Bemerkungen über das Integral $\bar{\Gamma}(a)$.

Von

L. POCHHAMMER in Kiel.

§ 1.

Durch $\bar{\Gamma}(a)$ werde, wie in der Abhandlung des Verfassers „Zur Theorie der Euler'schen Integrale“ im 35^{ten} Bande dieser Annalen (§ 3, S. 514), das Integral

$$(1) \quad \bar{\Gamma}(a) = \int_{-\infty}^{(0)} e^u u^{a-1} du$$

bezeichnet, in welchem die Variable u , vom unendlich entfernten Punkte der negativen reellen Axe ausgehend und dahin zurückkehrend, einen positiven Umlauf um den Punkt 0 ausführt*). Für $\bar{\Gamma}(a)$ kann (S. 515 des genannten 35^{ten} Bandes) auch der Ausdruck

$$(2) \quad \bar{\Gamma}(a) = e^{-\pi i a} \int_{+\infty}^{(0)} e^{-u} u^{a-1} du,$$

wo der Integrationsweg einen bei $+\infty$ beginnenden positiven Umlauf um den Punkt 0 darstellt, oder der Ausdruck**)

$$(3) \quad \bar{\Gamma}(a) = -e^{\pi i a} \int_{+\infty}^{(0-)} e^{-u} u^{a-1} du$$

in welchem die Umkreisung des Punktes 0 in negativer Drehungsrichtung erfolgt, gesetzt werden. Die Formel (3) entsteht aus der Formel (2) durch Umkehrung des Integrationsweges. Die Potenz u^{a-1}

*) Das Integral $\bar{\Gamma}(a)$ weicht nur in formaler Beziehung von dem Integral ab, welches H. Hankel in § 3 seiner Abh. „Die Euler'schen Integrale bei unbeschränkter Variabilität des Arguments“, Schlömilch's Zeitschr. für Math. u. Phys., Jahrgang 9, 1864, definirt hat.

**) Cfr. die Abh. des Verf. „Ueber einige besondere Fälle der linearen Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung mit linearen Coefficienten“, Band 38 dieser Annalen, S. 243.

wird bei dem Integral (1) dadurch näher bestimmt, dass im Schnittpunkte des Integrationsweges mit der positiven reellen Axe u^{a-1} gleich der Grösse $e^{(a-1)\log u}$, in welcher $\log u$ den reellen Logarithmus bedeutet, zu nehmen ist. Letztere Bedingung gilt in (2) und (3) für den ersten Theil des Integrationsweges.

Die obigen Integrale sollen, mit Rücksicht auf gewisse Anwendungen, durch die Substitution

$$(4) \quad u = \frac{1}{t}, \quad u^{a-1} du = -t^{-a-1} dt,$$

umgeformt werden. Der Weg der Variable t nimmt dann im Punkte 0 seinen Anfang, und zwar verlässt t bei dem Integral (1) den Nullpunkt in der Richtung der negativen reellen Axe, bei den Integralen (2) und (3) in der Richtung der positiven reellen Axe. Man setze der Einfachheit halber den Weg der Variable u aus einem (doppelt durchlaufenen) Abschnitt der negativen, bezw. positiven reellen Axe und aus einem Kreise, der um den Nullpunkt mit dem Radius 1 beschrieben wird, zusammen. Unter ϵ werde eine unendlich kleine positive reelle Constante verstanden. Dann besteht der Weg, der sich für t bei dem Integral (1) ergibt, aus der geradlinigen Strecke vom Punkte $-\epsilon$ bis zum Punkte -1 , dem im negativen Sinne durchlaufenen Kreise mit dem Radius 1, und der geradlinigen Strecke von -1 bis $-\epsilon$. Dieser Weg stellt einen vom Punkte $-\epsilon$ aus bewirkten negativen Umlauf um den Punkt 0 dar. Unter Benutzung der in § 1 der Abhandlung des Verfassers „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf“*)

angegebenen Bezeichnung (die auch in (1), (2), (3) angewendet ist) erhält man demnach die Gleichung

