**8. Wärmeleitungsfähigkeit des Kupfers, aus dem stationären und variablen Temperaturzustand bestimmt, und Wärmefluss in einer durch Kühlwasser bespülten Endfläche eines Wärmeleiters;
von W. Schaufelberger.**

L. Holborn und W. Wien¹⁾ haben in der Zeitschrift für deutsche Ingenieure das umfangreiche Material von Bestimmungen des inneren Wärmeleitungsvermögens der Metalle zusammengestellt und die Resultate der verschiedenen Beobachter zu Mittelwerten vereinigt. Dabei wurden die Beobachter in zwei Gruppen geteilt, wovon die eine mit dem stationären, die andere mit dem variablen Temperaturzustande gearbeitet hatte. Die Resultate der einzelnen Beobachter weisen recht bedeutende Unterschiede auf, die wohl grösstentheils in der Verschiedenheit der Materialien, zum Teil aber auch in den verwendeten Methoden begründet liegen. Greift man aus der Reihe dieser Metalle das gutleitende Kupfer heraus, wofür die grösste Anzahl von Bestimmungen vorliegen, so zeigt sich, dass ein Unterschied von ca. 5 Proc. besteht zwischen den Mittelwerten des Wärmeleitungsvermögens, die sich aus den Beobachtungen bei stationärem und variabelm Temperaturzustande ergeben haben in dem Sinne, dass der erstere Mittelwert grösser ist. Wenn auch, in Anbetracht der grossen Unterschiede in den Resultaten der einzelnen Beobachter, diesem Betrag kein zu grosses Gewicht beigelegt werden darf, so verdient er doch der Beachtung und macht es wünschenswert, dass für dasselbe Material das Leitungsvermögen nach zwei verschiedenen Methoden untersucht wird, wovon die eine den stationären, die andere den variablen Temperaturzustand benutzt. Dies ist in der vorliegenden Arbeit unter Benutzung von reinem Kupfer geschehen. Den Anlass zur Arbeit gab die Wahrnehmung, dass Versuche mit Benutzung der ver-

1) L. Holborn u. W. Wien, Zeitschrift für Deutsche Ingenieure 40. p. 45. 1896.

schiedenen Temperaturzustände zu sehr beträchtlich abweichenden Resultaten führten. Als nach dem Grund dieser Abweichungen gesucht wurde, zeigte sich, dass das Resultat und damit die Brauchbarkeit einer Methode sehr wesentlich davon abhängig ist, was für Voraussetzungen man macht über die Vorgänge in den Grenzflächen des Leiters, wenn diese, wie das sehr häufig vorkommt, z. B. durch einen Wasserstrahl gekühlt werden.

Es darf wohl allgemein angenommen werden, dass der grösste Teil des Fehlers, der in der verwendeten Methode begründet liegt, seine Ursache darin hat, dass die thatsächlich in der Grenzfläche vorherrschenden Verhältnisse von den in der Methode angenommenen verschieden sind.

Ich werde zeigen, dass bei richtiger Berechnung der Versuche, der stationäre und variable Zustand zum gleichen Resultate führt.

Vorerst will ich näher auf die Erscheinungen in den Grenzflächen eintreten.

1. Wärmebewegung in einer durch Kühlwasser bespülten Endfläche eines Wärmeleiters.

Es wird sehr häufig bei Bestimmungen des Wärmeleitungsvermögens die Annahme gemacht, dass die Temperatur einer von Wasser bespülten Fläche identisch ist mit der Temperatur des Kühlwassers. Dies ist aber nicht der Fall, wie ein einfacher Versuch zeigt.

Ich benutzte zu diesem Versuch einen massiven Kupferstab von 20 cm Länge und 4 cm Durchmesser. Ueber die ganze Länge waren gleichmässig die einen Lötstellen von sieben Thermoelementen verteilt. Vom ersten und siebenten Element lagen die Lötstellen nahe an je einem Endquerschnitt.

Die beiden Endquerschnitte des Stabes wurden, der eine mit Kühlwasser der Leitung von der Temperatur u_0 , der andere mit Dampf von siedendem Wasser von der Temperatur U , kräftig bespült.

Es ist klar, dass unter diesen gleichbleibenden äusseren Verhältnissen sich im Stab eine stationäre Temperaturverteilung einstellte. Mit Rücksicht darauf, dass der Stabquer-

schnitt gross, und das Stabmaterial sehr gutleitendes Kupfer ist, fällt die Wärmemenge, die durch die Mantelfläche des Cylinders abgegeben wird, klein aus gegen diejenige, die durch den Querschnitt in der Richtung des Temperaturgefälles fliesst. Wenn wir sie vernachlässigen, so ist die Temperaturverteilung im Leiter eine lineare Function der in der Axenrichtung gemessenen Abscisse x und lässt sich darstellen als:

$$S = S_0 + (S_l - S_0) \frac{x}{l},$$

wo S die Temperatur des Querschnittes im Abstand x vom gekühlten Ende, l die Länge des Stabes und S_0 die Temperatur des gekühlten Endes, S_l diejenige des durch Dampf geheizten Endes bedeutet.

Der Versuch zeigte, dass die Temperaturverteilung sich in der That recht angenähert durch obige Form darstellt. Von Wichtigkeit für unsere Zwecke ist jedoch die Thatsache, dass sich sehr grosse Unterschiede zwischen Kühlwassertemperatur und Endquerschnitt des Leiters einstellten.

Der Versuch ergab:

$$u_0 = 6,10^\circ, \quad S_0 = 12,75^\circ, \quad S_l = 94,07^\circ, \quad U = 98,55^\circ,$$

somit

$$S_0 - u_0 = 6,65^\circ, \quad U - S_l = 4,48^\circ,$$

also einen Temperaturunterschied von $6,65^\circ$ zwischen gekühltem Stabende und Kühlwasser und einen solchen von $4,48^\circ$ zwischen Wasserdampf und geheiztem Ende.

Im ersten Moment wird man erstaunt sein über die Grösse dieser Beträge, sie lässt sich aber verstehen, wenn man bedenkt, dass der Kupferstab von einem sehr kräftigen Wärmestrom durchflossen ist.

Eine weitere Verfolgung dieser Erscheinung zeigte in Uebereinstimmung mit anderen Beobachtern¹⁾, dass diese Temperatursprünge sich sehr wenig ändern, wenn man die Ausflussgeschwindigkeit von Wasser und Dampf von einer nicht sehr hoch gelegenen Grenze an aufwärts innerhalb eines weiten Bereiches verändert.

1) E. Grüneisen, Ann. d. Phys. 3. p. 43. 1900.

Es wurde alsdann der Temperatursprung zwischen Leiterende und Kühlwasser in seiner Abhängigkeit vom *Temperaturgefälle* am gekühlten Ende untersucht und innerhalb weiter Grenzen diesem proportional gefunden. Nähere Angaben sind hier überflüssig, da später diesbezügliche Versuche mit dem Stab angeführt werden, dessen Wärmeleitungsvermögen bestimmt wird.

Dieser Temperatursprung zwischen gekühltem Leiterende und Kühlwasser lässt sich zwanglos erklären. Bei der Bepülung von Kupfer mit Wasser bleibt eine dünne Wasserschicht am Kupfer unbeweglich hängen, während die über dieser stagnirenden Wasserschicht gelegenen anderen Schichten eine mit der Entfernung von der Kuperoberfläche rasch sich vergrössernde Geschwindigkeit aufweisen.

Dass die zunächst an der Metallfläche gelegene Flüssigkeit wirklich keine Bewegung ausführt, folgt unter anderem aus den Erscheinungen beim Ausfluss von Wasser aus capillaren Röhren. Nur unter der Annahme, dass die Reibungsconstante zwischen einer benetzenden Flüssigkeit und einem festen Körper unendlich gross ist, d. h. dass die der Röhrenwandung zunächst gelegene Schicht sich nicht verschiebt, bekommt man Uebereinstimmung zwischen den berechneten Ausflussmengen mit denen des Versuches.

