Ueber die Biegung und Drillung eines unendlich dünnen elastischen Stabes, dessen eines Ende von einem Kräftepaar angegriffen wird*).

Von

W. HESS in München.

(Mit einer lithographirten Tafel.)

Die Bedingungen für das Gleichgewicht eines im Verhältniss zu seiner Länge sehr dünnen elastischen Stabes, auf dessen eines Ende irgend welche Kräfte einwirken, während das andere Ende festgehalten bleibt, sind zuerst von Kirchhoff**) aufgestellt worden. Kirchhoff hat hierbei darauf aufmerksam gemacht, dass diese Bedingungen die nämliche Form besitzen wie die Gleichungen, welche die Bewegung eines um einen festen Punkt rotirenden starren Körpers definiren. Durch diese Uebereinstimmung der zwei verschiedenen Probleme scheint somit nicht nur die Möglichkeit geboten, die expliciten Formeln, welche für verschiedene Fälle der Drehung bereits aufgestellt sind, direct zur Ermittlung der Gleichgewichtszustände des elastischen Stabes zu verwerthen, sondern auch Schritt für Schritt jedem Vorgange bei der Rotation des Körpers den entsprechenden für die Deformation des Stabes gegenüberzustellen und vielleicht umgekehrt aus der wechselseitigen Beziehung beider Probleme zu neuen Fragen für das erstere zu gelangen. Eine Untersuchung über das Gleichgewicht eines allgemeinen elastischen Stabes dürfte nun, da die bekannteren Arbeiten über diesen Gegenstand***) sich mit einem in allen Richtungen gleich

*) Ein Auszug aus dieser Untersuchung ist erschienen in den Sitzungsberichten der bayer. Acad. d. Wissensch. 1883. 82—110.

**) Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes. Crelle's J. Bd. 56. 285—313.

***) Hierher sind vor allem zu rechnen die Untersuchungen über die „elastische Linie“ von Bernoulli und Euler [De curvis elasticis Lausanne u. Genf. 1744. 4^o], Abhandlungen von Binet [Comptes rendus. Bd. 18. 1115—1119], Wantzel [ibid. 1197—1201] u. A. Vgl. die Literaturangabe in Navier: de la résistance des corps solides, XII—XXII. Paris, bei Dunod. 1874. 8^o.

biegsamen Draht oder mit Specialfällen beschäftigen, noch nicht erfolgt sein, zudem nicht im Anschlusse an das Rotationsproblem. Ich habe mich daher mit der Frage näher beschäftigt, und zwar vorerst unter der Annahme, dass auf das freie Ende des Stabes nur ein Kräftepaar einwirke. Das Analogon hierzu findet sich in der Drehung eines Körpers um seinen Schwerpunkt, welche Art der Bewegung durch die Verbindung der analytischen Arbeiten Jacobi's^{*)} mit den bekannten Anschauungsweisen Poinso't's^{**)}, wie ich sie in meiner Doctor-dissertation^{***}) versucht habe, hinreichend klar behandelt sein dürfte.

Die Untersuchung gliedert sich im Wesentlichen in zwei Theile. Zuerst werden die Ausdrücke für die Grösse der Biegung und Drillung in jedem der einzelnen Querschnitte untersucht. Diesen Grössen entsprechen bei der Bewegung die Winkelgeschwindigkeiten um die drei Hauptträgheitsachsen des Körpers durch den Schwerpunkt. Wie sich nun aus den letzteren nach Poinso't zwei Kegel construiren lassen, durch deren successives Abrollen ein deutliches Bild für die Drehung gewonnen wird, so können aus den Grössen der Biegung und Drillung zwei windschiefe Flächen erzeugt werden, durch deren successives Aufeinanderbiegen die Ueberführung des geraden und ungedrillten elastischen Stabes in seinen gebogenen und gedrillten Gleichgewichtszustand versinnlicht wird. Alle Ausführungen über Winkelgeschwindigkeiten bezw. die Poinso't'schen Kegel sind übertragbar auf die Deformationsgrössen der Biegung und Drillung bezw. die windschiefen Flächen. Dagegen können Fragen, welche sich auf die Form des gebogenen Stabes beziehen, durch die Betrachtung des Rotationsproblems nicht beantwortet werden. Mit diesen, insbesondere mit der Aufstellung der Gleichungen der gebogenen elastischen Centrallinie, mit den verschiedenen Typen der letzteren und mit speciellen Fällen des Problems befasst sich die zweite Hälfte der Abhandlung.

Die Resultate der Untersuchung finden sich bei den einzelnen Paragraphen genauer besprochen. Hervorgehoben mag nur noch werden, dass das vorliegende Problem der Biegung und Drillung eines elastischen Stabes sowohl für den allgemeinen Fall als für Specialfälle viel ausgedehnter ist als jenes der Bewegung — hauptsächlich aus dem Grunde, weil die zwei Widerstände des Stabes gegen Biegung von dem Widerstande gegen Drillung individuell ebenso verschieden sind, wie Biegung und Drillung selbst, während die 3 Hauptträgheitsmomente des Körpers, welchen diese Deformationswiderstände entsprechen, Grössen derselben

^{*)} Sur la rotation d'un corps. Op. II. 139—197.

^{**)} Théorie nouvelle de la rotation des corps. Liouv. J. 1851. 9—129, 239—336.

^{***}) Das Rollen einer Fläche 2. Grades auf einer invariablen Ebene. München 1880 oder Progr. der Kreisrealsch. München 1881.

Art sind. Während es für die letzteren genügt, eine einzige Anordnung hinsichtlich ihrer Grösse zu treffen, sind bei dem vorliegenden Problem die 3 Möglichkeiten zu unterscheiden, dass der Widerstand gegen Drillung unter den 3 Widerständen der numerisch kleinste, mittelste oder grösste ist.

Fixirung des Problems.

1.

Wir denken uns einen geraden und ungedrillten elastischen Stab, dessen Querschnitt im Vergleich zur Länge L des Stabes sehr dünn (unendlich dünn) ist — einen *Draht* — halten das eine Ende fest und lassen auf den Querschnitt des freien Endes ein Kräftepaar von der Intensität l einwirken, dessen Axe eine beliebige Richtung besitzt. Dann wird die gerade elastische Centrallinie oder die Axe des Stabes, d. i. die Verbindungslinie der Massenmittelpunkte der einzelnen Querschnitte, in eine Curve gebogen und gleichzeitig der Querschnitt jedes Punktes P der Centrallinie um die Tangente der letzteren in P gedreht — der Stab erscheint gebogen und gedreht.

Wählt man die Tangente zur Axe Z' , die Hauptträgheitsaxen des Querschnittes zu Axen X' , Y' , so bilden $X'Y'Z'$ das rechth. Coordinatensystem der 3 *Hauptaxen* des Stabes. Nach diesen können die Widerstände wirkend gedacht werden, welche der Stab der beabsichtigten Deformation entgegensetzt, nach X' , Y' die Hauptwiderstände gegen *Biegung*, nach Z' der Hauptwiderstand gegen *Drillung*.

Vor der Einwirkung des Kräftepaars l werden die Axen Z' alle in die gerade Stabaxe fallen, die Axen X' , Y' unter sich parallel sein. Nach der Deformation werden die Lagen der 3 Hauptaxen, je nach der Bogenentfernung s ihres Anfangspunktes P vom freien Endquerschnitt, andere und andere werden, also abhängig von s sein. Dieselben sind bekannt, sobald ihre Neigungscosinus

$$a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''$$

gegen die 3 festen Coordinatenaxen

$$X; Y; Z$$

eines mit $X'Y'Z'$ congruenten Systems in Functionen von s vorliegen.

Nun führt die Bestimmung der a, b, c nach Kirchhoff zunächst auf dieselben Gleichungen, wie sie bei der Rotation eines starren Körpers um seinen Schwerpunkt O auftreten, nämlich auf die Euler'schen Gleichungen*):

*) Wir entnehmen dieselben dem Buche von Clebsch: Theorie der Elastic. fest. Körp. 1862. 211. Abgesehen von anderer Bezeichnung der Grössen A, B, C ;

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & A \cdot \frac{dp}{ds} + (B - C)qr = 0, \\
 & B \cdot \frac{dq}{ds} + (C - A)rp = 0, \\
 & C \cdot \frac{dr}{ds} + (A - B)pq = 0.
 \end{aligned}$$

Es entsprechen hierbei

den 3 Hauptträgheitsachsen X', Y', Z' durch den Schwerpunkt O des rotirenden Körpers

den Hauptträgheitsmomenten A, B, C des Körpers um X', Y', Z'

dem zur Bewegung anregenden Kräftepaar l

der Fortschreitung ds in der Zeit s (s gerechnet von der Anfangszeit $s_0 = 0$ an)

den Winkelgeschwindigkeitscomponenten p, q, r um die 3 Hauptachsen X', Y', Z' zur Zeit s

den Componenten Ap, Bq, Cr des momentan anregenden Kräftepaars um X', Y', Z' , welche gerade geeignet sind, die Winkelgeschwindigkeiten p, q, r um diese Axen hervorzubringen

die 3 Hauptachsen X', Y' (gegen Biegung) und Z' (gegen Drillung) durch einen Punkt P der elastischen Centrallinie des Stabes;

die *Hauptwiderstandsmomente* A, B und C des Stabes gegen Biegung um X', Y' und gegen Drillung um Z' ;

das auf den freien Endquerschnitt einwirkende Kräftepaar l ;

die Fortschreitung ds auf dem Bogen s der Centrallinie (s gerechnet vom freien Ende $s_0 = 0$ an);

die *Krümmungscomponenten**) p, q der Biegung um X', Y' und r der Drillung um Z' für die Bogenentfernung s ;

die Componenten Ap, Bq, Cr des in einem Punkt P der elast. Centrallinie durch das afficirende Paar l hervorgerufenen Kräftepaars, welches, die *Spannung* in diesem Punkte anzeigend, gerade geeignet ist, die Krümmungscomponenten p, q, r daselbst zu erzeugen.

Aus der Analogie zwischen den Componenten der Drehgeschwindigkeit und der Krümmung folgt, dass die letzteren Componenten ganz ebenso zusammengesetzt und zerlegt werden dürfen wie die ersteren. Es bedeuten daher, je nach dem vorliegenden Problem:

p, q, r unterscheiden sich unsere Formeln von denen Clebsch's dadurch, dass wir ds statt $-ds$ zu setzen haben, da wir den Bogen s vom freien Ende an zählen, während Cl. denselben vom festen Ende ab rechnet. Die Kräftepaare sind rechts drehend zu denken.

*) „Krümmung“ steht hier für „Deformation“; der in der Curventheorie übliche Begriff „Krümmung“ ist durch „Biegung“ ersetzt. Cf. Thomson u. Tait, Handbuch der theor. Physik, Nr. 593 u. ff. 1874.

$\Theta = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ die Grösse der Winkelgeschwindigkeit zur Zeit s längs der instantanen Drehungsaxe Θ ,

$l = \sqrt{A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2}$ die Grösse des zur Zeit s anregenden Kräftepaars längs der instantanen Kräftepaaraxe l ,

$\Theta' = \sqrt{p^2 + q^2}$ die Componente der instantanen Winkelgeschwindigkeit Θ bezüglich der Hauptebene $X'Y'$ zur Zeit s ,

$\Theta = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ die Grösse der Krümmung d. i. der gesammten Deformation in einem Punkte von der Bogenentfernung s längs der instantanen Krümmungsaxe Θ ;

$l = \sqrt{A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2}$ die Grösse der in der Bogenentfernung s entstehenden Spannung längs der instantanen Spannungsaxe l ;

$\Theta' = \sqrt{p^2 + q^2}$ die Componente der instantanen Krümmung Θ bezüglich der Querschnittsebene $X'Y'$ d. i. die Grösse reiner Biegung für die Entfernung s .