$$\bar{\Gamma}(a) = - \int_{-\epsilon}^{(0-)} e^{\frac{1}{t}} t^{-a-1} dt.$$

Man kann nun unter Hinzufügung des Factors -1 den Integrationsweg umkehren. Dies ändert hier den Weg nur insofern, als die negative Umkreisung des Nullpunktes sich in

die positive verwandelt (Fig. 1). Also ergibt sich, unter der Bedingung, dass für $t = 1$ die Potenz t^{-a-1} gleich 1 gesetzt werde, die Formel

$$(5) \quad \bar{\Gamma}(a) = \int_{-\epsilon}^{(v)} e^{\frac{1}{t}} t^{-a-1} dt.$$

Die Substitution (4) lässt aus (3) die Gleichung

Fig. 1.

*) Band 35 dieser Annalen, S. 472.

$$(6) \quad \bar{\Gamma}(\alpha) = e^{\pi i \alpha} \int_e^{\bar{(0)}} e^{-\frac{1}{t}} t^{-\alpha-1} dt$$

und aus (2) die Gleichung

$$(7) \quad \bar{\Gamma}(\alpha) = -e^{-\pi i \alpha} \int_e^{\bar{(0-)}} e^{-\frac{1}{t}} t^{-\alpha-1} dt$$

entstehen, woselbst e , wie oben, eine unendlich kleine positive reelle Zahl bedeutet. In (6) und (7) nimmt die Potenz $t^{-\alpha-1}$ den Werth 1 an, wenn t zum ersten Male im Punkte 1 eintrifft.

Statt des Kreises mit dem Radius 1 kann in (5), (6), (7), als Theil des Weges von t , ein Kreis $\mathfrak{K}$ gewählt werden, der mit einem beliebigen Radius k um den Nullpunkt gelegt wird. Denn die zu integrierenden Functionen haben keinen anderen endlichen singulären Punkt als den Punkt $t=0$. Ausser dem Kreise $\mathfrak{K}$ bildet dann in (5) die (in beiden Richtungen vorkommende) Strecke von $-e$ bis $-k$, und in (6) und (7) die Strecke von $+e$ bis $+k$ den Integrationsweg. Es gilt in diesem Falle für das Integral (5) die Bestimmung, dass $t^{-\alpha-1}$ im Punkte $t=k$ gleich $e^{-(\alpha+1)\log k}$ wird, wo $\log k$ den reellen Logarithmus bezeichnet. Bei den Integralen (6) und (7) stimmt $t^{-\alpha-1}$ auf dem ersten Theile des Integrationsweges (zwischen e und k) mit dem Werthe $e^{-(\alpha+1)\log t}$, in welchem $\log t$ reell ist, überein.

§ 2.

In dem Integral (1) wurde der unendlich entfernte Punkt der negativen reellen Axe als Ausgangspunkt und Endpunkt des Integrationsweges angenommen. Indessen kann man diesen Punkt, ohne dass der Werth des Integrals sich änderte, durch einen beliebigen Punkt derjenigen Hälfte des unendlichen Horizontes, bei der die reellen Bestandtheile negativ sind, ersetzen, resp. zwei solche Horizontpunkte als untere und obere Begrenzung des Integrals nach u wählen. Dies folgt daraus, dass, wie Cauchy gezeigt hat, das Integral der Function $e^u u^{\alpha-1}$, genommen über irgend einen Theil der genannten Hälfte des Horizonts, einen verschwindend kleinen Werth hat.