Damit nun der Wärmestrom diese haftende Wasserschicht durchsetze, ist bei dem relativ kleinen Wärmeleitungsvermögen des Wassers ein sehr grosses Temperaturgefälle notwendig, sodass diese beträchtlichen Temperaturdifferenzen auftreten. Es ist nicht anzunehmen, dass es für ausgedehnte Flächen gestattet sei, diese haftende Flüssigkeitsschicht von constanter Dicke vorauszusetzen, sodass man auch schliessen muss, dass es eine Sache der Unmöglichkeit ist, grosse Flächen, durch die ein reger Wärmestrom geht, durch einen Wasserstrahl gleichmässig zu kühlen. Weiter ist die Wahrnehmung erklärlich, dass von einer gewissen Geschwindigkeit des fliessenden Wassers an eine weitere Vergrösserung dieser Geschwindigkeit nur noch von sehr geringem Einfluss auf den Temperatursprung ist, weil das Haupthindernis für die Wärme die haftende Schicht bildet.

Macht man, indem man sich mit einer ersten Annäherung

an die wirklichen Verhältnisse begnügt, die Annahme, dass der Temperatursprung vom Endquerschnitt zum Kühlwasser wirklich nur von der haftenden Wasserschicht herrühre, und dass diese Schicht für die hier vorliegenden kleinen Flächen von überall gleicher Dicke sei, so kann man die Dicke dieser Schicht berechnen und dann durch einen Vergleich dieser Dicke mit den Durchmessern von Capillaren, die für die Messung der Ausflussgeschwindigkeit gedient haben, sich einen Ueberschlag bilden über die Zulässigkeit dieser Annahme, weil die Dicke dieser Wasserschicht klein ausfallen muss gegen den Röhrendurchmesser.

Wird die Temperatur des strömenden Kühlwassers als Null angenommen, und ist u_l die Temperatur der metallischen Endfläche und $\partial u / \partial x$ das Temperaturgefälle im Metall am gekühlten Ende, weiter δ die Dicke der haftenden Wasserschicht, q die Grösse der zu kühlenden Fläche und κ bez. w das Leitungsvermögen für Metall und Flüssigkeit, so ist:

$$w q \frac{u_l}{\delta} = \kappa q \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Bei äusserst kleiner Schichtdicke kann natürlich nur von stationärem Wärmefluss in dieser Schicht gesprochen werden, da der stationäre Zustand in äusserst kurzer Zeit zu stande kommt.

Es ergibt sich:

$$\delta = \frac{w u_l}{\kappa \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)}.$$

Aus dem oben (p. 591) angegebenen Versuch folgt:

$$u_l = 6,65^\circ, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{81,32}{20} = 4,06,$$

weiter gilt für reines Kupfer

$$\kappa = 0,94$$

und nach H. F. Weber für Wasser

$$w = 0,00124.$$

Daraus kommt:

$$\delta = 0,02 \text{ mm.}$$

Poisseeuille verwendete für seine Messungen Capillaren von 0,252 mm und 0,135 mm Durchmesser, woraus man er-

kennt; dass diese Schicht klein ist gegen den Röhrendurchmesser.

Eine genauere analytische Verfolgung der Erscheinung ohne diese vereinfachenden Annahmen wurde sich nicht ohne erhebliche Schwierigkeiten durchführen lassen und würde mich zu weit vom Ziele abführen.

Für das folgende mag es genügen, wenn diese Betrachtungen gezeigt haben, dass man in erster Annäherung für die Temperatur u_l einer mit Wasser von der Temperatur Null bespülten Fläche setzen darf:

$$(1) \quad u_l = \frac{x}{w} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=l} = W \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=l},$$

wo W eine Constante und $(\partial u / \partial x)_{x=l}$ das Temperaturgefälle im letzten metallischen Leiterquerschnitt ist.

Jedenfalls kommt man mit dieser Annahme der Wirklichkeit näher als mit der Annahme:

$$u_l = 0$$

durch welche die Temperatur von Kühlwasser und gekühltem Stabende als identisch vorausgesetzt wird. Gerade diese letztere Annahme findet man aber bei der Behandlung von Wärmeleitungsaufgaben fast durchweg gemacht.

2. Princip und Theorie der Messmethoden.

Für die erste Methode, bei der der stationäre Temperaturzustand zur Verwendung kam, wurde der stabförmige Leiter elektrisch geheizt durch einen constanten Strom. Die Enden waren durch Wasserspülung gekühlt. Die Temperatur wurde durch Thermoelemente in der Mitte und in zwei symmetrisch gelegenen Punkten nahe den Enden beobachtet. Der spezifische Widerstand wurde durch besondere Versuche für die zwischen den Lötstellen gelegenen Leiterstücke bestimmt. Diese Methode ist im Princip diejenige, die Kohlrausch¹⁾ zur Bestimmung des Quotienten aus dem elektrischen Leitungsvermögen und Wärmeleitungsvermögen angegeben und die Jaeger und Diesselhorst²⁾ praktisch durchgeführt haben.

1) F. Kohlrausch, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin (II) p. 709. 1899.

2) W. Jaeger u. H. Diesselhorst, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin (II) p. 719. 1899.

Bei der zweiten Methode, wo der variable Zustand zur Anwendung kam, wurde, nachdem der stationäre Zustand erreicht war, der Heizstrom unterbrochen und der Temperaturabfall beobachtet.

Es ist bemerkenswert, dass bei beiden Bestimmungen die Grösse des äusseren Wärmeleitungsvermögens nur von untergeordneter Bedeutung ist, indem sie nur im Betrag von ca. 1 Proc. in die Versuche eingeht bei den vorliegend getroffenen Versuchsanordnungen.

Wir gehen über zur Betrachtung des Wärmeflusses im linearen stromdurchflossenen Leiter und behandeln die beiden Probleme:

Stationäre Temperaturverteilung in einem stromdurchflossenen Leiter, dessen Enden auf constanter Temperatur gehalten werden und zweitens Ermittlung des Abfalles der Temperatur aus diesem Zustand bei Stromunterbruch.

Wir beziehen die Leiterelemente auf eine Axe, deren Nullpunkt mit der Leitermitte und deren Richtung mit der Leiteraxe zusammenfällt und bezeichnen sie durch ihre Abstände x vom Nullpunkt.

Wir führen die nachfolgenden Benennungen ein:

$2l$ Länge des Leiters, p Umfang des Leiters, q Querschnitt des Leiters, κ inneres Wärmeleitungsvermögen, h äusseres Wärmeleitungsvermögen, ω_0 spezifischer Widerstand bei der Temperatur des Kühlwassers, α Temperaturcoefficient des Widerstandes auf die gleiche Temperatur bezogen, ρ Dichte, c spezifische Wärme, I Stromstärke in absoluten elektromagnetischen Einheiten (C.G.S.), J Arbeitsäquivalent der Wärmeinheit, u variable Temperatur, von der Temperatur des Kühlwassers aus gerechnet, t Zeit.

Alsdann lautet die Differentialgleichung für die Wärmeverteilung:

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{h p}{q \rho c} - \frac{I^2 \omega_0 \alpha}{J q^2 \rho c} \right) u + \frac{I^2 \omega_0}{J q^2 \rho c}.$$

Es ist dabei vorausgesetzt, κ , h , ρ und c seien von der Temperatur unabhängig. Dies darf bei den kleinen Temperaturintervallen von nur etwa 2—3°, wie sie in den Versuchen vorkommen, ohne Bedenken angenommen werden. Der spezifische Widerstand ist als lineare Temperaturfunction eingeführt.