Hat man die Euler'schen Differentialgleichungen gelöst, so dienen die Relationen

$$(2) \quad da = (br - cq) \cdot ds, \quad da' = (b'r - c'q) \cdot ds, \\ da'' = (b''r - c''q) \cdot ds \quad \text{u. s. w.}$$

zur Bestimmung der 9 Neigungscosinus $a, b, c, \dots, c''$. Die letzteren hängen übrigens durch die der orthogonalen Substitution entspringenden Bedingungen zusammen:

$$(3) \quad a = b'c'' - b''c', \quad a' = b''c - b'c'', \quad a'' = bc' - b'c \quad \text{u. s. w.}$$

Die Tangente Z' eines Punktes P der elastischen Centrallinie bildet mit den festen Coordinatenaxen X, Y, Z Winkel, deren Cosinus bezw. c, c', c'' sind. Für die Coordinaten x, y, z des Punktes P bezüglich dieses Systems hat man also die Differentialgleichungen

$$(4) \quad dx = c \cdot ds, \quad dy = c' \cdot ds, \quad dz = c'' \cdot ds.$$

Integriert man dieselben, so erhält man die Coordinaten x, y, z in Functionen von s d. h. die Gleichungen der gebogenen Centrallinie. Sind aber für einen Punkt P der letzteren die Grössen p, q, r der Biegung und Drillung bekannt, sind ferner die Lagen der 3 durch ihn gehenden Hauptaxen X', Y', Z' gegen ein festes Coordinatensystem X, Y, Z gegeben und ist überdies jede Coordinate von P bezüglich dieses Systems durch s ausgedrückt, so ist der Gleichgewichtszustand des elastischen Stabes im Wesentlichen als bekannt zu betrachten.

Krümmungsverhältnisse der einzelnen Querschnitte.

2.

Aus den Euler'schen Gleichungen lassen sich durch Multiplication mit Ap, Bq, Cr ; a, b, c ; $a' \dots c''$ und jedesmalige Addition

unter Berücksichtigung der Relationen (2) folgende Integralgleichungen ableiten:

$$(5) \quad A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = \text{const.} = l^2.$$

$$(6) \quad \begin{cases} A p a + B q b + C r c = \text{const.} = l_1, \\ A p a' + B q b' + C r c' = \text{const.} = l_2, \\ A p a'' + B q b'' + C r c'' = \text{const.} = l_3 = \sqrt{l^2 - l_1^2 - l_2^2}. \end{cases}$$

Dieselben ergeben für die Rotation den Satz: „Das den Körper angreifende Kräftepaar l bleibt während der ganzen Dauer der Bewegung nach Intensität und Stellung constant. Die Ebene desselben ist eine invariable Ebene, die Axe eine invariable Axe des Raumes.“ Dieser Satz lautet, auf den Stab übertragen:

Die in jedem Querschnitt vermöge der Einwirkung des den freien Endquerschnitt angreifenden Kräftepaares l zu Tage tretende Spannung ist repräsentirt durch ein Kräftepaar, welches mit l constante Grösse und Stellung besitzt. Die Ebene und Axe des letzteren besitzen also im Raume invariable Stellung und Richtung.

Multipliziert man die Euler'schen Gleichungen mit p , q , r und addirt, so wird

$$(7) \quad A p^2 + B q^2 + C r^2 = \text{const.} = h,$$

was auch geschrieben werden kann

$$(8) \quad \Theta \cdot \cos(\Theta l) = \text{const.} = \frac{h}{l}.$$

Dies heisst für das Rotationsproblem: „Die Componenten der instantanen Drehgeschwindigkeit Θ längs der invariablen Axe des anregenden Kräftepaares l bleibt für die ganze Dauer der Bewegung constant.“ Direct übertragen ergibt sich:

Die Componente der Krümmung Θ eines Querschnittes auf die invariable Richtung der Spannung l in demselben ist für alle Querschnitte constant.

Hieraus darf natürlich nicht geschlossen werden, dass die Projection der elastischen Centrallinie auf die zur Axe l senkrecht stehende invariable Ebene ein Kreis sei. Denn die um l wirkend gedachte Krümmungscomponente $\frac{h}{l}$ setzt sich zusammen aus Biegung und Drillung, ist also nicht eine Grösse reiner Biegung. Da die Biegungsaxen für einen Punkt der Centrallinie stets in den Querschnitt fallen, so können Biegungen auch nur um Axen, welche in der Querschnittsebene gezogen werden, also auf dem Bogenelement ds senkrecht stehen, nach der Methode der Projection zusammengesetzt und zerlegt werden. Will man die Grösse reiner Biegung wissen, welche längs einer beliebigen Geraden zum Vorschein kommt, so genügt eine einfache Multiplication mit dem Cosinus des Neigungswinkels nicht,

sondern es sind successive die zwei leicht nachweisbaren Sätze¹ anzuwenden: „Die Biegung der Projection einer Raumcurve auf eine Ebene, welche mit der Schmiegungeebene den Winkel α einschliesst, ist gleich der Biegung der Raumcurve, multiplicirt mit $\cos \alpha$ oder $\sec^2 \alpha$, je nachdem die Ebene dem Bogenelement ds oder der Hauptnormale im betrachteten Curvenpunkte parallel ist.“

Fasst man die Grössen p, q, r der mit der Zeit s veränderlichen Winkelgeschwindigkeit des rotirenden Körpers als Coordinaten eines Punktes P bezüglich der 3 Hauptaxen X', Y', Z' auf, indem man eben vom Schwerpunkt O aus auf jeder instantanen Drehungsaxe die Winkelgeschwindigkeit Θ der Drehung als Strecke aufträgt, so repräsentiren die Gleichungen (5) und (7) zwei Ellipsoide, von denen das letztere das Poinso't'sche *Centralellipsoid* ist. Die Axen desselben sind identisch mit den 3 Hauptträgheitsaxen, ihre Längen proportional den Quadratwurzeln aus den Hauptträgheitsmomenten A, B, C . Die durch das Zusammenbestehen vorgenannter Gleichungen definirte Raumcurve 4. Ordnung ist die Poinso't'sche *Polodie* und der sich ergebende Kegel zweiten Grades

$$(9) \quad Ap^2(Ah - l^2) + Bq^2(Bh - l^2) + Cr^2(Ch - l^2) = 0$$

der Kegel der Polodie.

Construirt man ganz ebenso aus den mit dem Bogen s veränderlichen Krümmungscomponenten p, q, r die augenblickliche Krümmungsaxe Θ , so sind alle diese Axen den Erzeugenden eines Kegels 2. Grades (9) parallel und bilden in ihrer Gesamtheit eine windschiefe Fläche, diejenige der Polodie*). Trägt man auf jeder Axe Θ die Grösse der Krümmung Θ vom Punkte P der Centrallinie aus als Strecke auf, so liegen die Endpunkte aller solcher Strecken auf einer transcendenten Curve, der Polodie*). Näheres hierüber s. Paragraph 5.

3.

Der Poinso't'sche Kegel (9) der Polodie ist immer reell, es können also die 3 in seiner Gleichung auftretenden Differenzen nicht alle das gleiche Vorzeichen besitzen. Setzen wir $A > B > C$ voraus, was wegen der Gleichartigkeit der Trägheitsmomente erlaubt ist, so folgt also:

$$Ah - l^2 > 0, \quad Ch - l^2 < 0, \quad Bh - l^2 \geq 0,$$

d. h.: „Der Kegel der Polodie ist niemals um die Axe des mittleren Trägheitsmomentes beschrieben, sondern lediglich um jene des grössten oder kleinsten Momentes.“

Für den Stab darf nicht willkürlich $A > B > C$ angenommen werden, weil der Widerstand des Stabes gegen Drillung von anderen

¹) Unter Beibehaltung der Bezeichnungen Poinso't's.

Einflüssen abhängig ist als einer der Widerstände gegen Biegung*). Es muss also unterschieden werden, ob der erstere unter den 3 Hauptwiderständen überhaupt der kleinste, mittelste oder grösste ist. Wir setzen deshalb nach einander

$$A > B > C; \quad B > C > A; \quad C > A > B.$$

Für die erste Festsetzung ergibt sich dann, da auch hier der Kegel (9) stets reell ist, wie oben

$$Ah - l^2 > 0, \quad Ch - l^2 < 0, \quad Bh - l^2 \geq 0,$$

und analog für die beiden andern Annahmen. Dies bedeutet:

„Der Kegel 2. Grades, dessen Erzeugenden die für die Ruhelage des Stabes verzeichneten Krümmungsaxen parallel sind, scheint niemals um die Axe des numerisch mittleren der 3 Hauptwiderstände beschrieben, sondern lediglich um jene des grössten oder kleinsten Widerstandes“.

Construirt man, wie aus p, q, r die instantane Drehungsaxe Θ , so aus den Componenten Ap, Bq, Cr die Axe des momentan wirkenden Kräftepaars l bezüglich des ruhend angenommenen Körpers, so erhält man wieder einen Kegel 2. Grades, den Kegel der Kräftepaaraxen. Derselbe ist wieder nur um die Hauptaxe grössten oder kleinsten Trägheitsmomentes beschrieben, weshalb man passend die Anfangslage der Axe des anregenden Paares in derjenigen Hauptebene des Centralellipsoids annimmt, welche von den Hauptaxen grössten und kleinsten Momentes gebildet wird. Die Anfangslage der instantanen Drehungsaxe fällt dann in dieselbe Ebene.

Construirt man aus den Spannungscomponenten Ap, Bq, Cr für jeden Punkt P der undeformirten elastischen Centrallinie des Stabes die Axe der auftretenden Spannung l , so sind dieselben wieder den Erzeugenden eines Kegels 2. Grades parallel und bilden in ihrer Gesamtheit wieder eine windschiefe Fläche, die windschiefe Fläche der Kräftepaaraxen. Da der erwähnte Kegel stets um die Hauptaxe des grössten oder kleinsten Hauptwiderstandes beschrieben ist, so wird die Axe des auf den freien Endquerschnitt einwirkenden Kräftepaares l am Besten in der von diesen 2 Hauptaxen gebildeten Ebene angenommen. Dieselbe fällt beispielsweise in den freien Querschnitt, wenn der Widerstand gegen Torsion der numerisch mittelste unter den 3 Widerständen ist.

Die bei der Festsetzung der Grössenordnung $A > B > C$ sich ergebenden Ungleichungen

$$Ah - l^2 > 0, \quad Ch - l^2 < 0, \quad Bh - l^2 \geq 0$$

gaben Aufschluss über die Lage der Kegel 2. Ordnung, deren Erzeugenden von den instantanen Drehungsaxen gebildet wurden resp.

*) Clebsch a. a. O. p. 196.

den instantanen Krümmungsaxen parallel waren. Dieselben können nun auch anders ausgelegt werden; sie bedeuten für die Rotation: „Der Abstand der invariablen Ebene vom Mittelpunkte des Central-ellipsoids kann niemals grösser sein als die grösste, niemals kleiner als die kleinste Halbxaxe des Ellipsoids, wohl aber grösser oder kleiner als die mittlere Halbxaxe.“ Eine ähnliche Deutung könnte auch für das Problem des Stabes acceptirt werden, indem man für einen Punkt P der elastischen Centrallinie das dem Centralellipsoid entsprechende Ellipsoid (7) verzeichnet. Man kann jedoch die Ungleichungen in einem dem Wesen des elastischen Stabes mehr angepassten Sinne erklären, indem man statt $Ah - l^2 > 0$ u. s. w. schreibt:

$$\frac{Ap}{l} > \frac{p}{h} \text{ u. s. w., oder auch } \frac{h}{l} \cdot \frac{Ap}{l} > p \text{ u. s. w.}$$

Unter Berücksichtigung der Relation (8) folgen daraus die beiden Sätze:

Das Verhältniss der Spannungscomponente längs der Hauptaxe grössten; kleinsten; mittelsten Widerstandes zur unveränderlichen Spannung l längs der Kräftepaaraxe ist für alle Punkte grösser; kleiner; grösser oder kleiner als das Verhältniss der nach denselben Axen geschätzten Krümmungsantheile. — Die Projection der in der invariablen Richtung der Spannungsaxen auftretenden constanten Krümmung $\frac{h}{l}$ auf die Axe grössten; kleinsten; mittelsten Widerstandes ist grösser; kleiner; grösser oder kleiner als die daselbst zum Vorschein kommende Krümmungscomponente.

