^2_2 + e'^2_3 = \text{cost.} \quad (4)$$

Questo gruppo aggiunto non è perciò altro che il gruppo delle rotazioni di una sfera in sè stessa; e poichè se T è una trasformazione qualunque del gruppo iniziale

$$T^{-1} T T = T,$$

ne traggiamo che alla trasformazione $\lambda_1 t, \lambda_2 t, \lambda_3 t$ del gruppo iniziale corrisponde una rotazione della sfera attorno al diametro che ha i coseni di direzioni proporzionali a $\lambda_1 t, \lambda_2 t, \lambda_3 t$; ciò che si conferma col calcolo seguente. Derivando la (1) rispetto a t , otteniamo per le (2) e (3):

$$\frac{d^2 e'_1}{dt^2} + (\lambda_2^2 + \lambda_3^2) e'_1 - \lambda_1 (\lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3) = 0$$

donde:

$$\frac{d^3 e'_1}{dt^3} + (\lambda_2^2 + \lambda_3^2) \frac{de'_1}{dt} - \lambda_1 \left(\lambda_2 \frac{de'_2}{dt} + \lambda_3 \frac{de'_3}{dt} \right) = 0$$

e poichè per le (1), (2), (3) si ha

$$\sum_1^3 \lambda_i \frac{de'_i}{dt} = 0$$

si avrà

$$\frac{d^3 e'_1}{dt^3} + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \frac{de'_1}{dt} = 0.$$

Identica equazione si trova per e'_2, e'_3 . Indicando con A_i, B_i, C_i delle costanti avremo dunque

$$e'_i = A_i + B_i \sin Ht + C_i \cos Ht \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5)$$

dove

$$H^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2.$$

Servendoci delle (1), (2), (3) e del fatto che per $t = 0$

$$e'_i = e_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

potremo determinare le A_i, B_i, C_i e otterremo infine, scrivendo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, H$

in luogo di $\lambda_1 t, \lambda_2 t, \lambda_3 t, H t$

$$e'_1 = e_1 \left(\frac{\lambda_1^2}{H^2} + \cos H \left(1 - \frac{\lambda_1^2}{H^2} \right) \right) + e_2 \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2}{H^2} + \frac{\lambda_3}{H} \sin H - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{H^2} \cos H \right) + e_3 \left(\frac{\lambda_1 \lambda_3}{H^2} - \frac{\lambda_2}{H} \sin H - \frac{\lambda_1 \lambda_3}{H^2} \cos H \right) \quad (6)$$

e le eguaglianze che se ne ottengono rotando. Queste eguaglianze rappresentano appunto una rotazione attorno alla retta, i cui coseni di direzione sono proporzionali a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Per trovarne l'ampiezza θ , si osservi che per note formole di Geometria analitica

$$\left\| \begin{matrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{matrix} \right\| = \cos \theta \left\| \begin{matrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{matrix} \right\|^2$$

donde sostituendo e sviluppando otteniamo:

$$\theta = H.$$

Abbiamo così trovato, con metodo evidentemente applicabile a casi più generali, un gruppo di sostituzioni lineari isomorfo al gruppo dato. E il nostro risultato si può esporre così:

Il gruppo in discorso è oloedricamente isomorfo al gruppo dei movimenti di una sfera in sè: l'isomorfismo si stabilisce, facendo corrispondere alla trasformazione

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3$$

una rotazione di ampiezza $\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}$ attorno a quel punto di una sfera (col centro nell'origine) le cui coordinate sono proporzionali a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

I gruppi non sono però simili, perchè mentre uno opera su tre variabili, l'altro opera in realtà soltanto su due.

Ma ora osserviamo che dati due gruppi oloedricamente isomorfi, non sempre dall'esistenza di sottogruppi finiti discontinui per l'uno si può concludere l'esistenza di sottogruppi finiti discontinui per l'altro. Così p. es. il gruppo delle rotazioni attorno a un asse e il gruppo delle traslazioni in una direzione sono oloedricamente isomorfi, mentre però per l'uno esistono sottogruppi discontinui finiti e per l'altro non ne esistono affatto.

Ciò che si deve alle ploidromie, ecc., che si possono presentare ampliando il campo in cui opera un dato gruppo. È ben chiaro però che a un sottogruppo finito discontinuo di un gruppo, corrisponderà un sottogruppo

isomorfo nel gruppo aggiunto, in generale. E quindi dovremo prima ricercare i sottogruppi discontinui finiti del gruppo aggiunto. Questo problema è senz'altro risoluto nel nostro caso: i sottogruppi cercati nel gruppo aggiunto non sono che i gruppi dei poliedri regolari. E il nostro calcolo precedente definisce senza ambiguità i sottogruppi corrispondenti del gruppo iniziale, perchè dà nel modo più perspicuo quale trasformazione del nostro gruppo si deve far corrispondere a una trasformazione del gruppo aggiunto. Ma per poter affermare che le trasformazioni del gruppo iniziale, corrispondenti alle trasformazioni del gruppo di un poliedro regolare contenuto nel gruppo aggiunto, formino effettivamente un gruppo, bisogna, come risulta chiaramente dalle considerazioni precedenti, fissare bene il significato delle coordinate. A tal fine serve l'importante osservazione che *due gruppi oloedricamente isomorfi non simili si possono spesso rendere simili, mutando le variabili su cui essi operano*. Nel caso nostro il gruppo aggiunto, invece di essere considerato come un gruppo operante sui punti della sfera, sarà pensato come gruppo operante sugli elementi della sfera, cioè sulla sfera immaginata come luogo degli infiniti enti che si definiscono dando un punto della sfera stessa e una direzione uscente da esso tangente alla sfera. I due gruppi risultano allora senz'altro simili, e con opportuna scelta delle coordinate di un elemento della sfera, essi riescono identici. Si prendano come coordinate di un elemento della sfera la colatitudine e la longitudine θ , φ del punto corrispondente e la derivata $\varrho^{(1)} = \frac{d\theta}{ds}$, dove ds è la lunghezza dell'elemento, $d\theta$ l'incremento di θ muovendoci lungo di esso. Le trasformazioni infinitesime del gruppo aggiunto sono

$$e_3 \frac{\partial}{\partial e_2} - e_2 \frac{\partial}{\partial e_3}; \quad e_1 \frac{\partial}{\partial e_3} - e_3 \frac{\partial}{\partial e_1}; \quad e_2 \frac{\partial}{\partial e_1} - e_1 \frac{\partial}{\partial e_2}.$$

