Proprietà delle equazioni Abeliane di grado p^2 .

(Di GIULIO DARBI, a Napoli.)

Facendo seguito ad uno studio (*), sulle equazioni Abeliane di grado primo p , mi propongo, con la presente Nota, di dare alcune proprietà delle equazioni Abeliane di grado p^2 , essendo p un numero primo.

Il gruppo di tali equazioni, essendo composto di sostituzioni a periodo divisore di p^2 , può essere ciclico, oppure può essere formato di sostituzioni aventi lo stesso periodo p . Poichè, in altra Nota (**), mi sono occupato delle equazioni Abeliane a gruppo ciclico, tratterò solo il caso di equazioni Abeliane di grado p^2 a gruppo non ciclico, determinando le condizioni necessarie e sufficienti affinchè un'equazione di grado p^2 , irriducibile nel campo assoluto (C) di razionalità, a cui appartengono i suoi coefficienti, sia Abeliana a gruppo non ciclico.

Tali equazioni godono della proprietà che, ogni funzione razionale in (C) delle radici può esprimersi in funzione omogenea intera di secondo grado nelle radici, con coefficienti appartenenti a (C) . Vengono inoltre determinate le condizioni necessarie e sufficienti affinchè ogni funzione razionale in (C) delle radici possa esprimersi come una combinazione lineare omogenea nelle radici con coefficienti appartenenti a (C) .

Riunendo i risultati ottenuti in questa Nota con altri di una Nota precedente, viene esaminato a parte il caso delle equazioni Abeliane di 9° grado.

1. Abbiasi l'equazione Abeliana di grado p^2 :

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

(*) Cfr. *Rendiconti della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli*. Marzo 1903.

(**) Cfr. *Annali di Matematica pura ed applicata*, 1917.

irriducibile nel campo assoluto (C) di razionalità, a cui appartengono i suoi coefficienti; siano:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{p^2}$$

le radici di (1).

Essendo l'ordine del gruppo di Galois della (1) uguale a p^2 , il periodo ϑ di una sostituzione di (G) è un divisore di p^2 . Se fosse $\vartheta = p$, il gruppo (G) sarebbe formato di sostituzioni aventi lo stesso periodo p . Noi tratteremo questo caso, escludendo l'altro in cui $\vartheta = p^2$, relativo al gruppo ciclico.

Denotando con (S) e (T) due sostituzioni del gruppo Abeliano (G) permutabili fra loro, cioè:

$$S = (x_1 x_2 \dots x_p) (x_{p+1} x_{p+2} \dots x_{2p}) \dots (x_{p(p-1)+1} x_{p(p-1)+2} \dots x_{p^2}),$$

$$T = (x_1, x_{p+1}, \dots, x_{p(p-1)+1}) (x_2, x_{p+2}, \dots, x_{p(p-1)+2}) \dots (x_p, x_{2p}, \dots, x_{p^2}),$$

sappiamo (*) che il gruppo (G) si genera con le due sostituzioni elementari S e T ; le sue p^2 sostituzioni sono date dalla formola:

$$u = S^\alpha T^\beta \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0, 1, 2, \dots, p-1 \\ \beta = 0, 1, 2, \dots, p-1. \end{array} \right.$$

Costruiamo una funzione razionale delle radici che sia inalterata nel valore numerico dalle sostituzioni del gruppo ciclico $S, S^2, \dots, S^p = 1$ ed alterata dalle altre sostituzioni di (G). Analogamente si costruisca una funzione che appartenga al gruppo $T, T^2, \dots, T^p = 1$.

Tali funzioni, che denoteremo con Y_i, Z_i , sono radici ciascuna di un'equazione ciclica di grado p irriducibile nel campo (C). Se a questo campo aggiungiamo le funzioni Y_i, Z_i sappiamo (**) che il gruppo (G) dell'equazione (1) si riduce a quelle sostituzioni che lasciano invariate numericamente Y_i, Z_i , cioè si riduce alla sostituzione identica, che è l'unica sostituzione comune ai gruppi ciclici, generati dalle sostituzioni S e T . Onde, le radici della (1) sono funzioni razionali in (C) delle funzioni Y_i, Z_i .