Da für $Bh - l^2 > 0$ der Kegel der instantanen Drehungsaxen um die Axe Z' des Hauptträgheitsmomentes C , für $Bh - l^2 < 0$ um die Axe X' des Momentes A beschrieben erscheint, so kann im ersteren Falle die Componente r , im letzteren p niemals 0 werden. Es müssen also, da die Euler'schen Gleichungen p, q, r als mit $\sin u, \cos u, \Delta$ am u proportional erscheinen lassen ($u = n \cdot s$, n constant), in diesen Fällen r bzw. p proportional mit Δ am u sein. Da überdies die gewählte Anfangslage der Kräftepaaraxe in die Ebene $X'Z'$ fällt, ist $Bq_0 = 0$, also $q_0 = 0$ d. h. q proportional $\sin u$, und zwar für beide Fälle $Bh - l^2 \gtrless 0$. Durch Einsetzen der elliptischen Functionen in die Gleichungen (1), (5) und (7) folgen für p, q, r leicht die Werthe, welche sich in der Jacobi'schen Arbeit „sur la rotation“ vorfinden. Jacobi begreift übrigens die zwei Unterscheidungen $Bh - l^2 \gtrless 0$ in eine einzige, indem er für $Bh - l^2 > 0$ die Reihenfolge $A > B > C$, für $Bh - l^2 < 0$ $A < B < C$ annimmt. Damit sind freilich zwei verschiedene Centralellipsoide bestimmt; will man bei der Annahme $A > B > C$, also bei dem einmal gewählten Centralellipsoid bleiben, so müssen beim Uebergang

von $Bh - l^2 > 0$ auf $Bh - l^2 < 0$ in den Jacobi'schen Formeln p und r , A und C , X' und Z' vertauscht werden.

Da für das Problem des Stabes ganz dieselben Erwägungen bezüglich des Kegels Platz greifen, dessen Erzeugende den instantanen Krümmungsaxen parallel sind, so brauchen die Jacobi'schen Ausdrücke von p, q, r für $A > B > C$ nur abgeschrieben zu werden. Durch cyclische Vertauschung der Grössen A, B, C und p, q, r erhält man die Formeln für $B > C > A$, $C > A > B$. Wählen wir die Axe des den freien Querschnitt $s = 0$ angreifenden Kräftepaares in dem von den positiven Hälften der Hauptaxen grössten und kleinsten Widerstandes gebildeten Quadranten, was übrigens mit der bei der Drehung von Jacobi gewählten Anfangslage nicht übereinstimmt, so werden p, q, r ausgedrückt, wie folgt:

I. $A > B > C$. 1. $Bh - l^2 > 0$.

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{\frac{l^2 - Ch}{A(A-C)}} \cdot \cos \operatorname{am} u = \frac{l}{A} \sin \varphi_0 \cdot \cos \operatorname{am} u, \\ q &= \sqrt{\frac{l^2 - Ch}{B(B-C)}} \cdot \sin \operatorname{am} u = \frac{l}{A} \cdot \sqrt{\frac{A(A-C)}{B(B-C)}} \sin \varphi_0 \cdot \sin \operatorname{am} u, \\ r &= \sqrt{\frac{Ah - l^2}{C(A-C)}} \cdot \Delta \operatorname{am} u = \frac{l}{C} \cos \varphi_0 \cdot \Delta \operatorname{am} u. \end{aligned}$$

2. $Bh - l^2 < 0$.

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{\frac{l^2 - Ch}{A(A-C)}} \cdot \Delta \operatorname{am} u = \frac{l}{A} \sin \varphi_0 \cdot \Delta \operatorname{am} u, \\ q &= \sqrt{\frac{Ah - l^2}{B(A-B)}} \cdot \sin \operatorname{am} u = \frac{l}{C} \cdot \sqrt{\frac{C(A-C)}{B(A-B)}} \cos \varphi_0 \cdot \sin \operatorname{am} u, \\ r &= \sqrt{\frac{Ah - l^2}{C(A-C)}} \cdot \cos \operatorname{am} u = \frac{l}{C} \cos \varphi_0 \cdot \cos \operatorname{am} u. \end{aligned}$$

II. $B > C > A$. 1. $Ch - l^2 > 0$.

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{\frac{Bh - l^2}{A(B-A)}} \cdot \Delta \operatorname{am} u = \frac{l}{A} \cos \varphi_0 \cdot \Delta \operatorname{am} u, \\ q &= \sqrt{\frac{l^2 - Ah}{B(B-A)}} \cdot \cos \operatorname{am} u = \frac{l}{B} \sin \varphi_0 \cdot \cos \operatorname{am} u, \\ r &= \sqrt{\frac{l^2 - Ah}{C(C-A)}} \cdot \sin \operatorname{am} u = \frac{l}{B} \cdot \sqrt{\frac{B(B-A)}{C(C-A)}} \sin \varphi_0 \cdot \sin \operatorname{am} u. \end{aligned}$$

(10)

2. $Ch - l^2 < 0$.

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{\frac{Bh - l^2}{A(B-A)}} \cdot \cos \operatorname{am} u = \frac{l}{A} \cos \varphi_0 \cdot \cos \operatorname{am} u, \\ q &= \sqrt{\frac{l^2 - Ah}{B(B-A)}} \cdot \Delta \operatorname{am} u = \frac{l}{B} \sin \varphi_0 \cdot \Delta \operatorname{am} u, \\ r &= \sqrt{\frac{Bh - l^2}{C(B-C)}} \cdot \sin \operatorname{am} u = \frac{l}{A} \cdot \sqrt{\frac{A(B-A)}{C(B-C)}} \cos \varphi_0 \cdot \sin \operatorname{am} u. \end{aligned}$$

III. $C > A > B$. 1. $Ah - l^2 > 0$.

$$p = \sqrt{\frac{l^2 - Bh}{A(A-B)}} \cdot \sin \operatorname{am} u = \frac{l}{C} \cdot \sqrt{\frac{C(C-B)}{A(A-B)}} \sin \varphi_0 \cdot \sin \operatorname{am} u,$$

$$q = \sqrt{\frac{Ch - l^2}{B(C-B)}} \cdot \Delta \operatorname{am} u = \frac{l}{B} \cos \varphi_0 \cdot \Delta \operatorname{am} u,$$

$$r = \sqrt{\frac{l^2 - Bh}{C(C-B)}} \cdot \cos \operatorname{am} u = \frac{l}{C} \sin \varphi_0 \cdot \cos \operatorname{am} u.$$

2. $Ah - l^2 > 0$.

$$p = \sqrt{\frac{Ch - l^2}{A(C-A)}} \cdot \sin \operatorname{am} u = \frac{l}{B} \cdot \sqrt{\frac{B(C-B)}{A(C-A)}} \cos \varphi_0 \cdot \sin \operatorname{am} u,$$

$$q = \sqrt{\frac{Ch - l^2}{B(C-B)}} \cdot \cos \operatorname{am} u = \frac{l}{B} \cos \varphi_0 \cdot \cos \operatorname{am} u,$$

$$r = \sqrt{\frac{l^2 - Bh}{C(C-A)}} \cdot \Delta \operatorname{am} u = \frac{l}{C} \sin \varphi_0 \cdot \Delta \operatorname{am} u.$$

Der Modul κ und die Constante n in $u = n \cdot s$ sind für

I. $A > B > C$. 1. $Bh - l^2 > 0$.

$$\kappa = \sqrt{\frac{(A-B)(l^2 - Ch)}{(B-C)(Ah - l^2)}} = \sqrt{\frac{C(A-B)}{A(B-C)}} \operatorname{tg} \varphi_0,$$

$$n = \sqrt{\frac{(B-C)(Ah - l^2)}{ABC}} = \frac{1}{C} \cdot \sqrt{\frac{(B-C)(A-C)}{AB}} \cos \varphi_0.$$

2. $Bh - l^2 < 0$.

$$\kappa = \sqrt{\frac{(B-C)(Ah - l^2)}{(A-B)(l^2 - Ch)}} = \sqrt{\frac{A(B-C)}{C(A-B)}} \operatorname{cotg} \varphi_0,$$

$$n = \sqrt{\frac{(A-B)(l^2 - Ch)}{ABC}} = \frac{1}{A} \cdot \sqrt{\frac{(A-B)(B-C)}{BC}} \sin \varphi_0.$$

Hierin bedeutet φ_0 den Winkel, welchen die Axe des angreifenden Paares, die ja in die Ebene aus den Hauptaxen grössten und kleinsten Widerstandes fällt, mit der Hauptaxe kleinsten Widerstandes bildet. Für $A > B > C$ und $Bh - l^2 > 0$ werden dann im freien Endquerschnitt $Bq_0 = 0$, $Ap_0 = l \cdot \sin \varphi_0$, $Cr_0 = l \cdot \cos \varphi_0$ und zufolge der Gleichungen (5), (7)

$$Ah - l^2 = \frac{l^2}{C} (A - C) \cdot \cos^2 \varphi_0, \quad l^2 - Ch = \frac{l^2}{A} (A - C) \cdot \sin^2 \varphi_0.$$

Neunt man allgemein die Winkel der Kräftepaaraxe mit den 3 Hauptaxen X' , Y' , Z' bezw. μ , ν , φ , so kann, da aus (5), (7)

$$Bh - l^2 = Ap_0^2 (A - B) - Cr_0^2 (B - C) = \cos^2 \mu \cdot \frac{A - B}{A} - \cos^2 \varphi \cdot \frac{B - C}{C}$$

folgt, statt

$$Bh - l^2 \gtrless 0$$

geschrieben werden

$$\frac{\cos \mu}{\cos \varrho} \geq \sqrt{\frac{A(B-C)}{C(A-B)}}.$$

Es entscheidet also über den Fall, ob $Bh - l^2 \geq 0$ sei, die Richtung der Kräftepaaraxe. *Ist dieselbe in einer derjenigen 2 Ebenen gelegen, welche, durch die Hauptaxe Y' mittlerer Biegung gehend, die Gleichung*

$$\frac{x'}{y'} = \pm \sqrt{\frac{A(B-C)}{C(A-B)}}$$

besitzen, so ist $Bh - l^2 = 0$ und es tritt ein Specialfall ein (s. § 10). Für die 5 andern Festsetzungen gelten die gleichen Ueberlegungen.

4.