Der Thomseffect ist nicht berücksichtigt. Er würde einen äusserst kleinen Einfluss haben, da man die Temperatur in der Mitte des Leiters ermittelt; er hebt sich hingegen vollkommen heraus, wenn man den Heizstrom kehrt, was immer gemacht wurde.

Es gelten weiter folgende Grenzbedingungen für die bespülten Enden, wenn wir Rücksicht nehmen auf Gleichung (1) im ersten Abschnitt:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (u)_{x=l} = -W \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=l} \\ (u)_{x=-l} = +W \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=-l} \end{array} \right\} \text{ für alle } t.$$

W ist eine Constante, vorausgesetzt, dass die Bespülung der Endquerschnitte eine kräftige und gleichmässige ist.

Für den Anfangszustand kann man setzen:

$$(4) \quad u = \varphi(x), \quad \text{für } t = 0.$$

A. Der stationäre Zustand.

Wir bestimmen zuerst die stationäre Temperaturverteilung. Bedeutet S die stationäre Temperatur, so ist:

$$\frac{dS}{dt} = 0.$$

Daraus ergibt sich die Differentialgleichung für die stationäre Temperaturverteilung als:

$$(5) \quad \frac{d^2 S}{dx^2} - \left(\frac{hp}{\pi q} - \frac{I^2 \omega_0 \alpha}{J q^2 \pi} \right) S + \frac{I^2 \omega_0}{J q^2 \pi} = 0.$$

Die Grenzbedingungen (3) gehen über in

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_{x=l} = -W \left(\frac{dS}{dx} \right)_{x=l} \\ S_{x=-l} = W \left(\frac{dS}{dx} \right)_{x=-l} \end{array} \right.$$

Statt in der durch Gleichung (6) angedeuteten Weise vorzugehen, könnten wir für den stationären Temperaturzustand in einfacherer Weise dadurch einen unbekannten Vorgang in den Grenzflächen aus der Rechnung eliminieren, dass wir die stationäre Temperatur σ in zwei Leiterquerschnitten $x = \pm l_1$ beobachten. Genau

den gleichen Dienst, wie die obigen, unter (6) angeführten Gleichungen, leistet uns dann die einfachere nachfolgende:

$$(6^*) \quad S_{x=\pm l_1} = \sigma.$$

Es ist nur notwendig, dass der Temperatursprung beim Uebergang vom Kühlwasser zum Metall beachtet wird, entweder durch die Einführung in die Rechnung durch Grenzbedingungen (6), oder aber durch Elimination mit Hülfe der Gleichungen (6*).

Wir wollen für das Weitere die etwas complicirteren Bedingungen (6) beibehalten, weil diese beim variablen Zustand doch verwendet werden müssten.

Die Lösung der Differentialgleichung (5) hat die Form:

$$(7) \quad S = A e^{\nu x} + B e^{-\nu x} + \frac{R}{\nu^2},$$

wobei wir setzen:

$$(8) \quad \nu^2 = \frac{h p}{\kappa q} - \frac{I^2 \omega_0 \alpha}{J q^2 \kappa},$$

$$(9) \quad R = \frac{I^2 \omega_0}{J q^2 \kappa},$$

A und B sind Integrationsconstanten.

Führt man den Wert S aus Gleichung (7) ein in Gleichung (6), so ergibt sich:

$$A = B = \frac{-R}{\nu^2} \frac{1}{e^{\nu l} + e^{-\nu l} + W \nu (e^{\nu l} - e^{-\nu l})}$$

und es geht (7) über in:

$$(10) \quad S = \frac{R}{\nu^2} \left[1 - \frac{e^{\nu x} + e^{-\nu x}}{e^{\nu l} + e^{-\nu l} + W \nu (e^{\nu l} - e^{-\nu l})} \right].$$

Es sei jetzt l_1 der Abstand der äusseren Lötstellen von der mittleren, dann ist die Temperatur dieser äusseren Lötstellen

$$(11) \quad S_{x=l_1} = S_{x=-l_1} = \frac{R}{\nu^2} \left[1 - \frac{e^{\nu l_1} + e^{-\nu l_1}}{e^{\nu l} + e^{-\nu l} + W \nu (e^{\nu l} - e^{-\nu l})} \right]$$

und

$$S_x - S_{x=\pm l_1} = \frac{\frac{R}{\nu^2} (e^{\nu l_1} + e^{-\nu l_1})}{e^{\nu l} + e^{-\nu l} + W \nu (e^{\nu l} - e^{-\nu l})} \left\{ 1 - \frac{e^{\nu x} + e^{-\nu x}}{e^{\nu l_1} + e^{-\nu l_1}} \right\},$$

oder mit Gleichung (11)

$$(12) \quad S_x - S_{x=\pm l_1} = \left(\frac{R}{\nu^2} - S_{x=\pm l_1} \right) \left(1 - \frac{e^{\nu x} + e^{-\nu x}}{e^{\nu l_1} + e^{-\nu l_1}} \right).$$

Der Beobachtung sind zugänglich die Grössen

$$S_{x=l_1} = S_{x=-l_1} \quad \text{und} \quad S_{x=0} - S_{x=\pm l_1}.$$

Setzt man in (12) x gleich Null, so kommt:

$$S_{x=0} - S_{x=\pm l_1} = \left(\frac{R}{\nu^2} - S_{x=\pm l_1} \right) \left(1 - \frac{2}{e^{\nu l_1} + e^{-\nu l_1}} \right).$$

Berücksichtigt man, dass νl_1 eine sehr kleine Grösse, so kann man setzen:

$$\frac{2}{e^{\nu l_1} + e^{-\nu l_1}} = 1 - \frac{\nu^2 l_1^2}{2} + \frac{5}{24} \nu^4 l_1^4 - \frac{61}{720} \nu^6 l_1^6.$$

Setzt man für R seinen Wert aus Gleichung (9), so kommt:

$$S_{x=0} - S_{x=\pm l_1} = \left(\frac{I^2 \omega_0}{J \kappa q^2} - S_{x=\pm l_1} \cdot \nu^2 \right) \cdot \frac{l_1^2}{2} \left(1 - \frac{5}{12} \nu^2 l_1^2 + \frac{1}{3} \nu^4 l_1^4 \right).$$

Hieraus ergibt sich κ als:

$$(13) \quad \kappa = \frac{\frac{I^2 \omega_0}{J q^2}}{\frac{(S_{x=0} - S_{x=\pm l_1}) \frac{2}{l_1^2}}{1 - \frac{5}{12} \nu^2 l_1^2 + \frac{1}{3} \nu^4 l_1^4} + S_{x=\pm l_1} \cdot \nu^2}.$$

Die Grössen $S_{x=0} - S_{x=\pm l_1}$ und $S_{x=\pm l_1}$, wovon man die letztere nur angenähert zu kennen braucht, werden durch je eine Galvanometerablesung geliefert. Die Grösse ν^2 , die κ noch enthält, kommt nur als kleines Correctionsglied vor, es genügt, wenn man dort für κ einen Näherungswert setzt. Das äussere Wärmeleitungsvermögen h , das gleichfalls in die Grösse ν^2 eingeht, wird durch besondere Beobachtungen bestimmt, ebenso die Grösse ω_0 , der spezifische Widerstand. Diese letztere Grösse muss genau ermittelt werden, weil sie ausser in ν^2 auch im Zähler vorkommt.