Denotiamo con $F(Y) = 0, \varphi(Z) = 0$ le equazioni cicliche di grado p , irriducibili in (C). Siano:

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_p$$

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_p$$

(*) Cfr. NETTO, *Teoria delle sostituzioni*, 1885, pag. 130.

(**) Cfr. LUIGI BIANCHI, *Teoria dei Gruppi di sostituzioni*, 1889, pag. 152.

le radici di tali equazioni. Aggiungendo al campo (C) le radici dell'equazione:

$$\varepsilon^{p-1} + \varepsilon^{p-2} + \dots + \varepsilon + 1 = 0,$$

le equazioni $F(Y)=0$, $\varphi(Z)=0$, continuano, per il teorema di JORDAN (*), ad essere irriducibili nel nuovo campo $(C; \varepsilon)$. L'espressione:

$$u_1 = Y_1 + \varepsilon Y_2 + \varepsilon^2 Y_3 + \dots + \varepsilon^{p-1} Y_p$$

assume per le sostituzioni del gruppo ciclico:

$$\Gamma = (Y_1, Y_2, \dots, Y_p), \Gamma^2, \Gamma^3, \dots, \Gamma^p = 1,$$

appartenente all'equazione $F(Y)=0$, i seguenti valori:

$$u_1, \varepsilon u_1, \varepsilon^2 u_1, \dots, \varepsilon^{p-1} u_1,$$

che sono distinti fra loro, essendo u_1 diverso da zero.

Onde u_1 è radice dell'equazione binomia:

$$u^p = a, \tag{2}$$

essendo a un numero del campo $(C; \varepsilon)$.

Ampliando il campo $(C; \varepsilon)$ coll'aggiunzione di u_1 , il gruppo dell'equazione $F(Y)=0$ si riduce alla sostituzione identica; ciò significa che le radici della precedente equazione si possono esprimere in funzione razionale di u_1 con coefficienti del campo $(C; \varepsilon)$.

Analogamente, si ricava che le radici dell'equazione $\varphi(Z)=0$ possono esprimersi in funzione razionale delle radici dell'equazione binomia:

$$v^p = b, \tag{3}$$

essendo b un numero del campo $(C; \varepsilon)$.

Da quanto precede risulta che le radici della (1) possono esprimersi in funzione razionale delle radici delle equazioni binomie (2) (3) con coefficienti appartenenti al campo $(C; \varepsilon)$; ciò significa che l'aggiunzione al campo $(C; \varepsilon)$ delle radici di tali equazioni binomie riduce il gruppo (G) della (1) alla sostituzione identica. Sappiamo che, invece di aggiungere due irrazionali algebrici d'ordine p rispetto ad un determinato campo di razionalità, possiamo

(*) Cfr. LUIGI BIANCHI, citata opera, pag. 178.

aggiungere un solo irrazionale d'ordine p^2 del tipo:

$$\rho_1 = m u + n v, \quad (4)$$

essendo m, n numeri del campo $(C; \varepsilon)$, scelti in modo tale che tutti i valori:

$$\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{p^2}, \quad (5)$$

che l'espressione (4) assume quando ad u e v si sostituiscono le radici delle equazioni binomie (2), (3), siano differenti fra loro.

Fatte tali sostituzioni, le espressioni che figurano in (3) possono rappresentarsi col seguente quadro:

$$\begin{array}{ccccccc} \rho_1 & \varepsilon \rho_1 & \dots & \varepsilon^{p-1} \rho_1 & & & \\ \rho_2 & \varepsilon \rho_2 & \dots & \varepsilon^{p-1} \rho_2 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_p & \varepsilon \rho_p & \dots & \varepsilon^{p-1} \rho_p & & & \end{array}$$

Esse sono radici di un'equazione del tipo:

$$\rho^{p^2} + \alpha_1 \rho^{p(p-1)} + \alpha_2 \rho^{p(p-2)} + \dots + \alpha_{p-1} \rho^p + \alpha_p = 0, \quad (6)$$

di grado p^2 , irriducibile nel campo $(C; \varepsilon)$, a cui appartengono i coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$.

Per determinare i coefficienti della (6) basta eliminare dalle equazioni (2) (3) (4) le radici u, v ; la risultante così ottenuta è un'equazione Abeliana di grado p^2 in ρ , irriducibile nel campo $(C; \varepsilon)$, con gruppo formato di sostituzioni a periodo p .