Aus den Gleichungen für p , q , r folgt zunächst, dass letztere im Allgemeinen periodisch sind mit der Periode $4K$ von u , bis auf das Vorzeichen jedoch auch für u und $2K \pm u$ gleiche Werthe annehmen, so dass die absoluten Grössen der Biegung und Drillung nur berechnet zu werden brauchen für ein Stabstück, dessen Länge durch die Parameterwerte u und K festgelegt, also $\frac{K}{n}$ ist. Je nach der Wahl einer der obigen 6 Festsetzungen ergeben sich für die Krümmung des elastischen Stabes verschiedene Eigenthümlichkeiten. Die Art und Weise ihrer Aenderung ersieht man in leicht verständlicher Abkürzung aus folgenden Tabellen, welche für $A > B > C$, $Bh - l^2 > 0$ und $Bh - l^2 < 0$ aufgestellt werden können:

	$u=0$	$<K$	$=K$	$<2K$	$=2K$	$<3K$	$=3K$	$<4K$	$=4K$
1.	$+p_{\max}$	$+p$	0	$-p$	$-p_{\max}$	$-p$	0	$+p$	$+p_{\max}$
	0	$+q$	$+q_{\max}$	$+q$	0	$-q$	$-q_{\max}$	$-q$	0
	$+r_{\max}$	$+r$	$+r_{\min}$	$+r$	$+r_{\max}$	$+r$	$+r_{\min}$	$+r$	$+r_{\max}$
2.	$+p_{\max}$	$+p$	$+p_{\min}$	$+p$	$+p_{\max}$	$+p$	$+p_{\min}$	$+p$	$+p_{\max}$
	0	$+q$	$+q_{\max}$	$+q$	0	$-q$	$-q_{\max}$	$-q$	0
	$+r_{\max}$	$+r$	0	$-r$	$-r_{\max}$	$-r$	0	$+r$	$+r_{\max}$

Aehnliche Tabellen gelten für die andern 4 Unterscheidungsfälle. Dieselben lassen erkennen:

„Ist der Widerstand des Stabes gegen Torsion unter den 3 Hauptwiderständen der mittelste (II), so kann die Drillung des Stabes nicht fortwährend im nämlichen Sinne erfolgt sein, sondern es existiren nothwendig Querschnitte, zu deren beiden Seiten der Stab im entgegengesetzten Sinne tortirt erscheint. Diese Querschnitte selbst haben keine Drehung in ihrer Ebene erfahren und für alle Querschnitte,

welche von ihnen nach links oder rechts gleichweit entfernt liegen, ist die absolute Grösse der Drillung die gleiche.“ — „Ist der Widerstand gegen Torsion unter den 3 Hauptwiderständen der kleinste (I) oder grösste (III), so kann in einem der beiden Unterfälle (I, 1 und III, 2*) der Sinn der Torsion niemals wechseln: sämtliche Querschnitte des Stabes erscheinen im nämlichen Sinne verdreht und es wechselt die Grösse der Torsion zwischen einem Minimum und einem Maximum. In den anderen Unterfällen (I, 2 und III, 1) wechselt dagegen die Richtung der Drillung wieder.“

Ähnliche Sätze ergeben sich für jede Biegungscomponente. Ist ein Widerstand gegen Biegung unter den 3 Widerständen der numerisch mittelste, so muss der Sinn der Biegung längs der Axe desselben immer durch 0 hindurchwechseln; da, wo die Biegungscomponente 0 wird, ist die Hauptebene aus der kritischen Axe und der Torsionsaxe Schmiegungeebene der elastischen Centrallinie geworden. Ist ein Biegungswiderstand der numerisch kleinste oder grösste Widerstand, so kann wieder in je einem der 2 Unterfälle der Sinn der Biegungscomponente wechseln, im andern nicht.

Was die Intensitäten der Krümmungscomponenten anlangt, so ist die nach der Hauptaxe des grössten oder kleinsten Widerstandes wirkende Componente um so grösser, je kleiner dieser Widerstand ist, je stärker das anregende Kräftepaar und je kleiner die Neigung der Kräftepaaraxe gegen die bespr. Hauptaxe gewählt wird. Diese Sätze gelten dabei, für welchen Unterfall man sich auch entscheidet. Die Componente der Krümmung längs der Hauptaxe mittleren Widerstandes wächst der Intensität nach für die zwei zu unterscheidenden Unterfälle verschieden: für den ersten, wenn das anregende Kräftepaar und die Neigung seiner Axe gegen die Axe kleinsten Widerstandes wächst, wenn die beiden extremen Widerstände grösser und der mittlere kleiner werden — für den zweiten, wenn das anregende Kräftepaar und die Neigung seiner Axe gegen die Axe grössten Widerstandes wächst und wenn die beiden extremen Widerstände kleiner werden. Dagegen wächst die Componente in diesem Unterfalle mit zunehmendem mittleren Widerstand nur dann, wenn dieser grösser als die Hälfte des grössten Widerstandes ist; ist der mittlere Widerstand kleiner als die Hälfte des grössten, so sinkt die Componente bei der Zunahme des mittleren Widerstandes.

Die aus den Krümmungscomponenten p, q, r sich zusammensetzende Gesamtkrümmung $\Theta = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ wird für alle Fälle ein Maximum für das freie Ende und für jene Punkte des Stabes, deren Parameterwerthe u geraden Vielfachen von $2K$ gleich sind, ein

*) Die geom. Bedeutung s. im vorigen Paragraphen.

Minimum für die durch ungerade Vielfache von u bedingten Punkte. Die Intensität derselben vergrößert sich mit zunehmender Stärke des Kräftepaars, mit abnehmender jedes der 3 Widerstände und des Neigungswinkels zwischen der Kräftepaaraxe und der Hauptaxe kleinsten Widerstandes.

Die Grössen $\Theta' = \sqrt{p^2 + q^2}$ reiner Biegung wird in den durch die Parameterwerthe $u = 0, 2K, 4K \dots$ festgelegten Punkten der elast. Centrallinie Maximum, wenn der Drillungswiderstand unter den 3 Widerständen der mittelste, Minimum, sobald er der kleinste ist. Ist der Widerstand gegen Drillung der numerisch stärkste, so tritt Maximum oder Minimum ein, je nachdem derselbe grösser oder kleiner als die Summe der Biegungswiderstände ist. Für $n = K, 3K, 5K \dots$ treten dann bezw. Minima oder Maxima auf. Die Intensität der Biegung wächst im Allgemeinen für eine Vergrößerung der Intensität des anregenden Kräftepaars und für eine Verminderung der 3 Hauptwiderstände; bei zunehmendem Neigungswinkel der Kräftepaaraxe gegen die Axe des kleinsten Widerstandes kann dagegen die Biegungsstärke zu oder abnehmen.

Die Ueberführung des geraden und ungedrillten elastischen Stabes in seine Gleichgewichtslage durch das Aufeinanderbiegen zweier windschiefen Flächen.

5.

Der um seinen Schwerpunkt O rotirende starre Körper drehe sich während eines unendlich kleinen Zeittheilchens ds um die instantane Drehungsaxe $O\Theta$, mit der Winkelgeschwindigkeit Θ_1 , so wird dadurch eine der Axe $O\Theta_1$ benachbarte Axe $O\Theta_2$ in eine Lage $O\vartheta_2$ übergeführt und nunmehr selbst instantane Drehungsaxe. Der Körper rotirt um sie mit der Winkelgeschwindigkeit Θ_2 ; durch die nunmehrige Rotation wird eine Nachbarlage $O\Theta_3$ von $O\Theta_2$ nach $O\vartheta_3$ versetzt, um im nächsten Augenblicke Drehungsaxe zu werden, u. s. f. Es scheint so, als ob der Kegel $O\Theta_1\Theta_2\Theta_3 \dots$ der instantanen Drehaxen, welchen man für den ruhend gedachten Körper aus den Componenten p, q, r construiren kann, auf einem andern festen Kegel $O\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3 \dots$ des Raumes ohne Gleiten abrolle, indem er mit letzterem in jedem Augenblicke eine Erzeugende, die instantane Drehungsaxe, gemein hat. Der Kegel $O\Theta_1\Theta_2\Theta_3 \dots$ ist der bereits in Paragraph 2 erwähnte Poinso't'sche Kegel der Polodie, der Kegel $O\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3 \dots$ ist der Poinso't'sche Kegel der *Herpolodie*. Die Endpunkte $\Theta_1\Theta_2\Theta_3 \dots$ bzw. $\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3 \dots$ der instantanen Drehungsaxen bilden die Curven der Polodie und Herpolodie; von denselben ist die Polodie eine Raumcurve 4. Ordnung, gelegen auf dem Centralellipsoid, die Herpolodie

eine ebene, transcendente Curve ohne Wendepunkte*), gelegen in der invariablen Ebene des angreifenden Kräftepaars.

Denkt man sich für jeden Punkt P der elastischen Centrallinie des geraden und ungedrillten Stabes aus den Krümmungscomponenten p, q, r die instantane Krümmung Θ nach Grösse und Richtung verzeichnet, so giebt die entstandene Linie $P\Theta$ die Axe an, um welche das Bogenelement ds deformiert wird, zugleich auch die Grösse der Deformation. Dreht man nun, vom freien Ende P_1 anfangend, das Bogenelement $\overline{P_1 P_2}$ längs der Krümmungsaxe $P_1 \Theta_1$ um die vorgeschriebene Grösse $\Theta_1 \cdot ds$ (indem man etwa das Bogenelement um die Biegungsgrösse $\Theta_1' \cdot ds$ längs der Axe reiner Biegung und hierauf um die Drillungsgrösse $r_1 \cdot ds$ längs der Stabaxe dreht), hält $\overline{P_1 P_2}$ fest und dreht $\overline{P_2 P_3}$ längs $P_2 \Theta_2$ um $\Theta_2 \cdot ds$, hält wieder $P_2 P_3$ fest und dreht $\overline{P_3 P_4}$ längs $P_3 \Theta_3$ um $\Theta_3 \cdot ds$ u. s. w., so wird durch diese successiven Drehungen die gerade elastische Centrallinie in ihre Gleichgewichtslage übergeführt und jeder Querschnitt in seiner Ebene gedreht. Die Krümmungsaxen $P_1 \Theta_1, P_2 \Theta_2, P_3 \Theta_3, \dots$, welche vorher eine windschiefe Fläche, die in § 2 erwähnte Fläche der Polodie, bildeten, liegen nunmehr auf einer neuen, windschiefen Fläche, deren Leitlinie die gebogene, elastische Centrallinie ist. Wir nennen dieselbe nach dem Poinso't'schen Kegel der Herpolodie die *windschiefe Fläche der Herpolodie*, die von den Endpunkten der instantanen Krümmungsaxen gebildeten transcendenten Curven analog Polodie und Herpolodie. Wir sehen also:

*Die Ueberführung eines geraden und ungedrillten elastischen Stabes, dessen eines Ende von Kräften**) angegriffen wird, in seine Gleichgewichtslage kann versinnlicht werden durch das Aufbiegen einer biegsamen windschiefen Fläche auf eine feste windschiefe Fläche, mit welcher die erstere in jedem Augenblicke eine Erzeugende, die instantane Krümmungsaxe, gemein hat. Die Leitlinien der beiden Flächen sind die gerade und die gebogene elastische Centrallinie des Stabes.*

In unserem Falle der Einwirkung eines blossen Kräftepaars sind die Erzeugenden der windschiefen Fläche parallel den Erzeugenden eines Kegels zweiten Grades, jene der festen windschiefen Fläche parallel den Erzeugenden eines transcendenten Kegels. Die Coordinaten der Polodie für das Rotationsproblem sind bezüglich der drei Hauptträgheitsaxen $O X' Y' Z'$ direct

$$x' = p, \quad y' = q, \quad z' = r,$$

die Gleichungen des Kegels der Polodie

*) Vgl. meine oben citirte Dissertation.

**) Dieser Satz gilt allgemein.

$$x' = \omega \cdot p, \quad y' = \omega \cdot q, \quad z' = \omega \cdot r,$$

worin ω eine willkürliche Constante bedeutet, deren Elimination in Verbindung mit der Elimination von u , durch welche p, q, r laut (10) ausgedrückt sind, wieder die Gleichung des Kegels in der Form (9) erscheinen lässt. Durchläuft ω eine Reihe von Werthen, so erhält man Curven, welche der Polodie ($\omega=1$) ähnlich sind, und deren jede natürlich als Polodie betrachtet werden könnte.