B. Der variable Zustand nach Unterbrechung des Stromdurchanges.

Bezeichnet man die variable Temperatur nach Unterbrechung des Stromdurchanges mit v , so hat sie der Differentialgleichung zu genügen:

$$(14) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\kappa}{\varrho c} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{h v}{q \varrho c} v,$$

und den räumlichen Grenzbedingungen:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_{x=+l_1} = -W \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=l_1} \\ v_{x=-l_1} = W \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=-l_1} \end{array} \right\} \text{ für alle } t,$$

und der zeitlichen Grenze:

$$(16) \quad v_{x=0} = S = \frac{R}{\nu^2} \left[1 - \frac{e^{\nu x} + e^{-\nu l}}{e^{\nu l} + e^{-\nu l} + W \nu (e^{\nu l} - e^{-\nu l})} \right].$$

Setzt man in üblicher Weise:

$$v = T \cdot X,$$

wo T nur eine Function der Zeit, X nur eine Function der Abscisse x ist, so lässt sich leicht ein particuläres Integral finden. Wir setzen diesen Wert in die Differentialgleichung (14) ein und bekommen:

$$X \frac{dT}{dt} = \frac{\kappa}{q c} T \frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{h p}{q c} X T,$$

oder

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \frac{\kappa}{q c} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{h p}{q c} = -a^2.$$

Die Grösse $-a^2$ ist eine Constante und zwar eine wesentlich negative Constante, indem, wie wir sofort sehen werden, durch das Minuszeichen unendlich hohe Temperaturen aus der Lösung ausgeschlossen werden. Aus dem ersten Teil der Gleichung folgt, dass die Grösse $-a^2 x$ nicht enthalten kann, aus dem mittleren, dass sie t nicht enthalten kann, sie ist also constant.

Die obestehende Gleichung zerfällt in die zwei Gleichungen:

$$\frac{dT}{dt} = -a^2 T \quad \text{und} \quad \frac{d^2 X}{dx^2} = - \left(a^2 \frac{q c}{\kappa} - \frac{h p}{q \kappa} \right) X;$$

ihre Lösungen sind:

$$T = e^{-a^2 t} \quad \text{und} \quad X = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x,$$

wo A und B Integrationsconstanten sind und λ den Wert hat:

$$\lambda = \sqrt{a^2 \frac{q c}{\kappa} - \frac{h p}{\kappa q}},$$

oder:

$$a^2 = \lambda^2 \frac{\kappa}{q c} + \frac{h p}{q c}.$$

Setzt man die Werte von T und X in v ein, so kommt als gesuchtes particuläres Integral:

$$(17) \quad v = e^{-\left(\lambda^2 \frac{\kappa}{\varrho c} + \frac{h p}{q \varrho c}\right) t} \{A \sin \lambda x + B \cos \lambda x\}.$$

Diese Lösung muss den Grenzbedingungen unter (15) genügen. Setzt man sie in (15) ein und vereinfacht, so kommt:

$$\begin{aligned} B \cos \lambda l - W \lambda B \sin \lambda l &= 0, \\ W \lambda A \cos \lambda l + A \sin \lambda l &= 0. \end{aligned}$$

Aus der Symmetrie der Temperaturen für den Querschnitt $x=0$ folgt:

$$A=0, \quad B \neq 0$$

und

$$\cos \lambda l - W \lambda \sin \lambda l = 0,$$

somit

$$(18) \quad \operatorname{tg} \lambda l = \frac{1}{\lambda W}.$$

Diese Gleichung besitzt unendlich viele reelle Wurzeln in λ , die ihrer Grösse nach mit λ_1, λ_2 , etc. bezeichnet werden mögen.

Der allgemeinste Ausdruck, der der Differentialgleichung (14) und den beiden Grenzbedingungen (15) genügt, lautet:

$$(19) \quad \begin{cases} v = e^{-\left(\lambda_1^2 \frac{\kappa}{\varrho c} + \frac{h p}{q \varrho c}\right) t} B_1 \cos \lambda_1 x \\ \quad + e^{-\left(\lambda_2^2 \frac{\kappa}{\varrho c} + \frac{h p}{q \varrho c}\right) t} B_2 \cos \lambda_2 x + \dots \end{cases}$$

Hier sind noch unbestimmt die Coefficienten B_1, B_2 , etc. Zu deren Ermittlung wird die zeitliche Grenze unter (16) herbeigezogen. Sie liefert:

$$S = B_1 \cos \lambda_1 x + B_2 \cos \lambda_2 x + \dots$$

Wir multipliciren auf beiden Seiten mit $\cos(\lambda_n x) dx$ und integriren von $-l$ bis $+l$, dann ist:

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{-l}^l \{B_1 \cos \lambda_1 x + B_2 \cos \lambda_2 x + \dots\} \cos(\lambda_n x) dx \\ &= \int_{-l}^{+l} S \cos(\lambda_n x) dx. \end{aligned} \right.$$

Um die linke Seite der obigen Gleichung zu berechnen, bestimmen wir vorerst

$$\int_{-l}^l B_i \cos(\lambda_i x) \cos(\lambda_n x) dx$$

für $n \neq i$ und $n = i$.

Es ist:

$$\begin{aligned} \int_{-l}^{+l} B_i \cos(\lambda_i x) \cos(\lambda_n x) dx \\ = B_i \left[\frac{\sin(\lambda_i x) \cos(\lambda_n x) \lambda_i - \sin(\lambda_n x) \cos(\lambda_i x) \lambda_n}{(\lambda_i - \lambda_n)(\lambda_i + \lambda_n)} \right]_{-l}^{+l} \\ = 2 B_i \frac{\sin(\lambda_i l) \cos(\lambda_n l) \lambda_i - \sin(\lambda_n l) \cos(\lambda_i l) \lambda_n}{(\lambda_i - \lambda_n)(\lambda_i + \lambda_n)} = 0, \end{aligned}$$

wenn $i \neq n$, indem der Zähler verschwindet, wie aus Gleichung (18) sich leicht zeigen lässt.

Es ist:

$$\operatorname{tg} \lambda_i l = \frac{1}{W \lambda_i} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \lambda_n l = \frac{1}{W \lambda_n},$$

oder:

$$\frac{\sin \lambda_i l}{\cos \lambda_i l} \lambda_i = \frac{\sin \lambda_n l}{\cos \lambda_n l} \lambda_n$$

und

$$\sin(\lambda_i l) \cos(\lambda_n l) \lambda_i - \sin(\lambda_n l) \cos(\lambda_i l) \lambda_n = 0.$$

Für den Fall $i = n$ verschwinden Zähler und Nenner gleichzeitig, man bekommt für das Integral den unbestimmten Wert $0/0$. Wir differenzieren deshalb Zähler und Nenner nach λ_i und setzen dann $\lambda_i = \lambda_n$; es kommt:

$$\int_{-l}^l B_n \cos^2(\lambda_n x) dx = 2 B_n \left(\frac{l}{2} - \frac{\sin \lambda_n l \cos \lambda_n l}{2 \lambda_n} \right).$$