2. Riassumendo i risultati fin qui ottenuti, potremo enunciare il seguente teorema:

La condizione necessaria e sufficiente, affinchè un'equazione di grado p^2 , essendo p un numero primo, irriducibile nel campo assoluto (C) di razionalità, a cui appartengono i suoi coefficienti, sia Abeliana a gruppo non ciclico, è che le sue radici siano funzioni razionali, con coefficienti appartenenti al campo $(C; \varepsilon)$, delle radici di un'equazione Abeliana del tipo (6).

Reciprocamente: se le radici di un'equazione $f(x) = 0$ di grado p^2 , irriducibile nel campo assoluto (C) di razionalità, a cui appartengono i suoi coefficienti sono funzioni razionali, con coefficienti appartenenti al campo

$(G; \varepsilon)$, delle radici di un'equazione del tipo (6), l'equazione $f(x) = 0$ è Abeliana, con gruppo formato di sostituzioni a periodo p .

3. Se indichiamo con S una sostituzione del gruppo (G) , in questo esistono le sostituzioni $S^2, S^3, \dots, S^p = 1$.

Sia T una sostituzione di (G) diversa dalle precedenti; esisteranno nel gruppo (G) le sostituzioni $T^2, T^3, \dots, T^p = 1$.

È facile vedere che le precedenti sostituzioni sono differenti fra loro. Se fosse:

$$S^\lambda = T^\beta, \quad (7)$$

risolvendo la congruenza:

$$\beta x \equiv 1 \pmod{p},$$

ed elevando ambo i membri della (7) all'esponente x , si otterrebbe:

$$S^{\lambda x} = T^{\beta x} = T;$$

il che è impossibile, avendo supposto che T non sia uguale ad una potenza di S .

Da quanto si è detto, risulta chiaro che dal gruppo (G) possiamo estrarre $(p+1)$ sostituzioni distinte, tali che esse e le loro potenze ricostruiscono il gruppo (G) .

Di tali $(p+1)$ sostituzioni, consideriamo i cicli contenenti la stessa lettera x_1 . Se uno dei menzionati cicli è formato dalle lettere $x_1, x_2, \dots, x_p$, consideriamo la somma:

$$y_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_p \quad (8)$$

e le altre analoghe alla precedente, ottenute sommando le lettere di ciascun ciclo che contiene l'elemento x_1 .

Le menzionate somme, che rappresentiamo con

$$y_1, y_2, \dots, y_{p+1}, \quad (9)$$

non possono avere due lettere comuni, perchè i cicli, dei cui elementi ci siamo serviti per costruire le precedenti somme, hanno in comune la sola lettera x_1 .

Si ha evidentemente:

$$p x_1 + \sum_{i=1}^{i=p^2} x_i = \sum_{i=1}^{i=p+1} y_i.$$

Denotando con q il coefficiente del secondo termine dell'equazione data (1), la precedente uguaglianza si può scrivere così:

$$x_1 = \frac{1}{p} \left(\sum_{i=1}^{i=p+1} y_i + q \right). \quad (10)$$

Avendo supposto che l'equazione data (1) è irriducibile nel campo assoluto (C) di razionalità, dalla (10) si ricava che almeno una delle espressioni:

$$y_1, y_2, \dots, y_{p+1}$$

non appartiene al campo (C) , per esempio y .

Poichè l'espressione y_1 , uguale ad $(x_1 + x_2 + \dots + x_p)$, rimane inalterata dalle sostituzioni del gruppo ciclico:

$$S, S^2, \dots, S^p = 1,$$

ed alterata nel valore numerico dalle sostituzioni di (G) , è radice di un'equazione ciclica di grado p , irriducibile in (C) . Aggiungendo al campo (C) l'espressione y_1 , il gruppo (G) di Galois si riduce al gruppo ciclico generato dalla sostituzione S , mentre il primo membro dell'equazione data (1) si scinde in p fattori, ciascuno di grado p in x , con coefficienti appartenenti al campo $(C; y_1)$. Si ha quindi:

$$f(x) = \varphi_1(x) \varphi_2(x) \dots \varphi_p(x). \quad (11)$$

Ricordiamo il seguente teorema (*):

Affinchè un'equazione ciclica di grado n , irriducibile in un certo campo (K) di razionalità, a cui appartengono i suoi coefficienti, goda della proprietà che, ogni funzione razionale in (K) delle sue radici si può esprimere in funzione lineare delle potenze di grado λ delle radici con coefficienti appartenenti a (K) , è necessario e sufficiente che fra le radici $x_1, x_2, \dots, x_n$ non esista alcuna relazione del tipo:

$$x_1^\lambda + x_2^\lambda + \dots + x_n^\lambda = c,$$

essendo c un numero di (K) ; d un divisore di n ; $d < n$; λ un numero intero positivo o negativo fissato ad arbitrio.