Für den geraden elastischen Stab sind die Gleichungen der Polodie, d. i. der Curve der Endpunkte der instantanen Krümmungsaxen bezüglich des im freien Endquerschnitt festgelegten Systems der Hauptaxen $X' Y' Z'$

$$(12) \quad x' = p, \quad y' = q, \quad z' + s = r.$$

In diese Gleichungen sind $s = \frac{u}{n}$ und die Werthe der Grössen p, q, r aus den Gleichungen (10) einzusetzen. Da die Substitution auf sechsfache Art vollzogen werden kann, so lassen sich also für die Polodie 6 verschiedene Typen aufzählen, die jedoch auf 3 wesentlich verschiedene sich zusammenziehen lassen, dadurch charakterisirt, dass in der Gleichung $z' + s = r$ für die Drillungsgrösse r einmal die Function $\sin$ am u , das anderemal $\cos$ am u , das drittemal Δ am u eingeführt werden kann. Die Gleichungen zeigen:

Die Polodie für den elastischen Stab ist eine transcendente Curve, welche auf einem um die gerade Stabaxe beschriebenen Cylinder zweiten Grades gelegen ist. Die Projection derselben auf die Ebene des Querschnittes $X' Y'$ d. i. das Profil des Cylinders ist eine Vollellipse, sobald der Torsionswiderstand der kleinste oder grösste ist und zugleich der Sinn der Drillung niemals durch 0 hindurch wechselt (I, 1 und III, 2 von (10))); die Projection ist ein Ellipsenbogen, sobald der Torsionswiderstand wieder der kleinste oder grösste ist, aber Querschnitte vorkommen, welche in ihrer Ebene nicht gedreht wurden (I, 3 und III, 1); die Projection ist ein Hyperbelbogen jedesmal, wenn der Torsionswiderstand unter den 3 Hauptwiderständen der mittelste ist (II). Die Projectionen der Polodie auf die zwei andern Hauptebenen $Y' Z'$ und $Z' X'$ sind wellenförmige, nach Art der Sinuslinie verlaufende Curven. Dieselben schneiden entweder die Stabaxe gar nicht [für die Ebene $Y' Z'$ in den Fällen II, 2 und III, 1 Fig. 3] oder sie schneiden die Axe; hiebei können sich sämtliche Wendepunkte auf derselben Seite der Axe [I, 2 und II, 1 Fig. 2] oder auf verschiedenen Seiten der letzteren [I, 1 und III, 2 Fig. 1] befinden.*

Aus den Gleichungen (12) der Polodie können jene der biegsamen

*) Geom. Bedeutung, s. § 3.

windschiefen Fläche oder der Fläche der Polodie leicht durch Hinzunahme eines Proportionalitätsfactors ω abgeleitet werden.

$$(13) \quad x' = \omega \cdot p, \quad y' = \omega \cdot q, \quad z' + \frac{u}{n} = \omega \cdot r.$$

Durch Variirung von ω gewinnt man eine ganze Schaar von Curven, welche der Polodie ähnlich sind, und deren jede als Polodie aufgefasst werden kann. Durch Elimination der Grösse ω und der in p, q, r auftretenden Variabeln u ergibt sich die Gleichung der Fläche transcendent in Cartesischen Coordinaten.

Die Bildung der Gleichung der Herpolodie und ihrer windschiefen Flächen erfordert die Kenntniss der Gleichungen der gebogenen elastischen Centrallinie. Sind die Coordinaten eines Punktes P der letzteren bezüglich des festen Coordinatensystems $X Y Z$ bzw. x, y, z , jene des entsprechenden Herpolodiepunktes d. i. des Endpunktes der in P existirenden Krümmungsaxe Θ bzw. ξ, η, ζ , so sind die Gleichungen der Herpolodie

$$\begin{aligned} \xi - x &= ap + bq + cr, \\ \eta - y &= a'p + b'q + c'r, \\ \zeta - z &= a''p + b''q + c''r = \text{const.} = \frac{h}{l}, \end{aligned}$$

worin $a, b, c, \dots, c''$ die im § 1 erwähnten Neigungscosinus der Coordinatensysteme $X Y Z$ und $X' Y' Z'$ bedeuten. Die Gleichungen der windschiefen Fläche der Herpolodie ergeben sich aus den vorstehenden wieder durch Hinzufügen eines Factors ω . Die in beiden Gleichungssystemen auftretenden Functionen lassen übrigens die ersteren transcendent und derart complicirt erscheinen, welche die wirkliche Aufstellung in Function von u als zwecklos erscheinen lässt.

Die Krümmung des ganzen Stabes.

6.

Um die Gestalt der Curve zu finden, in welche die elastische Centrallinie gebogen wird, erinnern wir uns des Wesens der Krümmungscomponenten p, q, r . Dieselben waren im allgemeinen periodisch mit der Periode $4K$ von u ; es ist also *die gebogene elastische Centrallinie des Stabes eine periodisch verlaufende Curve. Alle Punkte, deren Parameterwerthe sich um Vielfache der Grösse $4K$ unterscheiden, besitzen gleiche Krümmungsverhältnisse, alle durch solche Punkte abgegrenzten Curvenstücke sind congruent.*

Die Grösse der Biegung $\Theta' = \sqrt{p^2 + q^2}$ kann nie 0 werden, ausser wenn $p = q = 0$ ist. Dies tritt aber nach den Gleichungen (1) nur ein, wenn das wirkende Kräftepaar um die Torsionsaxe gedreht hat, und es bleibt dann $p = q = 0$. Sieht man von diesem speciellen Falle,

in welchem die elastische Centrallinie gerade bleibt und also unendlich viele Wendepunkte besitzt, ab, so kann man sagen:

Die gebogene elastische Centrallinie enthält keine Wendepunkte.

Unter den Projectionen derselben ist jene auf die invariable Ebene des Kräftepaars die einfachste. Nehmen wir, um dieselbe zu betrachten, die invariable Richtung der Kräftepaaraxe zur Axe Z , die Kräftepaarebene also zur Ebene XY unseres festen Coordinatensystems, dessen Anfangspunkt im freien Ende liegen mag, so folgt für die Neigungscosinus a'' , b'' , c'' der Hauptaxen X' , Y' , Z' gegen die Axe Z sofort

$$(14) \quad a'' = \frac{Ap}{l}, \quad b'' = \frac{Bq}{l}, \quad c'' = \frac{Cr}{l}.$$

Bildet man die Biegungsgrösse für einen Punkt der Projection der Centrallinie auf die Ebene XY nach den Gesichtspunkten, wie sie im § 2 gelegentlich der Besprechung über Zusammensetzung und Zerlegung von Biegungen aufgeführt sind, so erhält man nach einiger Rechnung

$$(15) \quad \Theta_{xy} = \frac{a''p + b''q}{\sqrt{1 - c''^2}} = l^2 \cdot \frac{h - Cr^2}{\sqrt{l^2 - C^2r^2}};$$

damit die Biegung Θ_{xy} constant wäre, müsste r constant, damit dieselbe 0 wäre, r speciell gleich $\sqrt{\frac{h}{C}}$ sein. Die letztere Annahme führt wieder auf den Fall $p = q = 0$ d. h. den Fall der blossen Torsion. $r = \text{constans}$ setzt $p = 0$, $q = \text{constans}$ oder umgekehrt voraus, was zufolge (1) bei der Gleichheit der zwei Biegungswiderstände A, B für ein beliebig gestelltes Kräftepaar, bei der Ungleichheit derselben aber nur für ein solches erfüllt sein kann, welches sich um eine der Hauptaxen X' , Y' des Querschnitts gedreht hat; der erste Fall repräsentirt die Biegung eines isotropen Stabes in eine Schraubenlinie, der zweite diejenige des allgemeinen Stabes in einen Kreis (s. später). Abgesehen von diesen Specialfällen

kann die Projection der elastischen Centrallinie auf die Ebene des angreifenden Kräftepaars nie ein Kreis werden. Ebensowenig kann dieselbe einzelne Wendepunkte besitzen.

Da Θ_{xy} wegen des Quadrates von r periodisch ist mit der Periode $2K$ von u und eine Untersuchung auf die Unmöglichkeit eines Maximums oder Minimums der Biegung Θ_{xy} zwischen zwei aufeinanderfolgenden Periodenwerthen hinweist, so ist also

die Projection der elastischen Centrallinie auf die invariable Ebene eine in immer demselben Sinne gebogene transcendente Curve, deren durch 2 Periodenwerthe abgegrenzten Stücke congruent sind und an dem einen Ende ein Maximum, an dem andern ein Minimum der Biegung aufweisen. (Fig. 10).

Die Projectionen der Stabcurve auf die andern festen Coordinatenebenen YZ und ZX — und damit auf eine beliebige Ebene des Raumes — kann erst dann untersucht werden, wenn man die Neigungscosinus a, b, c, a', b', c' in u gebildet hat. Es lauten nämlich die Biegungsgrößen Θ_{yz}, Θ_{zx} ganz der Grösse Θ_{xy} entsprechend, indem eben statt a'', b'' die Cosinus a, b bzw. a', b' einzusetzen sind. Dieselben zeigen:

Die elastische Centrallinie kann, ausgenommen die schon erwähnten Fälle der Kreisbiegung und der reinen Torsion, keine ebene Curve werden. Ihre Projectionen auf andere Ebenen als die invariable Kräftepaarebene sind nicht periodisch. Auf einen Kreiscylinder insbesondere kann die elastische Centrallinie nur im Falle der Kreis- resp. Schraubenbiegung aufgeschraubt werden.

7.

Wie unter den Projectionen der gebogenen elastischen Centrallinie jene auf die invariable Ebene XY , so ist unter den Coordinaten eines Punktes P derselben die Coordinate z am einfachsten, welche den Abstand des Punktes von jener Ebene angiebt. Nach (14) ist der Cosinus c'' des Neigungswinkels der Tangente PZ' gegen die Kräftepaaraxe Z ,

$$c'' = \frac{C}{l} \cdot r,$$

proportional der Drillung r , es gelten sonach für denselben alle Erwägungen, welche im § 4 über das Verhalten von r angestellt werden konnten. Insbesondere ist c'' nach (10) sechserlei Werthe fähig, von denen 3 wesentlich verschieden sind; diesen letzteren entsprechend werden für die Coordinate (4)

$$z = \int c'' \cdot ds = \frac{C}{ln} \cdot \int r \cdot du$$

3 verschiedene Formen auftreten, je nachdem eben in r die Functionen $\sin \text{ am } u$, $\cos \text{ am } u$, $\Delta \text{ am } u$ eingehen. Nun ist

$$\int \sin \text{ am } u \cdot du = \frac{1}{\kappa} \ln (\Delta \text{ am } u - \kappa \cdot \cos \text{ am } u),$$

$$\int \cos \text{ am } u \cdot du = \frac{1}{\kappa} \arcsin (\kappa \sin \text{ am } u),$$

$$\int \Delta \text{ am } u \cdot du = \arcsin (\sin \text{ am } u) = \text{am } u.$$

Die zu den rechten Seiten tretenden Integrationsconstanten bestimmen sich durch die specielle Wahl des Coordinatensystems. Bekanntlich wurde die Axe des Kräftepaars in der Ebene der Hauptaxen kleinsten und grössten Widerstandes angenommen. Nennt man dieselbe ein für

allemaal Z^*), die invariable Ebene also XY , und wählt die Y -Axe so, dass dieselbe mit der im freien Endquerschnitt gezogenen Hauptaxe mittleren Widerstandes zusammenfällt, so wird für alle 3 Fälle Congruenz der Coordinatensysteme XYZ und $X'Y'Z'$ erreicht. Ueber die relative Lage derselben geben die folgenden Figuren Aufschluss:

- Die Werthe der Coordinaten z ergeben sich aus folgender Tabelle:
I. $A > B > C$.	1. $Bh - l^2 > 0$,	2. $Bh - l^2 < 0$,
	$G \cdot z = am u$,	$G \cdot z = \arcsin(\kappa \cdot \sin am u)$
II. $B > C > A$.	1. $Ch - l^2 > 0$,	2. $Ch - l^2 < 0$,
(16)	$G \cdot z = ln \frac{\Delta am u - \kappa \cdot \cos am u}{1 - \kappa}$,	$G \cdot z = ln \frac{\Delta am u - \kappa \cdot \cos am u}{1 - \kappa}$
III. $C > A > B$.	1. $Ah - l^2 > 0$,	2. $Ah - l^2 < 0$,
	$G \cdot z = \arcsin(\kappa \cdot \sin am u)$,	$G \cdot z = am u$.