Wir haben deshalb:

$$\begin{aligned} \int_{-l}^{+l} (B_1 \cos \lambda_1 x + B_2 \cos \lambda_2 x + \dots) \cos(\lambda_n x) dx \\ = 2 B_n \left(\frac{l}{2} + \frac{\sin \lambda_n l \cos \lambda_n l}{2 \lambda_n} \right). \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der linken Seite von Gleichung (20) entnehmen wir den Wert von S aus Gleichung (10). Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l S \cos(\lambda_n x) dx &= \int_{-l}^l \left[1 - \frac{e^{\nu x} + e^{-\nu x}}{e^{\nu l} + e^{-\nu l} + W_\nu(e^{\nu l} + e^{-\nu l})} \right] \cos(\lambda_n x) dx \\ &= \frac{2R}{\nu^2} \sin \lambda_n l - \frac{2R \left\{ (e^{\nu l} + e^{-\nu l}) \frac{\lambda_n}{\lambda_n^2 + \nu^2} \sin \lambda_n l + (e^{\nu l} - e^{-\nu l}) \frac{\nu}{\lambda_n^2 + \nu^2} \cos \lambda_n l \right\}}{\nu^2 \{ e^{\nu l} + e^{-\nu l} + W_\nu(e^{\nu l} + e^{-\nu l}) \}} \\ &= \frac{2R}{\lambda_n \nu^2} \sin \lambda_n l - \frac{e^{\nu l} + e^{-\nu l} + W_\nu(e^{\nu l} - e^{-\nu l}) - (e^{\nu l} + e^{-\nu l}) \left(1 - \frac{\nu^2}{\lambda_n^2} + \frac{\nu^4}{\lambda_n^4} - \frac{\nu^6}{\lambda_n^6} \right) - W_\nu(e^{\nu l} - e^{-\nu l}) \left(1 - \frac{\nu^2}{\lambda_n^2} + \frac{\nu^4}{\lambda_n^4} - \frac{\nu^6}{\lambda_n^6} \right)}{e^{\nu l} + e^{-\nu l} + W_\nu(e^{\nu l} - e^{-\nu l})} \\ &= \frac{2R}{\lambda_n^3} \sin \lambda_n l \left\{ 1 - \frac{\nu^2}{\lambda_n^2} + \frac{\nu^4}{\lambda_n^4} \right\}. \end{aligned}$$

Dabei ist berücksichtigt, dass

$$\operatorname{tg}(\lambda_n l) = \frac{1}{\lambda_n W}.$$

Aus (20) kommt jetzt:

$$(21) \quad B_n = \frac{2R \sin(\lambda_n l) \left(1 - \frac{\nu^2}{\lambda_n^2} + \frac{\nu^4}{\lambda_n^4} \right)}{\lambda_n^3 \left(l + \frac{\sin \lambda_n l \cos \lambda_n l}{\lambda_n} \right)}.$$

Für die variable Temperaturverteilung ergibt sich somit, wenn man für R seinen Wert aus (9) setzt, die Form:

$$(22) \quad \left\{ v = 2 \frac{I^2 \omega}{J \pi q^2} \left[\frac{\sin(\lambda_1 l) \left(1 - \frac{\nu^2}{\lambda_1^2} + \frac{\nu^4}{\lambda_1^4} \right)}{\lambda_1^3 \left(l + \frac{\sin \lambda_1 l \cos \lambda_1 l}{\lambda_1} \right)} \cdot \cos(\lambda_1 x) \cdot e^{-\left(\lambda_1^2 \frac{x}{q c} + \frac{h \nu}{q c} \right) t} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\sin(\lambda_2 l) \left(1 - \frac{\nu^2}{\lambda_2^2} + \frac{\nu^4}{\lambda_2^4} \right)}{\lambda_2^3 \left(l + \frac{\sin \lambda_2 l \cos \lambda_2 l}{\lambda_2} \right)} \cos(\lambda_2 x) e^{-\left(\lambda_2^2 \frac{x}{q c} + \frac{h \nu}{q c} \right) t} + \dots \right] \right\}.$$

Schon nach sehr kurzer Zeit kann man in der obigen unendlichen Reihe sich auf das erste Glied beschränken und erhält, wenn wieder der Kürze wegen als Coefficient B_1 eingesetzt wird:

$$v = B_1 \cos(\lambda_1 x) e^{-\left(\lambda_1^2 \frac{x}{q c} + \frac{h \nu}{q c} \right) t}$$

und für den Temperaturverlauf in der Mitte und an den beiden Punkten $x = \pm l_1$, wo die Thermoelemente sich befinden:

$$v_{x=0} = B_1 e^{-\left(\lambda_1^2 \frac{\kappa}{\varrho c} + \frac{h p}{q \varrho c}\right) t},$$

$$v_{x=\pm l_1} = B_1 \cos(\lambda_1 l_1) e^{-\left(\lambda_1^2 \frac{\kappa}{\varrho c} + \frac{h p}{q \varrho c}\right) t}.$$

Aus dem Temperaturverlauf an diesen drei Stellen lässt sich die Grösse κ , das innere Wärmeleitungsvermögen, ermitteln.

Wir bilden:

$$(23) \quad \frac{v_{x=\pm l_1}}{v_{x=0}} = \cos \lambda_1 l_1$$

und zwar für verschiedene Beobachtungszeiten während des Temperaturabfalles, dann ist:

$$\lambda_1 = \frac{1}{l_1} \arccos \left(\frac{v_{x=\pm l_1}}{v_{x=0}} \right).$$

Ist $\cos(\lambda_1 l_1)$ und damit λ_1 während der ganzen Reihe constant, so gilt dasselbe für die Grösse w , die mit ihr verknüpft ist durch Gleichung (18).

Wir haben also mit der Bildung dieser Quotienten bez. in der Ermittlung der Grössen λ_1 ein Kriterium gewonnen, für die in der Einleitung gemachte Annahme über die Vorgänge in den bespülten Grenzflächen und wir können aus der Constanz dieser Quotienten rückwärts beurteilen, bis zu welchem Genauigkeitsgrad diese einfachen Annahmen als zutreffend angesehen werden dürfen. Die Werte von W , die sich aus Gleichung (18) ergeben, die aber kaum viel Interesse bieten, haben deshalb nur für die gerade vorliegenden Versuche Gültigkeit, weil der Wärmeleiter an seinen Enden in dicke Kupferplatten eingelassen ist (vgl. Fig. 1, weiter unten). Der Wert von W hat hier nur insofern Bedeutung, als sich daraus die weiteren Wurzeln λ_2, λ_3 etc. ergeben, die für die Beurteilung der Zeit, von welcher ab man alle übrigen Glieder in der unendlichen Reihe für v gegen das erste vernachlässigen kann, maassgebend sind.

Man bildet weiter:

$$\frac{(v_{x=0} - v_{x=\pm l_1})_{t_1}}{(v_{x=0} - v_{x=\pm l_1})_{t_2}} = e^{-\left(\lambda_1^2 \frac{\kappa}{\varrho c} + \frac{h p}{q \varrho c}\right) (t_2 - t_1)};$$

logarithmiert kommt:

$$\log \left\{ \frac{(v_{x=0} - v_{x=\pm l_1})_{t_1}}{(v_{x=0} - v_{x=\pm l_1})_{t_2}} \right\} = \frac{\left(\lambda_1^2 \frac{\kappa}{q c} + \frac{h p}{q q c} \right) (t_2 - t_1)}{2,303} = \delta (t_2 - t_1),$$

wenn δ das logarithmische Decrement für den Temperaturabfall bedeutet.

Hieraus ergibt sich:

$$(24) \quad \kappa = \frac{2,303 \delta q c - \frac{h p}{q}}{\lambda_1^2}.$$

Damit wäre κ aus dem variablen Zustand bestimmt.

Ich will noch einen Vergleich vornehmen zwischen der vorliegenden Lösung dieser Wärmeleitungsaufgabe und derjenigen, die sich ergibt, wenn man annimmt, dass die Endquerschnitte wirklich ideal auf die Temperatur des Kühlwassers sich kühlen würden.

Zu diesem Zweck betrachten wir die Wärmebewegung in einem Stab von der Länge $2L$ unter dieser Voraussetzung. Behält man sonst die Bezeichnung bei, so ist die Differentialgleichung für die Temperatur v^* in diesem Stab:

$$(25) \quad \frac{\partial v^*}{\partial t} = \frac{\kappa}{q c} \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} - \frac{h p}{q q c} v^*$$

und die räumlichen Grenzen:

$$(26) \quad (v^*)_{x=\pm l} = 0 \text{ für alle } t.$$

Diese Grenzen will ich fernerhin kurzweg als die idealen bezeichnen.