Wird unter s eine sehr grosse positive reelle Constante verstanden, und $u = se^{\vartheta i}$ gesetzt, so ergibt sich, wenn

$$a = a_1 + i a_2$$

ist (a_1, a_2 reell), die Gleichung

$$e^u u^{\alpha-1} du = e^{s(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)} s^{a_1} e^{i a_2 \log s} e^{(i a_1 - a_2) \vartheta} i d\vartheta.$$

Man nehme, indem man durch λ eine reelle, zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegende Constante und durch s' das Product $se^{-(\pi-\lambda)i}$ bezeichnet, die Werthe

— π und — $(\pi - \lambda)$ als Grenzen der Integration nach ϑ , so dass — s und s' die Integralgrenzen in Bezug auf u sind. Da

$$\text{mod. } (e^u u^{a-1} du) = s^{a_1} e^{s \cos \vartheta - a_2 \vartheta} d\vartheta$$

ist, so besteht für den Modul des betrachteten Integrals die Ungleichheit

$$\text{mod. } \int_{-s}^{s'} e^u u^{a-1} du < s^{a_1} \int_{-\pi}^{-(\pi-\lambda)} e^{s \cos \vartheta - a_2 \vartheta} d\vartheta.$$

Hieraus folgt

$$(8) \quad \text{mod. } \int_{-s}^{s'} e^u u^{a-1} du < \lambda s^{a_1} e^{s \cos \vartheta_0 - a_2 \vartheta_0},$$

wo ϑ_0 eine Constante bedeutet, die zwischen — π und — $(\pi - \lambda)$ liegt. Mit unbegrenzt wachsendem s wird aber, da $\cos \vartheta_0$ negativ ist, die rechte Seite von (8) beliebig klein, was um so mehr von dem links stehenden Integrale gilt. In derselben Art wird bewiesen, dass das Integral nach ϑ zwischen den Grenzen — $(\pi + \lambda)$ und — π oder, was auf dasselbe hinauskommt, zwischen den Grenzen $\pi - \lambda$ und π sich für ein unendliches s dem Werthe Null nähert.

Man ziehe nun vom Nullpunkte aus zwei Gerade $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$, welche mit der positiven reellen Axe die Winkel — $(\pi - \lambda_1)$ und $\pi - \lambda_2$ bilden; λ_1 und λ_2 seien

positiv und kleiner als $\frac{\pi}{2}$.

Die unendlich entfernten Punkte der Geraden $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ sollen kurz durch m_1, m_2 , und der unendlich entfernte Punkt der negativen reellen Axe durch q bezeichnet werden. Ferner möge der Kreis $\mathfrak{K}$, der mit dem beliebigen Radius k um den Nullpunkt beschrieben wird, die Geraden $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ in den Punkten m_1, m_2 und die negative reelle Axe im Punkte q treffen (Fig. 2).

Fig. 2.

Die Schnittpunkte des Kreises mit der positiven reellen Axe, mit der negativen imaginären und der positiven imaginären Axe werden k, i_1 und i_2 genannt.

In dem Integrationswege des Integrals (1), welcher nach Fig. 2 aus den Theilen

$$qq, qm_1 i_1 k i_2 m_2 q, q\dot{q}$$

besteht, dürfen die Strecken qq und qm_1 durch den Bogen qm_1 des

unendlichen Horizonts und den geradlinigen Abschnitt $m_1 m_1$ ersetzt werden. Denn das Integral von $e^u u^{a-1}$ längs des geschlossenen Weges $q q, q' m_1, m_1 m_1, m_1 q$ verschwindet, da die genannte Function auf dem eingeschlossenen Flächenstück eindeutig und stetig ist. Ebenso kann man statt $m_2 q$ und $q q$ die Strecken $m_2 m_2$ und $m_2 q$ wählen. Die Integration von $e^u u^{a-1}$ längs der Bögen $q m_1$ und $m_2 q$ liefert aber, wie gezeigt wurde, das Resultat Null. Also ist $\bar{\Gamma}(a)$ auch gleich dem Integral

$$(9) \quad \bar{\Gamma}(a) = \int_{m_1}^{m_2} e^u u^{a-1} du,$$

dessen Grenzen m_1, m_2 als die Ausdrücke

$$(10) \quad m_1 = \lim_{(s=\infty)} s e^{-(\pi-\lambda_1)i}, \quad m_2 = \lim_{(s=\infty)} s e^{(\pi-\lambda_2)i}$$