Posto

$$e_3 = \cos \theta, \quad e_2 = \sin \theta \sin \varphi, \quad e_1 = \sin \theta \cos \varphi$$

avremo che l'ultima, rappresentando una rotazione attorno all'asse delle « e_3 » sarà eguale a

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

La seconda, essendo una rotazione attorno all'asse e_2 , lascia invariato $\sin \theta \sin \varphi$ e quindi sarà della forma

$$e_1 \frac{\partial}{\partial e_3} - e_3 \frac{\partial}{\partial e_1} = k \left(-\cos \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} \right),$$

dove k è una funzione da determinarsi. Ma, poichè

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \varphi} &= -\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \frac{\partial}{\partial e_1} + \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial e_2} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= -\operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial e_3} + \cos \theta \operatorname{sen} \varphi \frac{\partial}{\partial e_2} + \cos \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial e_1}\end{aligned}$$

si trova senz'altro

$$k = -\frac{1}{\operatorname{sen} \theta}$$

e quindi

$$X_2 = \operatorname{sen} \varphi \cotg \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} - \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Analogamente:

$$X_1 = \operatorname{sen} \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \varphi \cotg \theta \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Ampliamo ora il gruppo X_1, X_2, X_3 immaginandolo operante anche su $\varphi^{(1)} = \frac{d\theta}{ds}, \varphi^{(1)} = \frac{\partial \varphi}{\partial s}$. Avremo:

$$\begin{aligned}X_3 &= \frac{\partial}{\partial \varphi}; \quad X_2 = \operatorname{sen} \varphi \cotg \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} - \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \varphi^{(1)} \operatorname{sen} \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi^{(1)}} + \\ &\quad + \left[\varphi^{(1)} \cos \varphi \cotg \theta - \varphi^{(1)} \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen}^2 \theta} \right] \frac{\partial}{\partial \varphi^{(1)}} \\ X_1 &= (X_3, X_2).\end{aligned}$$

Lasciando ora il termine in $\frac{\partial}{\partial \varphi^{(1)}}$, perchè noi vogliamo soltanto occuparci di come il gruppo trasforma $\varphi^{(1)}$, e osservando che $ds^2 = d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi^2$, donde $\varphi^{(1)} = \frac{\sqrt{1 - \theta'^2}}{\operatorname{sen} \theta}$, sostituendo alla $\varphi^{(1)}$ la nuova variabile $\psi = \int \frac{d\theta^{(1)}}{\sqrt{1 - \theta'^2}}$ il gruppo assume l'aspetto

$$\begin{aligned}X_3 &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad X_2 = \operatorname{sen} \varphi \cotg \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} - \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \psi} \\ X_1 &= (X_3, X_2).\end{aligned}$$

Ponendo dunque

$$x_2 = \varphi$$

$$x_1 = \theta$$

$$x_3 = \psi$$

questo gruppo assume proprio la forma data dal prof. BIANCHI.

Abbiamo dunque :

Le formule precedenti stabiliscono una rappresentazione del nostro spazio sulla sfera euclidea pensata come luogo di elementi, tale che ai movimenti dello spazio in sè corrispondono movimenti della sfera in sè stessa.

Se noi vogliamo che la rappresentazione sia biunivoca su tutta la sfera senza eccezione, resta senz'altro fissata la corrispondenza tra i punti dello spazio e le loro coordinate. E possiamo dire :

I gruppi finiti discontinui degli spazii in discorso sono quelli, che, nella corrispondenza precedentemente fissata, corrispondono ai gruppi dei poliedri regolari.

Il fatto che qui vediamo, cioè che i gruppi finiti discontinui dei nostri spazii sono oloedricamente isomorfi a gruppi finiti discontinui di movimenti di uno spazio ellittico è un fatto generale, che si ripete sempre appena il gruppo totale dei movimenti non contenga trasformazioni infinitesime eccezionali. Infatti a un gruppo finito discontinuo di movimenti corrisponde un gruppo finito discontinuo nel gruppo aggiunto, che è in tal caso oloedricamente isomorfo al gruppo primitivo. E questo gruppo, essendo un gruppo finito di operazioni lineari lascia sempre invariata una forma quadratica definita che è p. es. la somma della forma $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2$ e delle sue trasformate. Nel caso precedente questa forma è proprio « $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2$ ».

Da queste osservazioni scaturisce senz'altro un metodo per ricercare in ogni caso cosiffatto se esistono nel gruppo considerato sottogruppi finiti discontinui. Il nostro metodo consiste nel formare il gruppo aggiunto, e di determinare quali delle sue trasformazioni lascino fissa una forma quadratica definita, ciò che si compie con operazioni algebriche: considerata poi questa forma quadratica posta uguale a zero come assoluto di uno spazio ellittico, vedere quali sottogruppi discontinui finiti di questo spazio appartengono pure al gruppo aggiunto. In conclusione anche nel caso più generale la ricerca si riduce alla determinazione dei gruppi finiti discontinui di uno spazio ellittico. Applicheremo ora questo procedimento, un po' modificato, al tipo VIII° del prof. BIANCHI. Cominceremo dal costruirne il gruppo aggiunto. Esso viene definito dalle

$$\frac{d e'_1}{d t} + \lambda_1 e'_2 - \lambda_2 e'_1 = 0$$

$$\frac{d e'_2}{d t} + 2 \lambda_1 e'_3 - 2 \lambda_3 e'_1 = 0$$

$$\frac{d e'_3}{d t} + \lambda_2 e'_3 - \lambda_3 e'_2 = 0.$$

Vediamo se qualche sua trasformazione lascia fissa una conica. E, poichè per le precedenti equazioni,

$$e'_1 \frac{d e'_3}{d t} + e'_3 \frac{d e'_1}{d t} - \frac{1}{2} e'_2 \frac{d e'_2}{d t} = 0$$

ossia

$$4 e'_1 e'_3 - e'^2_2 = \text{cost.},$$

tutte le trasformazioni del gruppo lasciano fissa la conica reale

$$4 e'_1 e'_3 - e'^2_2 = 0.$$

Allora senz'altro deduciamo che il nostro gruppo è oloedricamente isomorfo ai movimenti di una pseudosfera in sè perchè questa conica è reale, e, analogamente a quanto s'è fatto prima noi avremmo:

Il nostro spazio si può riferire biunivocamente alla pseudosfera pensata come luogo dei suoi ∞^3 elementi in modo che ai movimenti della pseudosfera in sè stessa corrispondano movimenti dello spazio in sè. Questa corrispondenza definisce per noi senz'altro la corrispondenza tra un punto di S_3 e le sue coordinate. E allora senz'altro poichè eccetto casi banali, la pseudosfera non ammette gruppi finiti di movimenti in sè, ma ammette bensì gruppi infiniti discontinui, avremo:

Gli spazii in discorso non ammettono (tranne qualche caso banale) gruppi finiti discontinui di movimenti: essi ammettono però infiniti gruppi infiniti discontinui di movimenti, isomorfi oloedricamente ai gruppi di POINCARÉ.