Die Lösung von Gleichung (25) hat nach (17) die Form:

$$v^* = e^{-\left(\lambda^2 \frac{\kappa}{q c} + \frac{h p}{q q c}\right)t} \{A^* \sin \lambda x + B^* \cos \lambda x\}.$$

Wegen (26) ist:

$$A^* = 0, \quad B^* \neq 0,$$

somit:

$$\cos \lambda L = 0$$

und

$$\lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L},$$

also

$$v^* = e^{-\left(\frac{\pi^2}{4L^2} \frac{\kappa}{\varrho c} + \frac{hp}{q\varrho c}\right)t} B_1^* \cos\left(\frac{\pi}{2L} x\right) \\ + e^{-\left(\frac{9\pi^2}{4L^2} \frac{\kappa}{\varrho c} + \frac{hp}{q\varrho c}\right)t} B_2^* \cos\left(\frac{3\pi}{2L} x\right) + \dots$$

Zur Bestimmung der Grössen B^* ist die Kenntnis des Zustandes zur Zeit $t = 0$ erforderlich. Wir können für unsere Zwecke von dieser Bestimmung absehen.

In Gleichung (19) haben wir gefunden, dass die Temperaturverteilung, unseres an den Enden mit Wasser bespülten Stabes von der Länge $2l$, die Form hat:

$$v = e^{-\left(\lambda_1^2 \frac{\kappa}{\varrho c} + \frac{hp}{q\varrho c}\right)t} B_1 \cos(\lambda_1 x) \\ + e^{-\left(\lambda_2^2 \frac{\kappa}{\varrho c} + \frac{hp}{q\varrho c}\right)t} B_2 \cos(\lambda_2 x) + \dots$$

Wir setzen:

$$(27) \quad \lambda_1 = \frac{\pi}{2L}, \quad \lambda_2 = \frac{3\pi}{2L}.$$

Dann geht obige Gleichung über in

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} v &= e^{-\left(\frac{\pi^2}{4L^2} \frac{\kappa}{\varrho c} + \frac{hp}{q\varrho c}\right)t} B_1 \cos\left(\frac{\pi}{2L} x\right) \\ &+ e^{-\left(\frac{9\pi^2}{4L^2} \frac{\kappa}{\varrho c} + \frac{hp}{q\varrho c}\right)t} B_2 \cos\left(\frac{3\pi}{2L} x\right) + \dots \end{aligned} \right.$$

Lassen wir jetzt eine so grosse Zeit verstreichen, von $t = 0$ an gerechnet, dass das zweite und damit alle folgenden Glieder in v und v^* gegen das erste verschwinden, so zeigt die Temperatur in dem bespülten Stab von der Länge $2l$ zeitlich und räumlich ähnlichen Verlauf mit derjenigen im Stab von der Länge $2L$ mit idealen Grenzbedingungen.

Bestimmt man also an dem bespülten Stab die Grösse L , d. h. die Länge desjenigen Stabes, der, mit den idealen Grenzbedingungen ausgerüstet, gleiche Temperaturverteilung zeigt, wie der bespülte Stab, so kann κ einfach ermittelt werden, indem:

$$(29) \quad 2,303 \delta = \frac{\pi^2}{4L^2} \frac{\kappa}{\varrho c} + \frac{hp}{q\varrho c}$$

und

$$(30) \quad \kappa = \frac{\left(2,303 \delta q c - \frac{hp}{q}\right) 4L^2}{\pi^2},$$

wenn δ das logarithmische Decrement des Temperaturabfalles bei Bespülung der Stabenden bedeutet.

L ergibt sich aber wie folgt:

Es sei beobachtet $v_x = \pm l_1$ und $v_x = 0$ für dieselbe Zeit, dann ist:

$$\frac{v_x = \pm l_1}{v_x = 0} = \cos \left(\frac{\pi}{2L} l_1 \right).$$

und

$$L = \frac{\pi l_1}{2 \arccos \left(\frac{v_x = \pm l_1}{v_x = 0} \right)}$$

Diese Rechnung zeigt, dass der Einfluss des Wärmeüberganges von der Endfläche an das Kühlwasser in erster Annäherung dadurch compensirt werden kann, dass man den Stab um die Strecke $2(L - l)$ länger voraussetzt.

Man erkennt, dass das Leitungsvermögen ohne Berücksichtigung dieser Correctur unter Annahme der idealen Grenzbedingungen zu klein ausfällt.

Wollte man bei den vorliegenden Versuchen das Vorhandensein eines Temperaturunterschiedes zwischen Kühlwasser und letztem Leiterquerschnitt negiren, und würde man nur die Temperatur der Stabmitte und des Kühlwassers bestimmen, so beginge man einen sehr beträchtlichen Fehler. Durch Ueberschlagsrechnung oder auch durch blosse Schätzung kann man bestimmen, was in den vorliegenden Versuchen als Länge des Leiters einzuführen wäre mit Rücksicht darauf, dass die beiden Stabenden des 7 mm im Durchmesser fassenden Leiters in Kreisscheiben von 4 mm Dicke und 5 cm Durchmesser stecken (vgl. Fig. 1). Jedenfalls müsste die Länge nicht unbeträchtlich kleiner vorausgesetzt werden als die wirkliche Länge, die 9,50 cm misst. Wir wollen sie schätzungsweise zu 9,0 cm annehmen. Wenn nun der Versuch nachher ergibt $2L = 9,6$ cm statt 9,0, so ist der Fehler in κ , da L quadratisch eingeht, ca. 12 Proc., also sehr gross. Man erkennt daraus, dass diese Correctur unter keinen Umständen ausser acht gelassen werden darf.

C. Bestimmung des Einflusses der Eigenbewegung des Magnetsystems im Galvanometer auf die Ablesungen.

Die vorliegende kleine Länge des Wärmeleiters hat den Vorteil, dass der Einfluss des äusseren Wärmeleitungsvermögens

sehr gering ist, was ich für einen bedeutenden Vorteil dieser Versuchsanordnung halte. Andererseits aber hat die kleine Länge zur Folge, dass die Temperatur v sehr rasch auf recht kleine Werte hinunter sinkt. Es ist deshalb notwendig, dass möglichst bald nach Unterbrechung des Heizstromes mit den Beobachtungen begonnen wird.

Diese frühzeitigen Ablesungen können zwei Correcturen notwendig machen. Erstens eine Correctur wegen dem sich eventuell noch bemerkbar machenden zweiten Glied in der unendlichen Reihe für v und zweitens eine Correctur, die von der noch nicht abgeklungenen Eigenbewegung des Magnet-systems im Galvanometer herrührt.

Die Beobachtungen wurden 5 Secunden nach Stromunterbruch begonnen. Es wird sich zeigen, dass von diesem Moment an das erste Glied in v allein von Bedeutung ist, dass also die erstgenannte Correctur nicht nötig wird. Die zweite Correctur hingegen muss angebracht werden und wir wollen deshalb zur Ermittlung derselben übergehen. Dazu ist es notwendig, dass wir die Bewegung des Magnetsystems im Galvanometer verfolgen.

Wir setzen vorläufig die Temperaturdifferenz der beiden Lötstellen, die den Thermostrom erzeugt, gleich einer beliebigen Zeitfunction

$$(31) \quad v = f(t), \quad (v)_{t=0} = S = f(0).$$

Bedeutet φ die Auslenkung des Systems aus der Ruhelage und setzen wir von ihr voraus, dass sie nur kleine Beträge annimmt, so kann man die Differentialgleichung für die Bewegung des Galvanometers schreiben:

$$(32) \quad a_1 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + a_2 \frac{d \varphi}{dt} + a_3 \varphi = f(t),$$

a_1, a_2, a_3 bedeuten Constanten.