$(0 \leq \lambda_1 < \frac{\pi}{2}, 0 \leq \lambda_2 < \frac{\pi}{2})$ definirt sind, und dessen Integrationsweg sich aus den Strecken

$$m_1 m_1, m_1 i_1 k i_2 m_2, m_2 m_2$$

zusammensetzt. Fügt man zu dem Integral (9) das (unendlich kleine) Integral der Function $e^u u^{a-1}$ längs des Bogens $m_2 q m_1$ des Horizonts hinzu und transformirt den Weg in der angegebenen Art, so hat man die Formel

$$(11) \quad \bar{\Gamma}(a) = \int_{m_1}^{\bar{\Gamma}^{(0)}} e^u u^{a-1} du,$$

in welcher für die Variable u (nach Fig. 2) die geschlossene Curve

$$m_1 m_1 i_1 k i_2 m_2 q m_1 m_1$$

zur Anwendung kommt. Statt m_1 kann in (11) auch der Punkt m_2 zum Ausgangspunkt der Integration genommen werden; in diesem Falle durchläuft u den Weg

$$m_2 m_2 q m_1 i_1 k i_2 m_2 m_2.$$

Für die Potenz u^{a-1} gilt in (9) und (11) dieselbe Bestimmung wie in (1).

Die obigen Betrachtungen übertragen sich auf die Integrale (2) und (3). Integriert man die Function $e^{-u} u^{a-1}$ längs eines Abschnittes derjenigen Hälfte des unendlichen Horizonts, wo die reellen Bestandtheile positiv sind, so ist das Integral unendlich klein. Also kann man in (2) und (3) den Weg der Variable u in der Art abändern, dass die Integralgrenzen nicht in den unendlich entfernten Punkt der positiven reellen Axe, sondern in beliebige andere Punkte der soeben bezeichneten Horizonthälfte fallen. Aus (2) werden auf diese Weise die Gleichungen

$$(12) \quad \bar{\Gamma}(a) = e^{-\pi i a} \int_{v_1}^{v_2} e^{-u} u^{a-1} du$$

und

$$(13) \quad \bar{\Gamma}(a) = e^{-\pi i a} \int_{\gamma'}^{(0)} e^{-u} u^{a-1} du$$

abgeleitet, in denen

$$(14) \quad p_1 = \lim_{(s=\infty)} s e^{\lambda_1 i}, \quad p_2 = \lim_{(s=\infty)} s e^{-\lambda_2 i}$$

($0 \leq \lambda_1 < \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \lambda_2 < \frac{\pi}{2}$) gesetzt ist, und unter γ' ein beliebiger der zwei Werthe p_1, p_2 verstanden wird. Der Integrationsweg von (12)

Fig. 3.

wird in Figur 3 durch $p_1 p_1 q p_2 p_2$, der Integrationsweg von (13) durch

$p_1 p_1 q p_2 k p_1 p_1$ oder $p_2 p_2 k p_1 q p_2 p_2$ angegeben. Für die Fixirung des Zweiges der Potenz u^{a-1} möge in (12) und (13) derjenige Punkt benutzt werden, in welchem der Integrationsweg die negative reelle Axe schneidet. Bei dem Integral (2) geht die Variable u vom Punkte k zum Punkte $-k$ (in Fig. 1, 2, 3 durch q bezeichnet) über, indem sie

die obere Hälfte des Kreises $\mathbb{R}$ im positiven Sinne durchläuft. Daher hat u^{a-1} für $u = -k$ den Werth $e^{(a-1)(\pi i + \log k)}$ wo $\log k$ den reellen Logarithmus bedeutet. Diese Bestimmung bleibt für die Integrale (12) und (13) in Kraft.