Per gli altri tipi di S_3 , che ammettono un G_3 transitivo di movimenti è ben facile riconoscere l'impossibilità di gruppi discontinui finiti. Basta infatti riconoscere l'aperiodicità di una trasformazione qualsiasi del gruppo aggiunto. P. es. nel tipo VI° il gruppo aggiunto è definito da

$$\frac{d e'_1}{d t} + \lambda_1 e'_3 - \lambda_3 e'_1 = 0$$

$$\frac{d e'_2}{d t} + h (\lambda_2 e'_3 - \lambda_3 e'_2) = 0$$

$$\frac{d e'_3}{d t} = 0.$$

donde, se $\lambda_3 = 0$,

$$e'_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_3} (e_3 - e_3 e^{\lambda_1 t}) + e_1 e^{\lambda_1 t}$$

$$e'_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} e_3 (1 - e^{h \lambda_2 t}) + e_2 e^{h \lambda_2 t}$$

$$e'_3 = e_3$$

che non può essere periodica nel campo reale, poichè, essendo $\lambda_3 = 0$, è $e^{\lambda_3 t} = 1$.

Se invece $\lambda_3 = 0$, si avrà:

$$e'_1 = -\lambda_1 e_3 t + e_1$$

$$e'_2 = -\lambda_2 e_3 t + e_2$$

$$e'_3 = e_3$$

pure aperiodica se

$$\lambda_2 = 0, \quad \text{o} \quad \lambda_1 = 0.$$

La discussione è analoga per gli altri tipi.

Invece ora di studiare quegli S_3 che ammettono un G_4 , noi osserveremo che questi G_4 contengono una trasformazione infinitesima eccezionale e diremo poche parole sui gruppi G_r che contengono k trasformazioni $Y_1 \dots Y_k$ infinitesime eccezionali. Per trovarne i sottogruppi finiti discontinui si trovino prima tutti i cosiffatti sottogruppi eventuali del gruppo aggiunto. Si determinano in un modo qualunque le trasformazioni corrispondenti del gruppo iniziale, cercando poi, se è possibile, di aggiungervi delle trasformazioni di quel sottogruppo di G_r che viene generato dalle $Y_1 \dots Y_k$, che siano periodiche e che insieme alle precedenti generino effettivamente un gruppo della specie voluta.

§ 13. Daremo ora un'applicazione dei nostri metodi alla determinazione degli spazii che ammettono un G_1 oppure un G_2 o un G_3 o un G_4 , oppure un gruppo a più di 4 parametri con sole 4 trasformazioni infinitesime indipendenti.

Per i primi quattro casi il problema si risolve facilmente: per il quinto caso invece si vedrà che occorrono nuovi e particolari artifici, senza i quali i calcoli diverrebbero estremamente lunghi e ben difficilmente condurrebbero in fondo.

A questo caso, è riservata una prossima Memoria.

Per trovare gli spazii che ammettono un G_1 basta (cfr. BIANCHI (A) pag. 8) supporre i coefficienti dell'elemento lineare indipendenti da x_1 .

Per trovare gli spazii che ammettono un G_2 , basta, nel primo caso, ammettere i coefficienti dell'elemento lineare indipendenti da x_1, x_2 .

Nel secondo caso posto

$$ds^2 = \sum a_{ik} dx_i dx_k \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

le formule di KILLING ci danno subito che

$$\begin{aligned} a_{2k} &= x_1 a_{1k} + c_{2k} \quad (k=2) \\ a_{22} &= x_1^2 a_{11} + 2 c_{12} x_1 + c_{22}, \end{aligned}$$

dove le c_{ik} sono arbitrarie, purchè non dipendano da x_1, x_2 .

Spazii che ammettono un G_3 a trasformazioni infinitesime indipendenti.

Qui ricorderemo i risultati generali del § 4. Per trovare gli spazii corrispondenti a uno di questi tipi noi dovremo scindere il calcolo in due parti: uno relativo alle a_{ik} per $i, k=1, 2, 3$ e l'altro relativo alle a_{ik} per $i > 3, k \leq 3$. Quanto alle a_{ik} dove $i > 3, k > 3$ noi sappiamo già che esse possono essere funzioni arbitrarie indipendenti dalle x_1, x_2, x_3 . Esamineremo ora uno dopo l'altro i varii tipi di G_3 , transitivi nelle x_1, x_2, x_3 già trovati.

1.° tipo). Per le a_{ik} dove $i, k=1, 2, 3$ otteniamo, integrando le equazioni di KILLING,

$$\begin{aligned} a_{11} &= c_{11}; \quad a_{22} = c_{22}; \quad a_{12} = c_{12} e^{\frac{x_1}{2}}; \quad a_{23} = e^{x_1} (x_1 c_{22} + c_{23}) \\ a_{33} &= e^{x_1} (x_1^2 c_{22} + 2 x_1 c_{23} + c_{33}) \quad a_{13} = e^{\frac{x_1}{2}} (x_1 c_{12} + c_{13}) \end{aligned}$$

dove le c_{ik} sono indipendenti da x_1, x_2, x_3 . Se lo spazio in discorso è un S_4 , potremo supporre $a_{44}=1, a_{14}=a_{24}=a_{34}=0$ e le c_{ik} funzioni di x_4 . In generale avremo per le a_{ik} , dove $i > 3, k \leq 3$

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_2} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_3} = 0; \quad \frac{\partial a_{i1}}{\partial x_1} = \frac{\partial a_{i2}}{\partial x_1} - \frac{1}{2} a_{i2} = \frac{\partial a_{i3}}{\partial x_1} - a_{i2} - \frac{1}{2} a_{i3} = 0$$

equazioni, che si integrano senz'altro.