Hiebei ist gesetzt

$$1 : G = C \sqrt{\frac{AB}{\pm (A-C)(B-C)}},$$

worin dasjenige Zeichen des Nenners gewählt werden muss, welches denselben positiv macht.

Wie man sieht, hängen die Ausdrücke für z ganz wesentlich mit dem Verhalten des Drillungswiderstandes C zusammen: ist dieser der numerisch mittelste unter den 3 Widerständen, so ist z logarithmisch, ist derselbe der kleinste oder grösste, dann cyclometrisch ausgedrückt durch die elliptischen Functionen. Diese charakteristische Thatsache ist von entscheidender Wichtigkeit für den Verlauf der elastischen Centrallinie:

*) Man könnte dieselbe wohl entsprechend den Festsetzungen $A > B > C$, $B > C > A$, $C > A > B$ resp. Z , X , Y nennen und hiedurch manche Vereinfachung erzielen; im ganzen aber würde die Betrachtung wohl complicirter werden.

Ist der Widerstand des Stabes gegen Torsion unter den 3 Hauptwiderständen der mittelste, so liegt die spiralförmig gebogene elastische Centrallinie ganz auf der einen Seite der invariablen Ebene des den freien Querschnitt angreifenden Kräftepaars, indem sie die Ebene mit dem freien Ende sowohl als mit jenen Stellen berührt, denen als Parameterwerthe u Vielfache von $4K$ zukommen. Alle Punkte, welche von einem der Berührungspunkte nach links oder rechts gleiche Bogenentfernung besitzen, haben gleichen Abstand von der Ebene. Für $u = 2K, 6K, \dots$ berührt die Curve eine Parallelebene, deren Entfernung von der Kräftepaarebene gleich ist

$$z_{2K} = \frac{1}{G} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x}. \quad (\text{Fig. 8}).$$

Für $u = K, 3K, \dots$ wird

$$z_K = \frac{1}{2} z_{2K}.$$

Ist der Widerstand des Stabes gegen Drillung unter den 3 Hauptwiderständen der kleinste oder grösste, so kann nach § 4 in je einem der 2 für jeden Fall gültigen Unterfälle (nämlich I, 1 und III, 2) der Sinn der Drillung niemals wechseln. Es wächst nun für diese Annahmen die Coordinate z fortwährend, die elastische Centrallinie liegt also ganz auf einer Seite der invariablen Kräftepaarebene und entfernt sich immer weiter von derselben. Zwischen Parallelebenen durch die Punkte mit den Parameterwerthen $2K, 4K, 6K, \dots$ ist der Verlauf der Curve genau derselbe und es ist

$$z_{\mu \cdot K} = \mu \cdot z_K = \frac{1}{G} \cdot \mu \cdot \frac{\pi}{2}. \quad (\text{Fig. 7}).$$

Ist der Widerstand gegen Drillung der kleinste oder grösste und kann der Sinn der Drillung wechseln (I, 2 und III, 1), so ist z wieder periodisch mit u und es schneidet hier die elastische Centrallinie die invariable Kräftepaarebene für $u = 0, 2K, 4K, \dots$, indem sie abwechselnd oberhalb und unterhalb derselben verläuft, in ihrem Laufe zwei Parallelebenen berührend, deren jede von der Kräftepaarebene den Abstand $z_K = \frac{1}{G} \cdot \arcsin x$ besitzt. (Fig. 9).

Was den Proportionalitätsfactor $1 : G$ anlangt, so ist hervorzuheben, dass derselbe, im Gegensatze zu den früher auftretenden ähnlichen Factoren unabhängig ist von h und l und, absolut genommen, für sämtliche 6 Unterscheidungsfälle durch den gleichen Ausdruck sich darstellt. D. h.:

Die relative Stärke $1 : G$, mit welcher sich die elastische Centrallinie über die invariable Kräftepaarebene emporschraubt, ist nicht abhängig von der Intensität und Angriffsrichtung des Paares, sondern einzig von der Grösse der 3 Deformationswiderstände.

Da die Werthe von z_K nur im Falle $B > C > A$ von h und l

abhängen, indem diese in κ eingehen, so ist eine Variirung von z_K in den 2 andern Fällen auf eine solche von $1 : G$ allein zurückzuführen. Es zeigt sich:

„Ist der Widerstand gegen Drillung unter den 3 Hauptwiderständen der kleinste, so steigt die Spirale, in welche die elastische Centrallinie gebogen ist, um so steiler von der Kräftepaarebene aus, je kleiner dieser Widerstand und je grösser die Biegungswiderstände sich zeigen. Ist der Drillungswiderstand der grösste so wächst die Steilheit der Spirale mit der Zunahme dieses Widerstandes und der Abnahme der Widerstände gegen Biegung.“

Ist der Drillungswiderstand der mittelste, so ist der Grad der Steigung der Curve, abgesehen davon, dass in κ die Neigung φ_0 der Kräftepaaraxe gegen die Hauptaxe kleinsten Widerstandes eingeht, wesentlich von Ungleichungen beeinflusst, welche zwischen den Widerständen A, B, C stattfinden.

Es war oben der Abstand z eines Punktes der elastischen Centrallinie von der Ebene des den freien Endquerschnitt angreifenden Paares in der Form $z = \int c' \cdot ds = \frac{C}{I} \cdot \int r \cdot ds$ angegeben worden. Nun ist aber $\int r \cdot ds$ nichts anderes als der gesammte Betrag T der Torsion für ein Stück s des elastischen Stabes, vom freien Ende gerechnet, also

$$(17) \quad T = \frac{I}{C} \cdot z.$$

D. h. diese Gesammttorsion eines Stückes der elastischen Centrallinie von der Längs s , gerechnet vom freien Ende an, wird bis auf eine Constante gemessen durch den Abstand des Endpunktes von der invariablen Ebene des unregenden Kräftepaares.

Insbesondere wächst diese Gesammttorsion fortwährend, sobald die Drillung ihren Sinn nicht ändern kann; dieselbe wird 0, ohne negativ zu werden, sobald die Drillung ihren Sinn ändert und der Drillungswiderstand der mittelste ist, sie wird dagegen durch 0 hindurch auch negativ, sobald die Drillung den Sinn ändern kann und der Drillungswiderstand dabei der kleinste oder grösste ist.

Diese Gesammttorsion eines beliebige begrenzten Stabstückes wird einfach gemessen durch die Differenz der Abstände der Begrenzungspunkte von der invariablen Kräftepaarebene. Dieselbe kann nunmehr auch, wenn der Drillungswiderstand der mittelste ist, 0 werden.

Da diese Sätze über die Gesammttorsion aus dem Verhalten der Drillung r (§ 4) abgeleitet werden können, so verificiren sie den Abstand z resp. die dreierlei Lagen, welche die elastische Centrallinie gegenüber der invariablen Kräftepaarebene annehmen kann.

Die Grösse T ist nichts anderes als der Winkel, um welchen ein Querschnitt gegen den freien Endquerschnitt verdreht würde. Für den Punkt mit dem Parameterwerth K ergibt sich

$$T_K = \frac{l}{C} \cdot z_K.$$

Will man, dass der Querschnitt $u = K$ gegen den Endquerschnitt um einen bestimmten Winkel λ verdreht werde, so resultirt eine Bedingungsgleichung zwischen λ und den Widerständen A, B, C mit oder ohne Einschluss des Winkels φ_0 zwischen der Axe des angreifenden Kräftepaars und der Hauptaxe kleinsten Widerstandes.

8.

Wir bilden nunmehr die Ausdrücke für die Coordinaten x, y eines Punktes P der elastischen Centrallinie bzw. für die Neigungscosinus c, c' der Tangente PZ' gegen die Axen X, Y des festen Coordinatensystems.

Aus den Gleichungen (2) und (3) folgt leicht

$$c' \cdot \frac{dc}{ds} - c \cdot \frac{dc'}{ds} = a''p + b''q.$$

Setzt man aus (14) die Werthe a'', b'' in diese Gleichungen und beachtet die Relation (7), so lässt sich, da die linke Seite auf ein vollständiges Differential ergänzt werden kann, schreiben

$$-c^2 \cdot \frac{d\left(\frac{c'}{c}\right)}{ds} = \frac{1}{l} (Ap^2 + Bq^2).$$

Nun ist doch

$$c^2 + c'^2 = 1 - c'^2 = \frac{1}{l^2} (A^2p^2 + B^2q^2),$$

also darf gesetzt werden

$$c = \frac{1}{l} \cdot \sqrt{A^2p^2 + B^2q^2} \cdot \cos \psi,$$

$$c' = \frac{1}{l} \cdot \sqrt{A^2p^2 + B^2q^2} \cdot \sin \psi.$$

Setzt man diese Werthe in die obige Differentialgleichung ein und schreibt $\frac{u}{n}$ für s , so kommt

$$(18) \quad d\psi = - \frac{l}{n} \cdot \frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2p^2 + B^2q^2} \cdot du.$$

In diese Gleichungen müssen p und q in Functionen von u substituirt werden. Wie bekannt, existiren für p, q im Ganzen 6 verschiedene Werthepaare (10), demnach erhalten wir 6 verschiedene Lösungen. Nun haben wir aber in den vorhergehenden Abschnitten für die elastische Centrallinie als wesentlich hervorgehoben, dass sie Periodici-

tät besitzt, ohne Wendepunkte verläuft und immer doppelt gekrümmt erscheint, und zwar ganz unabhängig von der Grössenordnung der 3 Widerstandsmomente A, B, C . Es wird also die Curve in allen 6 Fällen wesentlich denselben Typus besitzen, und es genügt, da bereits das charakteristische Verhalten von z besprochen ist, für eine einzige Annahme, etwa für

$$A > B > C, \quad Bh - l^2 > 0$$

die Aufstellung der Cosinus c, c' bezw. der Coordinaten x, y zu bewerkstelligen.