Während der Zeit des Stromdurchganges war der Galvanometerkreis beständig geschlossen, sodass im Moment des Oeffnens das System in Ruhe war und einen bestimmten, der stationären Temperatur entsprechenden Ausschlag anzeigte. Diesen Ausschlag müssen wir ermitteln, da er in die Grenzbedingungen für obige Differentialgleichung eingeht.

Ist φ' die Auslenkung des Magnetsystems aus der Ruhelage, die dann auftritt, wenn $f(t)$ beständig den Wert hat:

$$f(0) = S,$$

so haben wir für die Bestimmung von φ' die Differentialgleichung

$$a_1 \frac{d^2 \varphi'}{dt^2} + a_2 \frac{d \varphi'}{dt} + a_3 \varphi' = f(0) = S.$$

Daraus ergibt sich der gesuchte Ausschlag als:

$$(\varphi')_{t=\infty} = \frac{S}{a_3},$$

weil für $t = \infty$ $d^2 \varphi' / dt^2$ sowohl als $d \varphi' / dt$ Null ist.

In der Differentialgleichung (32) treten also noch die nachfolgenden Grenzen hinzu:

$$(33) \quad \varphi = \frac{S}{a_3} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} \varphi \\ \frac{d \varphi}{dt} \end{matrix}} \right\} \text{für } t = 0.$$

$$(34) \quad \frac{d \varphi}{dt} = 0$$

Das allgemeine Integral der Gleichung (32) kann in der Form geschrieben werden¹⁾:

$$\varphi = \frac{1}{a_1 (r_1 - r_2)} \left[e^{r_1 t} \int_0^t f(t) e^{-r_1 t} dt - e^{r_2 t} \int_0^t f(t) e^{-r_2 t} dt \right] + C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

wo:

$$r_1 = \frac{-a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4 a_1 a_3}}{2 a_1},$$

$$r_2 = \frac{-a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4 a_1 a_3}}{2 a_1}.$$

C_1 und C_2 sind willkürliche Integrationsconstanten.

Setzt man mit Rücksicht darauf, dass das vorliegende Galvanometer periodische Bewegung aufweist:

$$a = - \frac{r_1 + r_2}{2},$$

$$b = - \frac{r_1 - r_2}{2 i},$$

so kommt:

1) F. A. Schulze, Wied. Ann. 66. p. 211. 1898; die dort angegebene Lösung ist nicht ganz richtig.

$$\varphi = \frac{-1}{a_1 b} \left[e^{-a t} \cos b t \int_0^t f(t) e^{a t} \cos b t d t \right. \\ \left. - e^{-a t} \sin b t \int_0^t f(t) e^{a t} \sin b t d t \right] \\ + e^{-a t} [(C_1 + C_2) \cos b t - i(C_1 - C_2) \sin b t].$$

Führen wir den Wert von v für $f(t)$ ein, indem wir zur Abkürzung schreiben:

$$(35) \quad f(t) = v = A_1 e^{-A_1 t} + A_2 e^{-A_2 t} + \dots,$$

wo:

$$A_1 = B_1 \cos \lambda_1 x, \quad A_2 = B_2 \cos \lambda_2 x, \dots \\ (36) \quad A_1 = \lambda_1^2 \frac{x}{q c} + \frac{h p}{q q c}, \quad A_2 = \lambda_2^2 \frac{x}{q c} + \frac{h p}{q q c}, \dots$$

so ergibt sich als Bewegungsgleichung für das Magnetsystem des Galvanometers:

$$\varphi = \frac{1}{a_1} \left[\frac{A_1 e^{-A_1 t}}{(A_1 - a)^2 + b^2} + \frac{A_2 e^{-A_2 t}}{(A_2 - a)^2 + b^2} + \dots \right. \\ \left. - e^{-a t} \left\{ \frac{A_1}{(A_1 - a)^2 + b^2} \left(\cos b t - \frac{A_1 - a}{b} \sin b t \right) \right. \right. \\ \left. + \frac{A_2}{(A_2 - a)^2 + b^2} \left(\cos b t - \frac{A_2 - a}{b} \sin b t \right) + \dots \right\} \\ \left. + e^{-a t} \{ (C_1 + C_2) \cos b t - i(C_1 - C_2) \sin b t \} \right].$$

Die beiden Gleichungen (33) und (34) für den Anfangszustand liefern:

$$C_1 + C_2 = \frac{S}{a_3}, \\ i(C_1 - C_2) = - \frac{a}{b} \frac{S}{a_3},$$

sodass:

$$\varphi = \frac{1}{a_3} \left[\frac{a^2 + b^2}{(A_1 - a)^2 + b^2} A_1 e^{-A_1 t} + \frac{a^2 + b^2}{(A_2 - a)^2 + b^2} A_2 e^{-A_2 t} + \dots \right. \\ \left. - e^{-a t} \left\{ \left(\frac{A_1 (a^2 + b^2)}{(A_1 - a)^2 + b^2} + \frac{A_2 (a^2 + b^2)}{(A_2 - a)^2 + b^2} + \dots \right) \cos b t \right. \right. \\ \left. - \left(\frac{A_1 (a^2 + b^2)}{(A_1 - a)^2 + b^2} \frac{A_1 - a}{b} + \frac{A_2 (a^2 + b^2)}{(A_2 - a)^2 + b^2} \frac{(A_2 - a)}{b} + \dots \right) \sin b t \right\} \\ \left. + S e^{-a t} \left(\cos b t + \frac{a}{b} \sin b t \right) \right],$$

und daraus mit Rücksicht auf (35):

$$(37) \left\{ \begin{aligned} \varphi &= C \cdot v \left[1 + \frac{(A_1 - a)^2 + b^2}{(A_2 - a)^2 + b^2} \frac{A_2}{A_1} e^{-(A_1 - A_2)t} + \dots \right. \\ &\quad - e^{-(a - A_1)t} \left\{ \left(1 + \frac{(A_1 - a)^2 + b^2}{(A_2 - a)^2 + b^2} \frac{A_2}{A_1} + \dots \right) \cos b t \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{A_1 - a}{b} + \frac{(A_1 - a)^2 + b^2}{(A_2 - a)^2 + b^2} \cdot \frac{A_2}{A_1} \frac{A_2 - a}{b} + \dots \right) \sin b t \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{(A_1 - a)^2 + b^2}{a^2 + b^2} \frac{S}{A_1} \left(\cos b t + \frac{a}{b} \sin b t \right) \right\} \right]; \end{aligned} \right.$$

hier ist

$$C = \frac{1}{a_3} \frac{a^2 + b^2}{(A_1 - a)^2 + b^2}.$$

Bestimmt man dann bei stromlosem Galvanometer die Schwingungsdauer T und die Dämpfungsconstante λ , so gilt

$$(37 \text{ bis}) \quad b = \frac{2\pi}{T}, \quad a = 2,303 \frac{\lambda}{T}.$$

Beobachtet man weiter während dem Abfallen der Temperatur zu den Zeiten t_1, t_2, t_3 etc. die Auslenkungen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ etc., so lassen sich daraus mit Hülfe von Formel (37) die zu diesen Beobachtungszeiten herrschenden Temperaturen v_1, v_2, v_3 etc. angeben.

3. Versuchsanordnung und Resultate.

A. Bestimmung des spezifischen Widerstandes und des Temperaturcoefficienten des verwendeten Kupfers.

Das untersuchte Kupfer wurde von der Firma J. A. Hesse Söhne, Kupferwerk in Heddernheim, in dankenswerter Weise als sehr reines Kupfer in der verlangten Form geliefert.

Fig. 1.