2.° tipo). Per le a_{ik} dove $i, k=1, 2, 3$ avremo per le equazioni di KILLING, che subito si integrano,

$$\begin{aligned} a_{11} &= c_{11} \quad a_{12} = c_{12} e^{x_1} \quad a_{13} = c_{13} e^{hx_1} \quad a_{22} = c_{22} e^{2x_1}; \quad a_{23} = c_{23} e^{(1+h)x_1} \\ a_{33} &= c_{33} e^{2hx_1} \end{aligned}$$

dove le c_{ik} sono indipendenti da x_1, x_2, x_3 .

Se lo spazio è un S_4 si può fare $a_{41}=1, a_{i4}=0$ ($i=1, 2, 3$).

In generale per le a_{ik} ($i > 3, k \leq 3$) avremo:

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_2} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_3} = 0 \quad - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_1} + a_{i2} \frac{\partial x_2}{\partial x_h} + a_{i3} h \frac{\partial x_3}{\partial x_h} = 0$$

che subito si integrano.

3.º tipo). Avremo per le a_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$)

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_2} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_3} = 0;$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} = \frac{\partial a_{12}}{\partial x_1} + a_{13} = \frac{\partial a_{13}}{\partial x_1} - a_{12} + h a_{13} = \frac{\partial a_{22}}{\partial x_1} + 2 a_{23} = \\ &= \frac{\partial a_{23}}{\partial x_1} - a_{22} + h a_{23} + a_{33} = \frac{\partial a_{33}}{\partial x_1} - 2 a_{23} + 2 h a_{33}. \end{aligned}$$

Derivando la seconda di queste ultime equazioni rispetto a x_1 e portandovi il valore di $\frac{\partial a_{13}}{\partial x_1}$ dato dalla terza e tra la seconda e la terza formula così ottenuta eliminando a_{13} , si ottiene:

$$\frac{\partial^2 a_{12}}{\partial x_1^2} + h \frac{\partial a_{12}}{\partial x_1} + a_{12} = 0.$$

E, se $\alpha \pm i\beta$ sono le radici di $z^2 + hz + 1 = 0$ si avrà:

$$a_{12} = \psi e^{\alpha x_1} \cos \beta x_1 + \chi e^{\alpha x_1} \sin \beta x_1$$

dove ψ, χ non dipendono da x_1, x_2, x_3 .

Si ha quindi:

$$a_{13} = -\frac{\partial a_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 a_{23}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial a_{22}}{\partial x_1} + h \frac{\partial a_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{33}}{\partial x_1} = 0.$$

Sostituendo nell'ultima per le $\frac{\partial a_{22}}{\partial x_1}, \frac{\partial a_{23}}{\partial x_1}$ i loro valori, si ha:

$$\frac{\partial^2 a_{23}}{\partial x_1^2} + 4 a_{23} + h \frac{\partial a_{23}}{\partial x_1} = 2 h a_{33}.$$

Derivando ed eliminando tra l'equazione così ottenuta e la precedente la a_{33} si trova:

$$\frac{\partial^3 a_{23}}{\partial x_1^3} + 3 h \frac{\partial^2 a_{23}}{\partial x_1^2} + (4 + 2 h^2) \frac{\partial a_{23}}{\partial x_1} + 4 h a_{23} = 0.$$

Un'analogha equazione si troverebbe per a_{22} e si avrebbe:

$$a_{22} = \varphi e^{-h x_1} + \psi e^{-h x_1} \cos 2 \beta x_1 + \chi e^{-h x_1} \sin 2 \beta x_1$$

$$a_{23} = -\frac{1}{2} \frac{\partial a_{22}}{\partial x_1} \quad a_{33} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial a_{22}}{\partial x_1} \left(1 + \frac{h}{2}\right).$$

Si ha poi $a_{i1} = \chi$, dove φ, ψ, χ sono funzioni indipendenti da x_1, x_2, x_3 .

Se lo spazio è un S_1 , potremo fare $a_{i1} = 1, a_{i4} = 0$ ($i = 1, 2, 3$).

In generale per le a_{ik} ($i > 3, k \leq 3$) otteniamo:

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_2} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_3} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_1} - a_{i2} \frac{\partial x_3}{\partial x_k} + a_{i3} \frac{\partial (x_2 + h x_3)}{\partial x_k} = 0$$

ossia

$$\frac{\partial a_{i1}}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial a_{i2}}{\partial x_1} + a_{i3} = 0 \quad \frac{\partial a_{i3}}{\partial x_1} + h a_{i3} = 0$$

che si integrano senza difficoltà.

4.^o tipo). Per le a_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) le equazioni e la loro integrazione si trova già nelle pag. 67-68 di (A). Basterà immaginarvi le a, b, c, d funzioni indipendenti da x_1, x_2, x_3 .

Per le a_{ik} ($i > 3, k \leq 3$) troviamo le:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_3} = 0 \quad \frac{\partial a_{i1}}{\partial x_1} = \frac{\partial a_{i2}}{\partial x_2} = \frac{\partial a_{i3}}{\partial x_3} + a_{i2} = 0 \\ e^{-x_3} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_1} + a_{i1} \frac{\partial (e^{-x_3})}{\partial x_k} - a_{i2} \frac{\partial (x_2^2 e^{-x_3})}{\partial x_k} - a_{i3} \frac{\partial (2 x_2 e^{-x_3})}{\partial x_k} = 0 \end{aligned}$$

che si integrano senz'altro.

5.^o tipo). Valgono per questo considerazioni perfettamente analoghe a quelle del tipo precedente.

6.^o tipo). Per le a_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) si trova, integrando le equazioni di KILLING, e indicando con χ_{ik} delle funzioni indipendenti da x_1, x_2, x_3 che:

$$\begin{aligned} a_{11} = \chi_{11}; \quad a_{12} = \chi_{12}; \quad a_{13} = \chi_{13}; \quad a_{13} = x_1 \chi_{12} + \chi_{13}; \quad a_{23} = x_1 \chi_{22} + \chi_{23} \\ a_{33} = x_1^2 \chi_{22} + 2 x_1 \chi_{23} + \chi_{33}. \end{aligned}$$

Per le a_{ik} ($i > 3, k \leq 3$) si ha:

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_2} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_3} = 0; \quad \frac{\partial a_{i1}}{\partial x_1} = \frac{\partial a_{i2}}{\partial x_1} = \frac{\partial a_{i3}}{\partial x_1} - \chi^2$$

che tosto si integrano.

7.^o tipo). Basta supporre le a_{ik} indipendenti da x_1, x_2, x_3, x_4 .