In ähnlicher Weise lässt sich der Integrationsweg der Integrale (5), (6), (7) modificiren. Nennt man c_1 und c_2 die Producte

$$(15) \quad c_1 = c e^{-(\pi - \lambda_1)i}, \quad c_2 = c e^{(\pi - \lambda_2)i},$$

in denen c wiederum eine unendlich kleine positive reelle Zahl bezeichnet, und λ_1, λ_2 reell, positiv und kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sind, so kann man nach Fig. 2 in (5) den Weg

$$c_1 m_1 i_1 k i_2 m_2 c_2$$

oder auch einen der zwei Wege

$$c_1 m_1 i_1 k i_2 m_2 q m_1 c_1, \quad c_2 m_2 q m_1 i_1 k i_2 m_2 c_2$$

für die Variable t wählen, ohne hierdurch den Werth des Integrals

(5) zu ändern. Denn das Integral der Function $e^{\frac{1}{t}} t^{-a-1}$, genommen längs eines unendlich kleinen Kreisbogens (mit dem Radius c), welcher von $-c$ bis c_1 oder von $-c$ bis c_2 (auf der Seite der negativen reellen Werthe) führt, ist eine unendlich kleine Grösse. Demnach werden aus (3) die weiteren Formeln

$$(16) \quad \bar{\Gamma}(a) = \int_{c_1}^{c_2} e^{\frac{1}{t}} t^{-a-1} dt$$

und

$$(17) \quad \bar{\Gamma}(a) = \int_{c'}^{\bar{c}^{(0)}} e^{\frac{1}{t}} t^{-a-1} dt$$

erhalten, in denen die soeben angeführten Integrationswege anzuwenden sind, und durch c' ein beliebiger der zwei Werthe c_1, c_2 bezeichnet wird. Für $t = k$ (Fig. 2) hat man in den beiden letzten Gleichungen die Potenz t^{-a-1} gleich demjenigen Werthe $e^{-(a+1)\log k}$, in welchem $\log k$ reell ist, zu nehmen.

§ 3.

Es soll noch kurz auf den Fall eingegangen werden, dass in den vorstehenden Rechnungen die Constanten λ_1 und λ_2 den Werth $\frac{\pi}{2}$ annehmen, so dass in Fig. 2 die Geraden M_1 und M_2 in den negativen und den positiven Zweig der imaginären Axe übergehen. In § 2 wurde mit Hülfe der Ungleichheit (8) gezeigt, dass das Integral der Function $e^u u^{a-1}$ einen unendlich kleinen Werth hat, wenn die Integration über einen (bei $-\infty$ beginnenden) Theil des zwischen $-\infty$ und $+\infty i$, resp. zwischen $-\infty$ und $+\infty i$ liegenden Quadranten des unendlichen Horizonts erstreckt wird. Nun verschwindet, wie aus (8) folgt, auch das über den ganzen Quadranten ausgedehnte Integral (was in (8) dem Werth $\lambda = \frac{\pi}{2}$ entspricht), falls der reelle Theil a_1 der Constante a negativ ist. Allerdings darf für $\lambda = \frac{\pi}{2}$ die auf der rechten Seite von (8) stehende Exponentialgrösse $e^{s \cos \vartheta_0 - a_2 \vartheta_0}$ mit wachsendem s nicht mehr als identisch mit Null angenommen werden, da in Bezug auf ϑ_0 nur die Grenzwerte $-\pi$ und $-\frac{\pi}{2}$ (in § 2: $-\pi + \lambda$), zwischen denen ϑ_0 liegt, bekannt sind, und folglich für $\cos \vartheta_0$ der Werth Null nicht ausgeschlossen ist. Im Falle $a_1 < 0$ verschwindet aber die rechte Seite von (8) für $s = \infty$ wegen des Factors s^{a_1} .