(*) Cfr. *Annali di Matematica*, 1917.

Giova notare che il menzionato teorema sussiste se le equazioni che danno le radici primitive t^{m^e} dell'unità, essendo t un divisore del grado n della data equazione ciclica, siano irriducibili nel dato campo (K) di razionalità.

È facile comprendere che qualunque funzione lineare nelle potenze di grado λ delle radici, si può esprimere in funzione lineare omogenea di tali potenze, se si ha:

$$x_1^\lambda + x_2^\lambda + \dots + x_n^\lambda = 0.$$

Per applicare il menzionato teorema alle equazioni cicliche di grado p , cioè alle equazioni:

$$\varphi_1(x) = 0; \quad \varphi_2(x) = 0, \dots, \quad \varphi_p(x) = 0, \quad (12)$$

che figurano in (11), è necessario provare che l'equazione che dà le radici primitive p^{m^e} dell'unità, cioè:

$$z^{p-1} + z^{p-2} + \dots + z + 1 = 0, \quad (13)$$

la quale è (*) irriducibile nel campo assoluto (C) di razionalità, è anche irriducibile nel campo ampliato $(C; y)$, in cui sono irriducibili le equazioni (12), essendo y radice di un'equazione ciclica di grado p , irriducibile in (C) . Tale dimostrazione è semplice, tenuto conto del teorema di JORDAN (**) e che i gradi p , $(p-1)$ sono numeri primi fra loro.

Consideriamo l'equazione ciclica di grado p :

$$\varphi_1(x) = 0, \quad (14)$$

irriducibile nel campo $(C; y_1)$, essendo:

$$y_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_p,$$

ove $x_1, x_2, \dots, x_p$ sono radici della (14); inoltre y_1 è differente da zero.

Poichè il coefficiente del secondo termine della (14) è diverso da zero, ogni funzione razionale delle radici della (14) si può esprimere in funzione lineare omogenea di tali radici con coefficienti appartenenti al campo $(C; y_1)$. Essendo l'equazione data (1) Abeliana, qualunque funzione razionale delle

(*) *Istituzioni di analisi algebrica di Alfredo Capelli*, 1902, pag. 638.

(**) Cfr. BIANCHI, opera citata, pag. 178.

radici $x_1, x_2, \dots, x_{p^2}$ con coefficienti appartenenti a (C) , si può esprimere in funzione razionale di una sola radice, per esempio x_1 .

Onde, denotando con $\psi(x_1, x_2, \dots, x_{p^2})$ il simbolo di una tale funzione, per quanto si è detto, possiamo scrivere:

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_{p^2}) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_p x_p, \quad (15)$$

essendo $a_1, a_2, \dots, a_p$ numeri del campo $(C; y_1)$; $x_1, x_2, \dots, x_p$ radici della (14); y_1 è radice di un'equazione ciclica di grado p , irriducibile nel campo (C) , a cui appartengono i suoi coefficienti. Le radici di tale equazione hanno forma analoga alla (8), da cui si ricavano scambiando le radici $x_1, x_2, \dots, x_p$ con le sostituzioni del gruppo (G) .

Applicando all'equazione in y il teorema testè enunciato, avremo che i numeri $a_1, a_2, \dots, a_p$, che figurano in (15), possono esprimersi in funzione lineare omogenea di $x_1, x_2, \dots, x_{p^2}$, con coefficienti appartenenti a (C) .

Dalla (15) si ricava che la funzione $\psi(x_1, x_2, \dots, x_{p^2})$ si può esprimere in funzione omogenea di secondo grado nelle radici $x_1, x_2, \dots, x_{p^2}$ con coefficienti appartenenti a (C) , avendo supposto che il coefficiente del secondo termine della data equazione sia diverso da zero.