Spazii che ammettono un G_3 a trasformazioni infinitesime linearmente dipendenti. In questo caso si dovrà scindere lo studio per le a_{ik} in due altri casi, uno relativo alle a_{ik} ($i, k = 2$), l'altro per le a_{ik} ($i > 2, k \leq 2$).

1.º tipo). Tutte le a_{ik} sono indipendenti da x_1, x_2 . Per le a_{ik} ($i, k = 1, 2$) si trova dalle formole di KILLING che:

$$a_{22} = a_{11} = c_{11} \quad a_{12} = 0$$

dove c_{11} è indipendente da x_1, x_2 .

Per le a_{ik} ($i > 2, k \leq 2$) si ha:

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_1} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_2} = 0 \quad a_{i1} \frac{\partial x_2}{\partial x_k} - a_{i2} \frac{\partial x_1}{\partial x_k} = 0$$

che si integrano senz'altro.

2.º tipo). Per le a_{ik} ($i, k = 1, 2$) si hanno le:

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} = 0 \quad a_{12} = 0 \quad \frac{\partial a_{22}}{\partial x_1} = 2 a_{22} \cotg x_1 \quad a_{22} = a_{11} \sin^2 x_1$$

che si integrano tosto.

Per le a_{ik} ($i > 2, k \leq 2$) le formole di KILLING danno, poichè le a_{ik} sono indipendenti da x_2 , che:

$$a_{i2} = a_{i3} = 0.$$

3.º tipo). La discussione è perfettamente analoga alla precedente.

Spazii che ammettono un gruppo G_4 a trasformazioni infinitesime dipendenti. La ricerca di questi spazii in generale si fa come precedentemente: noi, col solo fine di una maggiore brevità, studieremo soltanto gli S_4 , accontentandoci di aver fatto rilevare dagli esempi precedenti il metodo generale.

1.º tipo). Potremo chiaramente porre, quando ci si restringa agli S_4 ,

$$ds^2 = dx_1^2 + \sum_{i,k} a_{ik} dx_i dx_k \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Integrando le equazioni di KILLING, si trova

$$a_{11} = c_{11}; \quad a_{22} = c_{22}; \quad a_{23} = x_1 c_{22}; \quad a_{33} = x_1^2 c_{22} + c_{11}; \quad a_{12} + a_{13} = 0$$

dove le c_{ik} sono indipendenti da x_1, x_2, x_3 .

2.º tipo). Posto, come sopra

$$ds^2 = dx_1^2 + \sum_{i,k} a_{ik} dx_i dx_k \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

otteniamo dalle equazioni di KILLING,

$$\begin{aligned} a_{11} &= c_{11}, & a_{33} &= c_{33}, & a_{23} &= n e^{x_1} c_{33}, & a_{12} &= a_{13} = 0, \\ a_{22} &= e^{2x_1} [(1 - n^2) c_{11} + n^2 c_{33}] \end{aligned}$$

dove le c_{ik} sono indipendenti da x_1, x_2, x_3 .

3.º tipo). Posto

$$ds^2 = dx_1^2 + \sum_{i,k} a_{ik} dx_i dx_k \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

si trova, con il solito procedimento, che:

$$\begin{aligned} a_{11} &= c_{11}; & a_{33} &= c_{33}; & a_{12} &= a_{13} = 0; & a_{23} &= n c_{33} \cos x_1 \\ a_{22} &= n^2 c_{33} \cos^2 x_1 + c_{11} \sin^2 x_1. \end{aligned}$$

Spazii che ammettono un gruppo G_4 non integrabile transitivo a trasformazioni infinitesime linearmente indipendenti.

Prima di trattare questo caso particolare, faremo alcune considerazioni generali sugli spazii che ammettono un G_4 , a trasformazioni infinitesime indipendenti. Osserveremo cioè che in ognuno dei gruppi G_4 cosiffatti, precedentemente determinati, entrano degli elementi arbitrarii. E noi potremmo valercene per condurre in due maniere i calcoli. Il primo modo consiste nel dare a questi elementi arbitrarii valori opportuni della massima semplicità, ricordando il teorema di LIE che due gruppi semplicemente transitivi sullo stesso numero di variabili e isomorfi sono anche simili. Il secondo metodo consisterebbe nel prefissare all'elemento lineare da determinarsi una forma saputa « a priori » possibile, lasciando quindi agli elementi arbitrarii che entrano nel gruppo tutta l'arbitrarietà compatibile con questa forma. Il primo metodo è più opportuno per lo studio degli spazii a un numero qualunque di dimensioni, il secondo per lo studio degli S_4 . Diamo ora un esempio del primo metodo.

Prendiamo p. es. il gruppo G_4 generato dalle

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x_2}; & X_2 &= \frac{\partial}{\partial x_3}; & X_3 &= -\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}; \\ X_4 &= [(c-1)x_1 + \varphi_1] \frac{\partial}{\partial x_1} + [-x_1 \varphi_3 + c x_2 + \varphi_2] \frac{\partial}{\partial x_2} + \\ &\quad + [x_3 + \varphi_3] \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{1}{l_4} \frac{\partial}{\partial x_4}. \end{aligned}$$

Secondo i principii testè esposti potremo porre

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0, \quad l_4 = 1$$

$$\text{col che si ha } X_4 = (c-1)x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + cx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4}.$$

Per le a_{ik} ($i > 4, k > 4$) basta supporre le funzioni indipendenti dalle x_1, x_2, x_3, x_4 . Per le a_{ik} ($i, k = 1, 2, 3, 4$) troviamo per le formule di KILLING,

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} = \frac{\partial a_{12}}{\partial x_1} = \frac{\partial a_{22}}{\partial x_1} = \frac{\partial a_{44}}{\partial x_1} = \frac{\partial a_{14}}{\partial x_1} = \frac{\partial a_{24}}{\partial x_1} = 0;$$

$$\frac{\partial a_{33}}{\partial x_1} = 2a_{33}; \quad \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_2} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial a_{i3}}{\partial x_1} = a_{i2} \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x_4} = 2(c-1)a_{11}; \quad \frac{\partial a_{22}}{\partial x_4} = 2c; \quad \frac{\partial a_{33}}{\partial x_4} = 2a_{33}; \quad \frac{\partial a_{44}}{\partial x_4} = 0;$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x_4} = (c-1)a_{12} + ca_{12}, \text{ ecc., ecc.,}$$

che si integrano senz'altro. Per le a_{ik} ($i > 4, k \leq 4$) si hanno le:

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_2} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_3} = 0; \quad -\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_1} + a_{i2} \frac{\partial x_3}{\partial x_k} = 0$$

$$(c-1)x_1 \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_1} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_4} + (c-1)a_{i1} \frac{\partial x_1}{\partial x_k} + ca_{i2} \frac{\partial x_2}{\partial x_k} + a_{i3} \frac{\partial x_3}{\partial x_k} = 0$$

che pure si integrano senza difficoltà. Con questo stesso metodo si possono chiaramente studiare tutti gli altri tipi di G_4 . Noi, col solo scopo di non allungare questa Memoria con formule, che poi non utilizzeremmo, ci restringeremo agli S_4 e useremo naturalmente del secondo metodo. Cominciamo ora a trovare gli S_4 con un G_4 transitivo non integrabile del primo tipo, avvertendo che la prima parte dello studio ci servirà anche per i casi ulteriori. Siccome il sottogruppo formato dalle X_1, X_2, X_3 ha le $x_4 = \text{cost.}$ come varietà invarianti potremo porre:

$$ds^2 = dx_4^2 + \sum_{i,k} a_{ik} dx_i dx_k \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Se $Xf = \sum_{i=1}^4 \xi_i(x_k) \frac{\partial f}{\partial x_i}$ è una trasformazione infinitesima che quello spa-

zio ammette allora, scrivendo le condizioni di KILLING relative ad $a_{ik} = a_{i1}$, a_{i2} , a_{i3} , a_{i4} otteniamo:

$$\frac{\partial \xi_4}{\partial x_4} = 0 \quad (\alpha)$$

$$\sum_{k=1}^3 a_{ik} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_4} + \frac{\partial \xi_4}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (\beta)$$

Indicando al solito con A_{ik} il complemento algebrico di a_{ik} diviso per il valore certamente non nullo del determinante $|a_{ik}|$ otterremo dalle (β)

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_4} = - \sum_{k=1}^3 A_{ik} \frac{\partial \xi_4}{\partial x_k} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (I)$$

Nei casi in cui, come nel nostro, ξ_4 può essere soltanto funzione di x_4 , esso è quindi per la (α) costante, e perciò per le (I) abbiamo che: $\frac{\partial \xi_1}{\partial x_4} = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_4} = \frac{\partial \xi_3}{\partial x_4} = 0$. Dunque le ξ_i non possono contenere x_4 ; cosicchè la nostra scelta dell'elemento lineare fa sì che tutte le funzioni arbitrarie (della x_i) che compariscono in X_4 sono semplici costanti. Queste considerazioni valgono anche per molti dei casi seguenti e noi non le ripeteremo.

Intanto avremo che le α, β, γ sono effettive costanti. E se noi scriviamo le formole di KILLING per le a_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) relative a X_1, X_2, X_3 otteniamo le formole pag. 67 di B. E ci basterà dall'esame di X_4 ricavare le a, b, c, d, e, f che nel nostro caso sono funzioni di x_4 . Osserviamo intanto che nella X_4 potremo (dividendo le α, β, γ per una costante certo non nulla) supporre $l_4 = 1$. Scrivendo le equazioni di KILLING, otteniamo dei polinomii in x_1, x_2 da uguagliarsi a zero. Annullando i coefficienti dei singoli termini (che saranno soltanto funzioni di x_4) raggiungeremo il nostro scopo. L'equazione di KILLING relativa ad a_{11} ci dà così:

$$\frac{d(a^2)}{dx_4} = 4(a^2 \beta - \alpha b).$$

L'equazione di KILLING per a_{33} ci dà, indicando con un apice la derivazione rispetto x_4 :

$$b' = a^2 \gamma + 2 b \beta - \alpha (c + 2 d)$$

$$c' + 2 d' = 6 (b \gamma - e \alpha)$$

$$d' = 2 (b \gamma - e \alpha)$$

$$e' = (c + 2 d) \gamma - 2 e \beta - \alpha f.$$

L'equazione di KILLING relativa ad a_{22} ci dà infine:

$$f' = 4(e\gamma - f\beta).$$

Le a, b, c, d, e, f si ottengono dunque integrando un sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie del prim'ordine.

2.º tipo). Prefisso come sopra all'elemento lineare la forma

$$dx_4^2 + \sum_{i,k}^{1,2,3} a_{ik} dx_i dx_k$$

si trova che $\xi_3 = \varphi$, $\xi_1 = \psi$ sono costanti. Per le a_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) troviamo, poichè lo spazio deve ammettere il $G_3 \equiv (X_1, X_2, X_3)$ le equazioni di pag. 69 (A) dove soltanto le costanti di integrazione saranno funzioni opportune di x_4 . Se $\xi_3 = 0$, queste funzioni saranno proprio costanti effettive; se $\xi_3 \neq 0$, notiamo che mutando x_4 in Kx_4 , dove K è una costante opportuna, potremo fare $\xi_3 = \xi_4$, mentre, sostituendo al nostro spazio uno spazio simile, potremo ancora porre $a_{44} = 1$. Si ha così

$$X_4 = \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_4}$$

e le a_{ik} ($i = 1, 2, 3$) si troveranno ancora date dalle formule a pag. 69 di (A), dove le $a, b, c, \dots$ si intendano ancora effettive costanti, ma al posto di x_3 si sostituisca $x_3 - x_4$.

Spazii che ammettono un G_4 a trasformazioni linearmente indipendenti, integrabile e il cui gruppo derivato è un G_3 a trasformazioni infinitesime non permutabili.

1.º tipo). Anche qui potremo porre

$$ds^2 = dx_4^2 + \sum_{i,k} a_{ik} dx_i dx_k \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Avremo per l'osservazione fatta che $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, l_4$ sono costanti effettive che indicheremo con l_1, l_2, l_3, l_4 cosicchè si potrà porre:

$$\xi_1 = (c-1)x_1 + l_1 \quad \xi_2 = \varphi - x_1 l_3 + c x_2 \quad \xi_3 = x_3 \quad \xi_4 = -\frac{1}{l_4}.$$

Essendovi le X_1, X_2, X_3 il nostro spazio sarà del tipo:

$$ds^2 = dx_4^2 + \varphi dx_1^2 + 2\psi dx_1 dx_2 + \chi dx_2^2 + 2(x_1\psi + \vartheta) dx_1 dx_3 + \\ + 2(x_1\chi + \lambda) dx_2 dx_3 + (x_1^2\chi + 2x_1\lambda + \mu) dx_3^2,$$

dove le $\varphi, \psi, \chi, \vartheta, \lambda, \mu$ sono funzioni di x_4 .