Diese Betrachtungen führen zu dem Grenzfall der Formel (9), wo m_1 durch $-\infty i$ und m_2 durch $+\infty i$ ersetzt wird. Man hat, wenn der reelle Theil von a negativ ist, die Gleichung

$$(18) \quad \bar{\Gamma}(a) = \int_{-\infty i}^{+\infty i} e^u u^{a-1} du,$$

in welcher die Variable u im Uebrigen die ganze imaginäre Axe durchläuft, jedoch den Nullpunkt auf der Seite der positiven reellen Werthe umgeht. Denn die Schlüsse, durch die man die Gleichung (9) bewies,

bleiben auch hier in Kraft. Der Integrationsweg von (18) besteht nach Fig. 2 aus den ausserhalb der Punkte i_1 und i_2 liegenden Abschnitten der imaginären Axe und aus dem Halbkreise $i_1 k i_2$. Dagegen ist

$$(19) \quad \int_{-\infty i}^{+\infty i} e^u u^{a-1} du = 0,$$

falls der Weg der Variablen u statt des Halbkreises $i_1 k i_2$ den Halbkreis $i_1 q i_2$ (Fig. 2) enthält, falls also der Nullpunkt auf der Seite der negativen reellen Werthe umgangen wird. Die geschlossene Curve, welche sich aus der geradlinigen Strecke von $-\infty i$ bis zum Punkte i_1 , dem Halbkreise $i_1 q i_2$, der geradlinigen Strecke von i_2 bis $+\infty i$ und der auf der Seite der negativen reellen Werthe liegenden Hälfte des unendlichen Horizonts zusammensetzt, bildet die Begrenzung eines Flächenstücks, auf dem die Function $e^u u^{a-1}$ eindeutig und stetig ist. Da nun das über die Horizontalfte erstreckte Integral den Werth Null hat, so verschwindet auch das Integral (19), dessen Integrationsweg aus den drei übrigen genannten Strecken besteht.

Substituirt man in (19) $u = -v$, so entsteht die Gleichung

$$(19a) \quad \int_{-\infty i}^{+\infty i} e^{-v} v^{a-1} dv = 0,$$

in welcher vorausgesetzt ist, dass die Variable den Nullpunkt auf der Seite der positiven reellen Werthe umgeht.

Wie die Formel (9), so kann auch die Formel (11), sobald der reelle Theil von a negativ ist, in der Art modificirt werden, dass der Werth $-\infty i$ an die Stelle von m_1 , resp. der Werth $+\infty i$ an die Stelle von m_2 tritt. Man erhält, gemäss den Bemerkungen am Eingang dieses Paragraphen, im Fall $a_1 < 0$ die Gleichungen

$$(20) \quad \bar{\Gamma}(a) = \int_{-\infty i}^{\bar{(0)}} e^u u^{a-1} du,$$

$$(21) \quad \bar{\Gamma}(a) = \int_{+\infty i}^{\bar{(0)}} e^u u^{a-1} du.$$

Hier kommt (nach Fig. 2) der ganze Kreis $\mathfrak{R}$ in dem Integrationswege vor; ausserdem wird in (20) die Strecke von $-\infty i$ bis i_1 , in (21) die Strecke von $+\infty i$ bis i_2 in beiden Richtungen durchlaufen.

Es möge erwähnt sein, dass die Gleichungen (18) und (19) gültig bleiben, wenn a ein positiver reeller Bruch ist. Dieselben sind dann eine unmittelbare Folge der Dirichlet'schen Formeln