4. Da quanto si è detto in questo articolo, possiamo enunciare il seguente teorema:

Un'equazione Abeliana di grado p^2 , a gruppo non ciclico, essendo p un numero primo, la quale sia irriducibile nel campo assoluto (C) di razionalità, a cui appartengono i suoi coefficienti, gode della seguente proprietà:

i numeri del corpo algebrico $(C; x_1, x_2, \dots, x_{p^2})$ possono esprimersi come forme quadratiche ennarie nelle radici $x_1, x_2, \dots, x_{p^2}$ considerate come variabili che soddisfano ad una data equazione, essendo $n = p^2$.

5. Determiniamo le condizioni necessarie e sufficienti affinché i numeri del corpo algebrico:

$$(C; x_1, x_2, \dots, x_{p^2})$$

possano esprimersi in funzione lineare omogenea delle radici con coefficienti appartenenti a (C) .

Sappiamo (*) che, perchè ciò avvenga è necessario e sufficiente che le

(*) Cfr. citata nota, *Rendiconti R. Accademia*, nonché *Giornale di Matematiche di Battaglini*, Anno 1903.

$$\underline{b_1 = b_2 = \dots = b_p = 0,}$$

cioè :

[illegible]

Al principio dell'articolo 3 abbiamo detto che dal gruppo (G) possiamo estrarre $p + 1$ sostituzioni distinte, tali che esse e le loro potenze ricostruiscono il gruppo (G) . Applicando alla (16) tali sostituzioni e ragionando come si è fatto precedentemente per dedurre il sistema (20), avremo in tutto $p + 1$ sistemi, ciascuno di p equazioni, analoghe alle precedenti. Di tali equazioni consideriamo solo quelle che contengono l'elemento a_1 , le quali sono in numero di $p + 1$. Sommando tali $p + 1$ equazioni, si ha che l'elemento a_1 viene ripetuto $p + 1$ volte, mentre tutti gli altri elementi $a_2, a_3, \dots, a_{p^2}$ figurano ciascuno una sola volta.

Si ha così una relazione del tipo seguente:

$$\sum_{i=1}^{i=p^2} a_i + p a_1 = 0. \quad (21)$$

Applicando alla (16) le p^2 sostituzioni del gruppo (G) e sommando le relazioni ottenute, avremo:

$$\sum_{i=1}^{i=p^2} x_i \times \sum_{i=1}^{i=p^2} a_i = 0.$$

Avendo supposto diverso da zero il coefficiente del 2° termine dell'equazione (1), dalla precedente relazione si ricava:

$$\sum_{i=1}^{i=p^2} a_i = 0.$$

Onde la (21) diventa:

$$a_1 = 0.$$

In modo analogo si dimostrano le seguenti uguaglianze:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{p^2} = 0.$$

Da quanto si è detto in questo articolo risulta che, se non si ha una

relazione del tipo:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_p = d,$$

essendo d un numero appartenente a (C) , non può sussistere alcuna altra relazione lineare fra le radici.

Possiamo quindi enunciare il seguente teorema, analogo ad altro (*), già dimostrato, relativo alle equazioni Abeliane a gruppo ciclico:

La condizione necessaria e sufficiente affinché un'equazione Abeliana di grado p^2 , irriducibile nel campo assoluto (C) di razionalità, a cui appartengono i suoi coefficienti, goda della proprietà, che i numeri del corpo algebrico:

$$(C; x_1, x_2, \dots, x_{p^2})$$

possano esprimersi in funzione lineare omogenea delle radici $x_1, x_2, \dots, x_{p^2}$ con coefficienti appartenenti a (C) , è che fra queste non esista alcuna relazione lineare del tipo:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_p = d,$$

essendo d un numero di (C) , e che il coefficiente del 2° termine dell'equazione data sia diverso da zero.