Scrivendo le formule di KILLING relative a X_4 abbiamo:

$$\begin{aligned} & [(c-1)x_1 + l_1] \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_1} + a_{i1}(c-1) \frac{\partial x_1}{\partial x_k} + a_{k1}(c-1) \frac{\partial x_1}{\partial x_i} + \\ & + a_{i2} \frac{\partial (cx_2 - l_3 x_1)}{\partial x_k} + a_{k2} \frac{\partial (cx_2 - l_3 x_1)}{\partial x_i} + a_{3i} \frac{\partial x_3}{\partial x_k} + a_{3k} \frac{\partial x_3}{\partial x_i} = \frac{1}{l_4} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_4}. \end{aligned}$$

Sostituendovi i valori trovati delle a_{ik} , e integrando otteniamo:

$$\begin{aligned} \chi &= p_{22} e^{2cl, x_1} \\ \psi &= e^{(2c-1)l, x_1} \{ -l_3 p_{22} e^{l, x_1} + p_{12} \} \\ \varphi &= e^{2l, (c-1)x_1} \{ -2p_{12} l_3 e^{l, x_1} + p_{11} + l_3^2 p_{22} e^{2l, x_1} \} \\ \lambda &= e^{l, (c+1)x_1} \left\{ \frac{l_1}{c-1} p_{22} e^{l, (c-1)x_1} + p_{23} \right\} \quad (\text{si noti che } c \neq 1) \\ \mu &= e^{2l, x_1} \left\{ \frac{2l_1}{c-1} p_{23} e^{l, (c-1)x_1} + \frac{l_1^2}{(c-1)^2} p_{22} e^{2l, (c-1)x_1} + p_{33} \right\} \\ \delta &= e^{cl, x_1} \left\{ \frac{l_1 p_{12}}{c-1} e^{(c-1)l, x_1} - l_3 p_{23} e^{l, x_1} - \frac{l_1 l_3}{c-1} p_{22} e^{cl, x_1} + p_{13} \right\} \end{aligned}$$

dove le p_{ik} sono costanti effettive.

2.° tipo). Anche qui si pone

$$ds^2 = dx_4^2 + \sum_{ik} a_{ik} dx_i dx_k.$$

E se ne deduce che le l_i sono effettive costanti. Per l'esistenza di X_1 , X_2 , X_3 si ha che ds^2 è del tipo già citato al 1.° caso.

Scrivendo le equazioni di KILLING relative alla $X_4 - l_2 X_1 - l_3 X_2$ e integrando, troviamo:

$$\begin{aligned} \chi &= p_{22} e^{4l, x_1} \\ \lambda &= e^{3l, x_1} (p_{23} + l_1 p_{22} e^{l, x_1}) \\ \mu &= e^{2l, x_1} (l_1^2 p_{22} e^{2l, x_1} + 2l_1 p_{23} e^{l, x_1} + p_{33}) \\ \psi &= e^{3l, x_1} \{ -(l_1 + l_3) p_{22} e^{l, x_1} - l_4 p_{23} x_4 + p_{12} \} \\ \delta &= e^{2l, x_1} \{ p_{13} - l_1 (l_1 + l_3) p_{22} e^{2l, x_1} - (l_1 + l_3) p_{23} e^{l, x_1} + l_1 p_{12} e^{l, x_1} - \\ &\quad - l_4 p_{33} x_4 - l_1 l_4 p_{23} x_4 e^{l, x_1} \} \\ \varphi &= e^{l, x_1} \{ (l_1 + l_3)^2 p_{22} e^{2l, x_1} - 2(l_1 + l_3) p_{12} e^{l, x_1} + 2p_{23} l_4 x_4 (l_1 + l_3) e^{l, x_1} + \\ &\quad + l_4^2 p_{33} x_4^2 - 2l_4 p_{13} x_4 + p_{11} \} \end{aligned}$$

dove le p_{ik} sono costanti.

Spazii che ammettono un G_4 integrabile a trasformazioni infinitesime indipendenti, di cui il gruppo derivato è un G_2 .

Per il primo dei due casi di questo tipo, troviamo col solito procedimento delle pagine precedenti e con notazioni analoghe:

$$d s^2 = d x_1^2 + \varphi d x_1^2 + 2 \psi d x_1 d x_2 + \chi d x_2^2 + 2 (x_1 \psi + \vartheta) d x_1 d x_3 + \\ + 2 (x_1 \chi + \lambda) d x_2 d x_3 + (x_1^2 \chi + 2 x_1 \lambda + \mu) d x_3^2$$

dove

$$\begin{aligned} \chi &= p_{22} e^{2l, x_1} \\ \psi &= e^{l, x_1} (-l_3 p_{22} e^{l, x_1} + p_{12}) \\ \varphi &= -2 p_{12} l_3 e^{l, x_1} + l_3^2 p_{22} e^{2l, x_1} + p_{11} \\ \lambda &= e^{2l, x_1} (l_1 l_4 p_{22} x_4 + p_{23}) \\ \mu &= e^{2l, x_1} \{ 2 l_1 l_4 p_{23} x_4 + l_1^2 l_4^2 x_4^2 p_{22} + p_{33} \} \\ \vartheta &= e^{l, x_1} \{ p_{13} + l_1 l_4 p_{12} x_4 - l_1 l_3 p_{22} e^{l, x_1} - l_3 p_{23} e^{l, x_1} + l_1 l_3 p_{22} e^{l, x_1} - \\ &\quad - l_1 l_3 l_4 p_{22} x_4 e^{l, x_1} \}. \end{aligned}$$

Studiamo il secondo tipo di tali gruppi.

Esso contiene un G_3 a trasformazioni infinitesime indipendenti del tipo 2.°, dove si faccia $h = 0$.

Sarà perciò:

$$d s^2 = d x_1^2 + \varphi d x_1^2 + 2 \psi e^{x_1} d x_1 d x_2 + \vartheta e^{2x_1} d x_2^2 + \mu d x_3^2 + \\ + 2 \chi d x_1 d x_3 + 2 \lambda e^{x_1} d x_2 d x_3,$$

dove le $\varphi, \psi, \dots$ sono funzioni di x_4 .