$$(22) \quad \int_0^\infty w^{a-1} \cos w dw = \cos \frac{\pi a}{2} \Gamma(a),$$

$$(23) \quad \int_0^\infty w^{a-1} \sin w dw = \sin \frac{\pi a}{2} \Gamma(a),$$

in denen $\Gamma(a)$ das Euler'sche Integral 2^{ter} Art bedeutet. Bei dem Integral (18) nimmt die Potenz u^{a-1} im Punkte i_1 (Fig. 2) den Werth $e^{-\frac{\pi i}{2}(a-1)} k^{a-1}$, im Punkte i_2 den Werth $e^{\frac{\pi i}{2}(a-1)} k^{a-1}$ an, wo k^{a-1} die positive reelle Potenz von k bedeutet. Denn nachdem $u = ke^{i\vartheta}$ gesetzt ist, hat man die anfangs erwähnte Bedingung für u^{a-1} zu berücksichtigen. Substituirt man auf der negativen imaginären Axe $u = -ir$, auf der positiven $u = +ir$, so wird auf ersterer das Product $u^{a-1} du$ gleich $e^{-\frac{\pi i a}{2}} r^{a-1} dr$, auf letzterer gleich $e^{\frac{\pi i a}{2}} r^{a-1} dr$, da die Bestimmung im Punkte i_1 , resp. i_2 , massgebend ist. Bei dem Integral (19) hat dagegen, weil der Nullpunkt auf der negativen Seite umgangen wird, das Product $u^{a-1} du$ auf der positiven imaginären Axe den Werth $e^{-\frac{3\pi i a}{2}} r^{a-1} dr$. Man wähle, was erlaubt ist, den Kreisradius k unendlich klein; dann sind die Integrale der Function $e^u u^{a-1}$ längs der Halbkreise $i_1 k i_2$ und $i_1 q i_2$ (da a positiv sein soll) zu vernachlässigende Grössen. Hierdurch geht das auf der rechten Seite von (18) stehende Integral, wenn man die Gleichungen (22) und (23) benutzt, in die Summe

$$\begin{aligned} & \left(e^{\frac{\pi i a}{2}} - e^{-\frac{\pi i a}{2}} \right) \int_0^\infty r^{a-1} \cos r \, dr + i \left(e^{\frac{\pi i a}{2}} + e^{-\frac{\pi i a}{2}} \right) \int_0^\infty r^{a-1} \sin r \, dr \\ & = 2i \sin(\pi a) \Gamma(a) = \bar{\Gamma}(a) \end{aligned}$$

über, während für das Integral (19) der Werth

$$e^{-\pi i a} \Gamma(a) \left\{ -\cos \frac{\pi a}{2} \left(e^{\frac{\pi i a}{2}} - e^{-\frac{\pi i a}{2}} \right) + i \sin \frac{\pi a}{2} \left(e^{\frac{\pi i a}{2}} + e^{-\frac{\pi i a}{2}} \right) \right\} = 0$$

erhalten wird.

Formt man das Integral (18) durch die Substitution $u = \frac{1}{t}$ um, so ergibt sich, dass $\Gamma(a)$ auch mit dem Ausdruck

$$(24) \quad \bar{\Gamma}(a) = \int_{-ei}^{+ei} e^{\frac{1}{t}} t^{-a-1} dt$$

identisch ist, falls die Variable t den Nullpunkt auf der Seite der positiven reellen Werthe umgeht. Durch e wird, wie in § 1, eine unendlich kleine positive reelle Constante bezeichnet. Der Integrationsweg von (24) lässt sich (da k willkürlich ist, statt $\frac{1}{k}$ also wieder k genommen werden darf) nach Fig. 2 durch das Stück der negativen imaginären Axe von 0 bis i_1 , den Halbkreis $i_1 k i_2$ und das Stück der positiven imaginären Axe von i_2 bis 0 darstellen. Wird der genannte Weg in der Art abgeändert, dass der Halbkreis $i_1 q i_2$ an die Stelle des Halbkreises $i_1 k i_2$ tritt, so ist, wie aus (19) folgt,

$$(25) \quad \int_{-\epsilon i}^{+\epsilon i} e^{\frac{1}{t}} t^{-a-1} dt = 0.$$

Aus (20) und (21) erhält man, wenn $u = \frac{1}{t}$ gesetzt wird, die zu (17) analogen Gleichungen

$$(26) \quad \bar{\Gamma}(a) = \int_{-\epsilon i}^{(0)} e^{\frac{1}{t}} t^{-a-1} dt$$

und

$$(27) \quad \bar{\Gamma}(a) = \int_{\epsilon i}^{(0)} e^{\frac{1}{t}} t^{-a-1} dt.$$

In den Formeln (24) bis (27) wird der reelle Bestandtheil der Constante a als negativ vorausgesetzt. Der in (24), (26), (27) anzuwendende Zweig der Potenz t^{-a-1} ist derselbe wie in (5), (16), (17), d. h. es gilt auch hier für t^{-a-1} die am Schlusse des § 2 genannte Bedingung.

Kiel, im Mai 1891.