6. Applichiamo i risultati ottenuti in questa ed altra (*) Nota, alle equazioni Abeliane di 9° grado.

Ponendo $m = n = 1$, la formola (4) diventa:

$$\rho = u + v, \tag{22}$$

ove u, v sono radici delle equazioni:

$$u^3 = a; \quad v^3 = b. \tag{23}$$

È facile costruire l'equazione Abeliana di 9° grado, le cui radici sono:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= u + v; & \rho_2 &= u + \varepsilon v; & \rho_3 &= u + \varepsilon^2 v; & \rho_4 &= \varepsilon \rho_1; & \rho_5 &= \varepsilon^2 \rho_1; \\ \rho_6 &= \varepsilon \rho_2; & \rho_7 &= \varepsilon^2 \rho_2; & \rho_8 &= \varepsilon \rho_3; & \rho_9 &= \varepsilon^2 \rho_3, \end{aligned}$$

essendo ε radice dell'equazione:

$$\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0. \tag{24}$$

(*) Cfr. citati *Annali di Matematica*, 1917.

Se supponiamo a^2, b^2 diverse da zero e non uguali fra loro, le precedenti espressioni sono distinte, com'è facile verificare. Elevando a cubo la (22), si ottiene:

$$u^3 + v^3 + 3uv(u+v) = \rho^3.$$

Tenuto conto della (22) e della (23), la precedente equazione si può scrivere così:

$$3uv = \rho^3 - a - b,$$

ossia:

$$27ab\rho^3 = (\rho^3 - a - b)^3,$$

la quale si deduce dalla (6) dell'articolo 1, facendo $p = 3$.

Possiamo quindi enunciare il seguente teorema:

Un'equazione Abeliana di 9° grado, a gruppo non ciclico, irriducibile nel campo assoluto (C) di razionalità, a cui appartengono i suoi coefficienti, gode delle seguenti proprietà:

1) *le sue radici sono funzioni razionali delle radici dell'equazione Abeliana:*

$$27ab\rho^3 = (\rho^3 - a - b)^3,$$

con coefficienti appartenenti al campo (C; ε), a cui appartengono i numeri a, b , essendo ε radice dell'equazione

$$\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0,$$

a, b diversi da zero ed inoltre a^2 differente di b^2 ;

2) *ogni funzione razionale delle radici, con coefficienti appartenenti a (C), può esprimersi in funzione omogenea di 2° grado nelle radici, con coefficienti appartenenti a (C).*

7. Esaminiamo ora il caso in cui il gruppo dell'equazione Abeliana sia ciclico, cioè formato dalle sostituzioni:

$$S = (x_1, x_2, \dots, x_9), \quad S^2, S^3, \dots, S^8 = 1.$$

Sappiamo (*) che, se fra le radici della data equazione non esiste una

(*) Cfr. *Annali di Matematica*, già citati, 1917.

relazione lineare del tipo:

$$x_1 + x_4 + x_7 = a, \quad (25)$$

essendo a un numero di (C) , i numeri del corpo algebrico:

$$(C; x_1, x_2, \dots, x_9)$$

possono esprimersi in funzione lineare omogenea delle radici. Se fra queste non esiste una relazione del tipo:

$$x_1^2 + x_4^2 + x_7^2 = b, \quad (26)$$

essendo b un numero di (C) , i numeri del menzionato corpo algebrico possono esprimersi in funzione lineare omogenea dei quadrati delle radici. Se sussistono insieme (25) e (26), il 1° membro della data equazione ciclica si può mettere sotto forma di funzione di funzione.

In questo caso non si può avere una relazione del tipo:

$$x_1^3 + x_4^3 + x_7^3 = d, \quad (27)$$

essendo d un numero di (C) , perchè l'equazione data è irriducibile in (C) ; nè, per la stessa ragione, si può avere una relazione del tipo:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_7} = m, \quad (28)$$

essendo m un numero di (C) .

Da quanto si è detto in questo articolo, risulta il seguente teorema:

Un'equazione Abeliana a gruppo ciclico, la quale sia irriducibile nel campo assoluto (C) di razionalità, a cui appartengono i suoi coefficienti, gode di una delle seguenti proprietà:

1) *Il primo membro dell'equazione si può mettere sotto forma di funzione di funzione; in questo caso, ogni funzione razionale in (C) delle radici si può esprimere in funzione lineare dei cubi di queste, come anche in funzione lineare delle inverse delle radici con coefficienti appartenenti a (C) .*

2) *Il primo membro dell'equazione non si può mettere sotto forma di funzione di funzione; in questo caso ogni funzione razionale delle radici si può esprimere o in funzione lineare di queste, oppure in funzione lineare dei quadrati delle radici con coefficienti appartenenti a (C) .*

22 Novembre 1919.