Nell'espressione trovata per la $X_4 f$ saranno al solito le φ_i vere costanti, e, come si vede perciò tosto, potremo porre, indicando con α, β, l_4 costanti,

$$X_4 = \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} + \beta e^{-x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{1}{l_4} \frac{\partial}{\partial x_4}.$$

Integrando le relative equazioni di KILLING, e indicando con p_{ik} delle costanti, abbiamo:

$$\begin{aligned} \lambda &= p_{23} e^{(\alpha+1)l, x_4} \\ \mu &= p_{33} e^{2l, x_4} \\ \vartheta &= p_{22} e^{2\alpha l, x_4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi &= e^{l, x_1} \left(-\frac{\beta}{\alpha} p_{23} e^{\alpha l, x_1} + p_{13} \right) \\ \psi &= e^{\alpha l, x_1} \left(-\frac{\beta}{\alpha} p_{22} e^{\alpha l, x_1} + p_{12} \right) \\ \varphi &= -2\beta \left(p_{12} \frac{1}{\alpha} e^{\alpha l, x_1} - \frac{\beta}{2} p_{22} \left[\frac{e^{\alpha l, x_1}}{\alpha} \right]^2 + p_{11} \right).\end{aligned}$$

Se $\alpha = 0$, valgono le stesse formule, dove però al termine $\frac{e^{\alpha l, x_1}}{\alpha}$ (che compare in φ, ψ, χ) si deve sostituire il termine

$$l_1 x_1.$$

Spazii che ammettono un G_4 che contengono un G_3 a trasformazioni infinitesime permutabili e le cui trasformazioni infinitesime sono linearmente indipendenti.

In tutti i tipi già enumerati al § 11 i coefficienti dell'elemento lineare corrispondente saranno funzioni della sola x_4 . E noi potremo porre:

$$ds^2 = dx_4^2 + \sum_{i,k} a_{ik} dx_i dx_k \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Se ne ha che la $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, l_1$ sono costanti.

Le equazioni di KILLING diventano:

$$\begin{aligned}2 \sum_{k=1}^3 a_{ik} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} + \xi_4 \frac{\partial a_{ii}}{\partial x_4} &= 0 \quad (i = 1, 2, 3) \\ \sum_{k=1}^3 a_{ik} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_l} + \sum_{k=1}^3 a_{lk} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} + \xi_4 \frac{\partial a_{il}}{\partial x_4} &= 0 \quad (i, l = 1, 2, 3).\end{aligned}$$

Sostituendovi per le ξ_i i loro valori, integrando, indicando con h_{ik} delle costanti, troviamo:

$$\begin{aligned}\text{I}^\circ) \quad a_{11} &= h_{11} e^{2l, x_1} \quad a_{22} = h_{22} e^{2l, x_1} \quad a_{33} = h_{33} e^{2l, x_1} \\ a_{12} &= h_{12} e^{l, (1+c)x_1} \quad a_{23} = h_{23} e^{l, (c+x_1)x_1} \quad a_{13} = h_{13} e^{l, (1+c)x_1} \\ \text{II}^\circ) \quad a_{12} &= h_{12} e^{(1+2c)l, x_1} \quad a_{11} = h_{11} e^{2l, cx_1} \quad a_{22} = h_{22} e^{2l, (1+c)x_1} \\ a_{23} &= (l_1 h_{12} x_4 + h_{23}) e^{l, (1+2c)x_1} \quad a_{13} = e^{2l, cx_1} (l h_{11} x_4 + h_{13}) \\ a_{33} &= e^{2l, cx_1} (l_1^2 h_{11} x_4^2 + 2 h_{13} l_1 x_4 + h_{33})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{III}^\circ) \quad & a_{22} = h_{22} \quad a_{12} = l_4 h_{22} x_4 + h_{12} \quad a_{23} = \frac{1}{2} l_4^2 h_{22} x_4 + h_{12} l_4 x_4 + h_{23} \\
 & a_{13} = \frac{1}{2} l_4^3 h_{22} x_4^3 + \frac{3}{2} l_4 h_{12} x_4^2 + (h_{11} + h_{23}) l_4 x_4 + h_{13} \\
 & a_{11} = l_4 h_{22} x_4^2 + 2 h_{12} l_4 x_4 + h_{11}; \\
 & a_{33} = \frac{l_4^4}{4} h_{22} x_4^4 + l_4^3 h_{12} x_4^3 + l_4 (h_{11} + h_{23}) x_4^2 + 2 l_4 h_{13} x_4 + h_{33} \\
 \text{IV}^\circ) \quad & a_{22} = h_{22} e^{2l_4 x_4}; \quad a_{12} = e^{2l_4 x_4} \{ h_{22} l_4 x_4 + h_{12} \}; \\
 & a_{11} = e^{2l_4 x_4} (l_4^2 h_{22} x_4^2 + 2 l_4 h_{12} x_4 + h_{11}) \\
 & a_{23} = e^{2l_4 x_4} \left(l_4^2 h_{22} \frac{x_4^2}{2} + l_4 h_{12} x_4 + h_{23} \right); \\
 & a_{13} = e^{2l_4 x_4} \left\{ h_{13} + \frac{l_4^2 h_{22}}{2} x_4^2 + \frac{3}{2} l_4 h_{12} x_4 + (h_{11} + h_{23}) l_4 x_4 \right\} \\
 & a_{33} = e^{2l_4 x_4} \left\{ h_{22} l_4^4 \frac{x_4^4}{4} + l_4^3 h_{12} x_4^3 + (h_{11} + h_{23}) l_4^2 x_4^2 + 2 l_4 x_4 h_{13} + h_{33} \right\} \\
 \text{V}^\circ) \quad & a_{11} = h_{11}; \quad a_{22} = h_{22}; \quad a_{12} = h_{12}; \quad a_{23} = l_4 h_{22} x_4 + h_{23}; \\
 & a_{13} = l_4 h_{12} x_4 + h_{13} \\
 & a_{33} = l_4^2 h_{22} x_4^2 + 2 l_4 h_{23} x_4 + h_{33} \\
 \text{VI}^\circ) \quad & a_{11} = h_{11} e^{2l_4 x_4} \quad a_{22} = h_{22} e^{2l_4 x_4} \quad a_{12} = h_{12} e^{2l_4 x_4} \\
 & a_{13} = e^{2l_4 x_4} \{ l_4 h_{12} x_4 + h_{13} \} \quad a_{23} = e^{2l_4 x_4} \{ l_4 h_{22} x_4 + h_{23} \} \\
 & a_{33} = e^{2l_4 x_4} \{ l_4^2 h_{22} x_4^2 + 2 l_4 h_{23} x_4 + h_{33} \}.
 \end{aligned}$$