Der oben eingeführte Hilfswinkel ψ ist, wie sich leicht zeigt, der Winkel zwischen der Schnittlinie der Querschnittsebene $X'Y'$ eines Punktes P der elastischen Centrallinie und der invariablen Ebene XY einerseits und der festen Y -Axe andererseits. Derselbe ist kein anderer als der Euler'sche Winkel ψ zwischen der Knotenlinie N des um seinen Schwerpunkt O rotirenden starren Körpers und der festen Y -Axe der invariablen Ebenen XY . Es braucht also nur der Werth für ψ aus der Jacobi'schen Arbeit*) übertragen zu werden. Wird

$$\psi = \psi' + n' \cdot u$$

gesetzt, so ergibt sich

$$(19) \quad \psi' = \frac{1}{2i} \cdot \log \frac{\Theta(u + ia)}{\Theta(u - ia)}.$$

Hiebei bedeuten ia und n' Constante, definirt durch die Gleichungen

$$\frac{1}{i} \cdot \sin \operatorname{am} ia = \sqrt{\frac{C(Ah - l^2)}{A}},$$

$$n' = \frac{l}{An} + \frac{\partial}{\partial(ia)} \log \Theta(ia).$$

ψ' ist offenbar der Winkel zwischen der Schnittlinie $X'Y'$, XY und einer neuen Axe der Ebene XY , welche aber nicht, wie Y fest in dieser gelegen ist, sondern mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{n'}{n}$ sich im negativen Sinne darin zu bewegen scheint. Man kann nun ebensogut die Coordinaten des Punktes P der Centrallinie auf das feste Coordinatensystem XYZ beziehen als auch auf ein System, bestehend aus der invariablen Axe Z , der beweglichen Axe (Y) und einer hiezu senkrechten beweglichen Axe (X). Für das letztere System werden die Winkel ψ' periodisch, es wird also bei der Aufsuchung der Projection des Stabpunktes P in der invariablen Ebene wohl am besten verfahren werden, wenn man für den betrachteten Werth von s d. i. von u die Lagen der Geraden (Y) verzeichnet und bezüglich letzterer die rechtwinkligen Coordinaten berechnet. Nach Jacobi**) ergibt

*) Jacobi a. a. O. p. 157–159.

**) a. a. O. p. 162.

sich nun für die Neigungscosinus (c) , (c') der Hauptaxe Z' (hier der Tangente der elastischen Centrallinie) gegen die beweglichen Axen (X) , (Y)

$$(20) \quad \begin{aligned} (c) &= \frac{H_1(0)}{2 \cdot H_1(ia) \cdot \Theta(u)} \cdot [\Theta(u+ia) + \Theta(u-ia)], \\ (c') &= \frac{H_1(0)}{2i \cdot H_1(ia) \cdot \Theta(u)} \cdot [\Theta(u+ia) - \Theta(u-ia)]. \end{aligned}$$

Die Neigungscosinus c , c' der Tangente PZ' gegen die festen Axen X , Y ergeben sich, sobald man die Werthe von (c) , (c') substituirt in die Gleichungen

$$(21) \quad \begin{aligned} c &= (c) \cdot \cos n'u + (c') \cdot \sin n'u, \\ c' &= - (c) \cdot \sin n'u + (c') \cdot \cos n'u. \end{aligned}$$

Die Neigungscosinus (c) , (c') sind periodisch mit der Periode $2K$ von u , dagegen besitzen c , c' keine Periodicität. Analoge Ausdrücke wie in (17) ergeben sich für die Neigungscosinus (a) , (a') bzw. (b) , (b') der Axen X' und Y' gegen die beweglichen Axen (X) , (Y) . Dieselben können gleichfalls der Jacobi'schen Arbeit entnommen werden, sind jedoch hier von weniger Interesse als die Neigungscosinus (c) , (c') der Stabtangente Z' .

9.

Die in den Formeln (20) und (21) auftretenden Θ -Functionen können durch unendliche Reihen ersetzt werden. Dies wird geschehen müssen, sobald man die Coordinaten (x) , (y) und x , y , eines Punktes P der elastischen Centrallinie bezüglich des beweglichen Systems (X) , (Y) und des festen Systems X , Y durch Integration der Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d(x)}{ds} &= (c), & \frac{d(y)}{ds} &= (c'), \\ \frac{dx}{ds} &= c, & \frac{dy}{ds} &= c' \end{aligned}$$

wirklich bilden will. Setzen wir auch statt des für die Coordinaten z im Paragraph 8 erhaltenen geschlossenen Ausdrucks wenigstens für $A > B > C$ und $Bh - l^2 > 0$ die unendlichen Reihen, so erscheinen die Coordinaten in nachstehender Form.

I. Bewegliches Coordinatensystem (X) , (Y) , (Z) .

Durch Ausführung der Integration der Jacobi'schen Reihen*) erhält man unter Zugrundelegung der Abkürzungen

$$n \cdot \frac{\pi}{K} \cdot s = \frac{\pi}{K} \cdot u = v,$$

*) Vgl. den Eingang zur Arbeit „sur la rotation“.

$$\frac{a}{K} = b, \quad e^{-\pi \cdot \frac{K'}{K}} = q^*,$$

$$\frac{2l}{C} \cdot \sqrt{\frac{(A-C)(B-C)}{AB}} = 2l \cdot G = D^*)$$

für die Coordinaten (x) , (y) , (z) :

$$\begin{aligned} D \cdot (x) &= \frac{2q^{\frac{b}{2}}}{1-q^b} \cdot v - 2 \left(q^{-\frac{b}{2}} - q^{\frac{b}{2}} \right) \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{q^\mu (1+q^{2\mu}) \cdot \sin \mu v}{\mu (1-q^{2\mu-b}) (1-q^{2\mu+b})}, \\ (22) \quad D \cdot (y) &= 4 \left(q^{-\frac{b}{2}} + q^{\frac{b}{2}} \right) \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{q^\mu (1-q^{2\mu}) \cdot \sin^2 \frac{\mu v}{2}}{\mu (1-q^{2\mu-b}) (1-q^{2\mu+b})}, \\ D \cdot (z) &= v + 4 \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{q^\mu \cdot \sin \mu v}{\mu (1+q^{2\mu})}. \end{aligned}$$

II. Festes Coordinatensystem X, Y, Z .

Ausser den vorigen Abkürzungen führe man noch ein

$$m = \frac{K}{\pi} \cdot n',$$

so wird:

$$\begin{aligned} D \cdot x &= \frac{2q^{\frac{b}{2}}}{m(1-q^b)} \cdot \sin m v + 2q^{\frac{b}{2}} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{q^\mu \cdot \sin (m-\mu) v}{(m-\mu) (1-q^{2\mu+b})} \\ &\quad - 2q^{-\frac{b}{2}} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{q^\mu \cdot \sin (m+\mu) v}{(m+\mu) (1-q^{2\mu-b})}, \\ (23) \quad D \cdot y &= \frac{4q^{\frac{b}{2}}}{m(1-q^b)} \cdot \sin^2 \frac{m v}{2} + 4q^{\frac{b}{2}} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{q^\mu \cdot \sin^2 \left(\frac{m-\mu}{2} \right) v}{(m-\mu) (1-q^{2\mu+b})} \\ &\quad - 4q^{-\frac{b}{2}} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{q^\mu \cdot \sin^2 \left(\frac{m+\mu}{2} \right) v}{(m+\mu) (1-q^{2\mu-b})}, \\ D \cdot z &= D \cdot (z). \end{aligned}$$

Specielle Fälle, hervorgerufen durch besondere Stellung des angreifenden Kräftepaars.

10.

Dreht das einen starren Körper angreifende Kräftepaar um die Hauptaxe des grössten oder kleinsten Trägheitsmomentes, so geht die

*) In der Abhandlung in den Münch. Ber. steht irrthümlich $q = l \cdot$ statt $q = e \cdots$ und $(A-B) \cdot C^2$ statt $A \cdot B \cdot C^2$ gedruckt.

Bewegung fortwährend um diese Axe mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit vor sich. Die Grösse der letzteren ist gleich (*Intensität des Kräftepaars*): (*Trägheitsmoment*). Die Kegel der Polodie und Herpolodie sind mit der permanenten Rotationsaxe zusammengefallen. Der Bewegungszustand ist *stabil* — kleine Stösse auf die Rotationsaxe bringen nur geringe Oscillationen derselben um ihre Ruhelage hervor.

„Dreht das auf den freien Querschnitt des Stabes einwirkende Kräftepaar um die Hauptaxe des grössten oder kleinsten Deformationswiderstandes, und ist diese Hauptaxe die Torsionsaxe, so bleibt die elastische Centrallinie des Stabes gerade, der Stab wird nur gleichmässig gedreht. Die Grösse der Drillung ist gleich (*Intensität des Kräftepaars*): (*Widerstand gegen Torsion*). Die biegsame und feste windschiefe Fläche, sowie die auf ihnen liegenden Curven der Polodie und Herpolodie sind in die Stabaxe zusammengefallen. Ist die Hauptaxe eine solche reiner Biegung, so wird blosser Biegung in einen Kreis, ohne Drillung, hervorgerufen. Die Krümmung des letzteren ist (*Intensität des Kräftepaars*): (*Widerstand gegen Biegung*). Die windschiefen Flächen der Polodie und Herpolodie sind in Kreiscylinder parallel der Kräftepaaraxe, die Curven in einen Kreis zusammengefallen. Der Gleichgewichtszustand ist in beiden Fällen *stabil*: bringt man den Stab ein wenig aus seiner Gleichgewichtslage, so sucht er wieder dahin zurückzukehren.“

Dreht das einen Körper ($A > B > C$) angreifende Kräftepaar um eine Gerade, welche einer der 2 durch die Hauptaxe Y' des mittleren Trägheitsmomentes gehenden Ebenen angehört, deren Gleichungen bezüglich des Hauptaxensystems $X' Y' Z'$

$$\frac{x'}{y'} = \pm \sqrt{\frac{A(B-C)}{C(A-B)}}$$

sind, so wird (vgl. die Schlussbemerkung des § 3) $Bh - l^2 = 0$ und es reduciren sich die in p, q, r auftretenden elliptischen Functionen auf logarithmische. Der rollende Kegel der instantanen Drehungsaxen ist ebenfalls in 2 Ebenen durch die Y' -Axe übergegangen,

$$\frac{x'}{y'} = \pm \sqrt{\frac{C(B-C)}{A(A-B)}},$$

die Polodie in 2 Ellipsen. Die Herpolodie wird eine Spirale, und der Kegel der Herpolodie dementsprechend gewunden. Die Unterfälle $Bh \geq l^2$ sind zusammengefallen.

Die Annahme $Bh - l^2 = 0$ lässt freilich auch die singuläre Lösung $p = 0, r = 0$ zu, wodurch nach den Euler'schen Gleichungen (1) $q = \text{const} = q_0$ wird d. h. wenn das wirkende Kräftepaar um die Axe Y' des mittleren Trägheitsmomentes B selbst gewirkt hat, so geht die Drehung um diese Axe fortwährend und mit constanter Geschwindig-

keit vor sich. Allein der Bewegungszustand ist ein *labiler*: es bedarf nur eines geringen Anstosses, um das Centralellipsoid sofort umkippen und die vorher beschriebenen Erscheinungen zu Tage treten zu lassen.

Dreht das den elast. Stab angreifende Kräftepaar um eine gerade Linie, welche einer der 2 durch die Hauptaxe mittelsten Widerstandes gehenden *charakteristischen* Ebenen angehört, deren Gleichungen für $A > B > C$ etc.

$$\frac{x'}{y'} = \pm \sqrt{\frac{A(B-C)}{C(A-B)}} \text{ etc.}$$

sind, bezüglich des Systems der 3 Hauptaxen, so wird der Modul κ der elliptischen Functionen in p , q , r gleich 1 und die Formeln (10) gehen über in die folgenden:

I. $A > B > C$.

$$p = \frac{l}{A} \sqrt{\frac{A(B-C)}{B(C-A)}} \cdot \frac{2e^u}{e^{2u}+1}, \quad r = \frac{l}{C} \sqrt{\frac{C(A-B)}{B(A-C)}} \cdot \frac{2e^u}{e^{2u}+1},$$

$$q = \frac{l}{B} \cdot \frac{e^{2u}-1}{e^{2u}+1},$$

II. $B > C > A$.

$$(24) \quad p = \frac{l}{A} \sqrt{\frac{A(B-C)}{C(B-A)}} \cdot \frac{2e^u}{e^{2u}+1}, \quad q = \frac{l}{B} \sqrt{\frac{B(C-A)}{C(B-A)}} \cdot \frac{2e^u}{e^{2u}+1},$$

$$r = \frac{l}{C} \cdot \frac{e^{2u}-1}{e^{2u}+1},$$

III. $C > A > B$.

$$q = \frac{l}{B} \sqrt{\frac{B(C-A)}{A(C-B)}} \cdot \frac{2e^u}{e^{2u}+1}, \quad r = \frac{l}{C} \sqrt{\frac{C(A-B)}{A(C-B)}} \cdot \frac{2e^u}{e^{2u}+1},$$

$$p = \frac{l}{A} \cdot \frac{e^{2u}-1}{e^{2u}+1}.$$

Die Unterfälle $Bh - l^2 \geq 0$ u. s. w. sind zusammengefallen. Nach dem oben bereits Gesagten, wie auch aus den Formeln ergibt sich:

Die Fläche der Polodie ist, sobald der Widerstand gegen Torsion der mittelste war, in ein Ebenenpaar durch die Stabaxe übergegangen, die Polodie $\xi = p$, $\eta = q$, $\xi = -\frac{u}{n} + r$ in eine ebene Curve, gelegen in der einen oder andern Ebene, je nachdem die Axe des angreifenden Kräftepaars in der einen oder andern der 2 diesen Ebenen entsprechenden „charakteristischen“ Ebenen gelegen war. Die Projection der elastischen Centrallinie auf die Ebene des Querschnitts ist ein Stück einer Geraden. Die Projectionen auf die andern Hauptebenen sind Curven, welche gegen die Axe des Stabes asymptotisch anlaufen. Die

Curve der Polodie nähert sich somit gleichfalls der Stabaxe asymptotisch. (Fig. 4).

War unter den 3 Hauptwiderständen gegen Deformation der Widerstand gegen Torsion der grösste oder kleinste, so ist die Projection der Polodie auf die Ebene des Querschnitts ein Ellipsenquadrant, und die Projectionen auf die 2 andern Hauptebenen sind Curven, welche von der Stabaxe aus gegen 2 damit parallele Gerade asymptotisch anlaufen. (Fig. 5).

Die Biegung Θ_{xy} (15) der Projection der elastischen Centrallinie auf die invariable Ebene des Kräftepaars ist bekanntlich abhängig von r . Dieselbe ist hier nicht mehr periodisch mit u , sondern wächst oder fällt fortwährend damit, je nachdem in r der Quotient $\frac{e^{2u} - 1}{e^{2u} + 1}$ oder $\frac{e^u}{e^{2u} + 1}$ eingeht. D. h.:

Die Projection der elastischen Centrallinie auf die invariable Ebene des Kräftepaars besitzt nicht mehr periodische Krümmung, sondern ist, ganz analog dem entsprechenden Fall der Spirale Poinso't's, in eine spiralförmig gewundene Curve übergegangen. Die Spirale läuft dabei von einem festen Kreise aus ($s=0$) asymptotisch gegen einen zweiten, damit concentrischen ($s=\infty$), sobald der Widerstand gegen Torsion nicht der mittelste war (Fig. 12); dieselbe läuft dagegen von einem festen Kreise aus ($s=0$) asymptotisch gegen dessen Mittelpunkt ($s=\infty$), sobald der Torsionswiderstand kleiner als der eine und grösser als der andere Widerstand gegen Biegung war. (Fig. 11).

Die elastische Centrallinie selbst erscheint als eine Curve, welche sich um die Axe des Kräftepaars herumschlingt, indem sie im ersteren der soeben erwähnten Fälle sich von derselben mehr und mehr entfernt, ohne übrigens über eine gewisse Grenze der Entfernung hinauszugehen, im zweiten gegen die Axe immer enger und enger angeht.

Wie sich bei der Drehung unter der Annahme $Bh - l^2 = 0$, ($A > B > C$) die singuläre Lösung $p = 0$, $r = 0$, $q = q_0$ ergab, so auch hier. Man erkennt, dass,

wenn das Kräftepaar um die Hauptaxe mittelsten Momentes dreht, auch wieder blosse Torsion oder Kreisbiegung hervorgerufen wird. Allein der Gleichgewichtszustand des elastischen Stabes ist labil: ein kleiner Anstoss genügt, um die gerade gebliebene oder in einen Kreisbogen gekrümmte elastische Centrallinie in eine ganz neue Curve von den oben erwähnten Eigenschaften schnellen zu lassen.

Specielle Fälle, hervorgerufen durch besondere Wahl der drei Hauptwiderstände.

11.

Werden zwei Hauptträgheitsmomente des um seinen Schwerpunkt rotirenden Körpers einander gleich, so werden die Trägheitsmomente um alle in der Ebene der 2 Hauptaxen gezogenen Geraden gleich; es gehen die Polodie und die Herpolodie in Kreise, deren Kegel in Kreiskegel über und es vollzieht sich die Drehung fortwährend mit gleichförmiger Geschwindigkeit um die instantane Drehungsaxe.

Werden 2 Hauptwiderstandsmomente des elastischen Stabes einander gleich, so ist zu unterscheiden, welche Momente dies sind. Sind die Widerstände A, B gegen *Biegung* gleich, so ist der Stab „isotrop“, es wird nach jeder in der Querschnittsebene gezogenen Geraden der Widerstand *gleich* ($= A = B$). Nennt man den Neigungswinkel der Kräftepaaraxe gegen die Torsionsaxe λ , so wird aus (10)

$$\begin{aligned} p &= \frac{l}{A} \cdot \sin \lambda \cdot \cos u, \\ (25) \quad q &= \frac{l}{A} \cdot \sin \lambda \cdot \sin u, \\ r &= \frac{l}{C} \cdot \cos \lambda = r_0. \end{aligned}$$

Es ist sowohl die Drillung r als die Biegung $\Theta' = \sqrt{p^2 + q^2}$ constant, sonach auch nach (15) $\Theta_{xy} = \frac{l}{A \cdot \sin \lambda}$ d. h.:

„Es ist die elastische Centrallinie unter gleichförmiger Drillung in eine gewöhnliche Schraubenlinie um die invariable Richtung der Kräftepaaraxe gebogen worden. Der Steigungswinkel derselben ist $90^\circ - \lambda$. Der Radius des Kreiscylinders, welchem dieselbe aufliegt, ist gleich dem Producte aus dem constanten Widerstand gegen Biegung und dem sinus des Steigungswinkels, unter dem die Axe des Kräftepaars gegen die Stabaxe geneigt ist, dividirt durch die Intensität des angreifenden Paares; der Cylinder wird also um so enger, je stärker das wirkende Kräftepaar, je kleiner der Widerstand gegen Biegung und je näher die Axe des Kräftepaares an der Stabaxe gelegen ist.“

Aus der Betrachtung von $\xi = p$, $\eta = q$, $\xi = -\frac{u}{n} + r_0$ fließt:

Die Polodie ist in eine gewöhnliche Schraubenlinie um die Torsionsaxe übergegangen, die biegsame windschiefe Fläche derselben in eine gewöhnliche Schraubenfläche. Der Steigungswinkel der Schraubenlinie ist $\alpha = \arctg \left(\frac{2 \cdot A^2 \cdot C}{(A - C) \cdot l \cdot \sin 2\lambda} \right)$, der Radius des Kreiscylinders, welchem dieselbe aufliegt, $\frac{A}{l \cdot \sin \lambda}$. Es wird also der Kreiscylinder um so weiter,

je stärker das anregende Kräftepaar wirkt, je grösser der Winkel zwischen seiner Axe und der Stabaxe und je kleiner der gleiche Widerstand gegen Biegung ist. Die Steilheit wird um so grösser, je grösser dieser Widerstand und der Drillungswiderstand und je kleiner der Winkel zwischen der Kräftepaar- und der Torsionsaxe ist.

Dreht das Kräftepaar um eine beliebige Hauptaxe des Querschnittes, so wird die constante Drillung zu 0 und es wird blosse Kreisbiegung hervorgerufen.

Werden je ein Biegungswiderstand z. B. B und der Drillungswiderstand C numerisch gleich, so werden — der Fall $A > C (= B)$ genügt — die Krümmungscomponenten p, q, r

$$(26) \quad \begin{aligned} p &= \frac{l}{A} \cdot \sin \varphi_0, \\ q &= \frac{l}{C} \cdot \cos \varphi_0 \cdot \sin u, \\ r &= \frac{l}{C} \cdot \cos \varphi_0 \cdot \cos u. \end{aligned}$$

Aus $\xi = p, \eta = q, \zeta = -\frac{u}{n} + r$ erfährt man:

Die Fläche der Polodie ist in eine Ebene senkrecht der Hauptaxe des ungleichen Hauptwiderstandes der Biegung übergegangen, die Polodie also in eine ebene Curve. Die Projectionen derselben auf die 2 Hauptebenen durch diese Hauptaxe sind gerade Linien, die Projection auf die 3. parallele Hauptebene ist eine sinuslinienartige Curve, deren Wendepunkte auf der Stabaxe liegen. (Fig. 6).

Die elastische Centrallinie selbst kann durch Gleichungen von einfacher Form nicht dargestellt werden. Ihre Projection auf die invariable Ebene des angreifenden Kräftepaares weist wieder periodische Krümmung auf, indem

$$\Theta_{xy} = \frac{l}{AC} \cdot \frac{C \sin^2 \varphi_0 + A \cos^2 \varphi_0 \sin^2 u}{(\sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 \cdot \sin^2 u)^{\frac{3}{2}}}$$

wird. Die Periode von u ist diesmal 2π .

Werden die 3 Hauptträgheitsmomente des rotirenden Körpers einander gleich, so geht das Centralellipsoid desselben in eine Kugel über und es ist jede Axe, um welche das Kräftepaar dreht, permanente Rotationsaxe.

Werden die 3 Widerstände A, B, C , welchen der Stab seine Deformation entgegensetzt, einander gleich ($= A$), so werden die 3 Krümmungscomponenten p, q, r constant. Die Gleichungen $\xi = p_0, \eta = q_0, \zeta = -s + r_0$ zeigen, dass die Fläche der Polodie in eine Ebene durch die Torsionsaxe, die Polodie in eine gerade Linie parallel derselben übergegangen ist. Hat das Kräftepaar um eine der Hauptachsen des isotropen Querschnittes gedreht, so entsteht blosse Kreis-

biegung, in jedem anderen Falle wird die elastische Centrallinie in eine Schraubenlinie gebogen. Es unterscheidet sich sonach dieser Fall der Gleichheit der 3 Widerstandsmomente A, B, C des Stabes nicht wesentlich von jenem der Gleichheit der 2 Biegungswiderstände A, B — im Gegensatze zu dem Problem der Rotation, welches beim Uebergange von der Gleichheit zweier Hauptträgheitsmomente auf jene aller drei doch erheblich vereinfacht wird.

Wird die Summe zweier Hauptträgheitsmomente des rotirenden Körpers gleich dem dritten so ist der Körper in eine Platte übergegangen und es hat das Centralellipsoid die von Poinsothervorgehobene charakteristische Grenze erreicht. Die Drehung geht übrigens wesentlich ebenso vor sich, wie im allgemeinen Falle.

Wird die Summe der beiden Biegungswiderstände gleich dem Drillungswiderstand des elastischen Stabes, so wird die elastische Centrallinie in eine Curve von *constanter Biegung* deformirt, indem aus den Euler'schen Gleichungen (1)

$$p^2 + q^2 = \text{const.}$$

folgt. Im übrigen besitzt dieselbe keine wesentlich einfacheren Gleichungen, als im allgemeinen Falle, ebensowenig specialisiren sich die Polodie und deren Fläche.

München, im Juli 1883.