Es war nötig, den spezifischen Widerstand des Kupfers und dessen Temperaturcoefficienten an dem für die Wärmeleitung benutzten Stab selbst zu bestimmen. Der benutzte Stab A, Fig. 1, hatte die Länge von 9,50 cm und einen Durch-

messer von 7,03 mm. Ueber dessen Enden waren zwei Scheiben *B*, *B* elektrolytischen Kupfers aufgesetzt von 4 mm Dicke und 5 cm Durchmesser. Für die Stromzuleitung waren in die Scheiben Muttergewinde geschnitten, in welche die Kupferhenkel *C C* eingeschraubt waren.

In der Mitte des Stabes *A* und auf beiden Seiten symmetrisch dazu, waren in der Entfernung von je 4 cm zwei Bohrungen von 0,4 mm Durchmesser und 3,5 mm Tiefe angebracht, die ich mit 1, 2, 3 bezeichnen will. Diese Bohrungen dienten später für die Aufnahme der Thermoelemente, jetzt waren in dieselben drei genau passende Kupferdrähte *a*, *b*, *c* eingesteckt. Die Widerstandsbestimmung wurde für die drei Abschnitte 1 2, 2 3 und 1 3 einzeln ausgeführt. Es ist klar, dass diese drei Widerstände äusserst klein waren, dennoch wurde die Bestimmung mit der wünschenswerten Schärfe möglich durch die Methode der Abzweigung.

Die Zusammenstellung, wie sie Fig. 1 darstellt, wurde in einen grossen Kupferkessel getaucht, der etwa 100 Liter Wasser enthielt. Mittels eines später zu besprechenden Rührers, der durch einen Motor getrieben wurde, konnte das Wasser in reger Circulation erhalten werden, sodass die Temperatur im ganzen Kesselraum als constant angesehen werden durfte. Diese Temperatur, die uns die Temperatur des Kupferstabes darstellt, wurde mittels Normalthermometer verfolgt und die Lesungen, nachdem sie corrigirt waren in Bezug auf Kaliber, Eispunkt, Fundamentalabstand und herausragenden Faden, an die Wasserstoffscala angeschlossen. Das Thermometer war aus Jenaer Glas 16^{III} verfertigt. Um die Correctionen für den herausragenden Faden genau zu erhalten, war der herausragende Teil des Thermometers von einer weiten Glasröhre umschlossen, die unten durch einen Kork gedichtet war und Wasser enthielt, dessen Temperatur durch zwei weitere Thermometer in verschiedenen Höhen bestimmt wurde.

Durch den Hauptleiter *A* wurde ein constanter Strom von ca. 20 Amp. geschickt, der durch Accumulatoren erzeugt wurde. Dieser Strom konnte den Leiter kaum merklich erwärmen, wenn er sich in Luft befindet, wie eine Ueberschlagsrechnung leicht zeigt; hier, wo er von allen Seiten von Wasser bespült war, erscheint eine wahrnehmbare Erwärmung voll-

kommen ausgeschlossen. Die Anlage wird verdeutlicht durch Fig. 2. B stellt die Batterie dar, w, w, w sind drei Normalwiderstände für Strommessung von je $0,01 \Omega$. Sie sind durch Quecksilbernäpfe hintereinander geschaltet. R ist ein Regulirwiderstand, L der zu untersuchende Kupferstab mit den Abzweigdrähten a, b, c, t das Normalthermometer. Die Drähte α und β , γ und δ , ε und φ sind Abzweigungen, zwischen denen jeweils ein Widerstand von $0,01 \Omega$ liegt, während zwischen β und γ , δ und ε die Anschlussstücke der Normalwiderstände und die Quecksilbernäpfe liegen. MV ist ein grosses Weston-Millivoltmeter, bei dem für 1 Millivolt noch ca. $0,4 \text{ mm}$ Ausschlag entstanden. G ist ein Edelmann'sches Galvano-

Fig. 2.

meter von grosser Empfindlichkeit. Es war weiter eine derartige Anordnung getroffen, dass die Galvanometerconstante jederzeit leicht bestimmt werden konnte.

Wird jetzt durch Lesung am Millivoltmeter der Hauptstrom und durch Lesung am Galvanometer der Zweigstrom über aGb , aGc und bGc bestimmt, so können daraus die Widerstände 1 2, 1 3 und 2 3 leicht gefunden werden, wenn der Widerstand von Galvanometer und Zuleitung bekannt ist. Dieser Widerstand und dessen Temperaturcoefficient wurde aber mittels Messbrücke genau bestimmt. Das Galvanometer befand sich für alle Messungen auf einer Ebonitplatte und unter einem doppelwandigen Kartonkasten gemeinsam mit einem in $0,5^\circ$ getheilten Thermometer, sodass dessen Temperatur, die sich nur sehr langsam veränderte, genau verfolgt werden

konnte. An den Lesungen waren verschiedene Correctionen nötig. Die Angaben des Millivoltmeters wurden corrigirt, erstens gestützt auf das Ergebnis seiner Aichung mit dem Compensationsapparat, zweitens mit Rücksicht auf die Widerstände, die zwischen dem ersten und zweiten und dem zweiten und dritten Normalwiderstand lagen in Form der Anschlussstücke und Quecksilbernäpfe. Diese Correctionen wurden dadurch ermittelt, dass das Millivoltmeter direct auf $\beta\gamma$ und $\delta\epsilon$ geschaltet wurde.

Die Galvanometerlesungen wurden corrigirt auf Proportionalität der Ausschläge zum durchgehenden Strom, gestützt auf direct vorhergehende Messung; in Bezug auf thermoelektrische Einflüsse, durch Beobachtung mit und ohne Hauptstrom und in Bezug auf Widerstandsänderung im Galvanometerkreis, durch Reduction auf eine mittlere Galvanometer-temperatur. Eine merkliche directe Wirkung des Hauptstromes auf das Galvanometer war nicht vorhanden.

Die Beobachtungen wurden in symmetrischer geschlossener Reihe durchgeführt nach folgendem Schema:

$t_{\text{galv.}}$	ΔP Millivoltmeter	t	Lesung am Galvanometer	s
17,9	$\succ 0,693$	$\succ 19,9$	$\succ 741,0$ 460,6 $\vee 741,1$	280,4 280,5 280,7
17,9	$\prec 0,6925$	$\prec 20,0$	460,4	
17,9	0,6927	19,95	—	280,53

Die Columnen enthalten der Reihe nach die Temperatur des Galvanometers, die Lesung am Millivoltmeter, die Temperatur des Kupferstabes und die Lesungen am Galvanometer, zwischen denen der Strom im Galvanometerkreis jeweilen gekehrt wurde, und endlich die beiderseitigen Ausschläge am Galvanometer. Durch die Pfeile ist die zeitliche Reihenfolge der Beobachtungen angedeutet.

Werden diese Grössen in der oben angedeuteten Weise corrigirt, so kommt:

$$\Delta P = 0,6630 \text{ Volt, } s = 280,0 \text{ Sct., } t = 20,11^{\circ}.$$

Es wurde gefunden der Widerstand des Galvanometers samt Zuleitung:

$$W_g = 42,65 \, \Omega \text{ bei } t_{\text{galv.}} = 17,9^\circ,$$

die Empfindlichkeit des Galvanometers:

$$E = 3,2464 \times 10^{-8} \text{ Amp. pro 1 Sct.}$$

Daraus ergibt sich:

$$W_{12} = 0,000017542 \text{ bei } 20,11^\circ.$$

Stellen wir diese und die weiteren in gleicher Weise ausgeführten Messungen zusammen, so kommt:

I. Messung.

$$\begin{array}{lll} W_{12} = 0,000017542 \, \Omega & W_{23} = 0,000017582 \, \Omega & W_{13} = 0,000035119 \, \Omega \\ \text{bei } 20,11^\circ & \text{bei } 20,27^\circ & \text{bei } 20,31^\circ \end{array}$$

II. Messung.

$$\begin{array}{lll} W_{12} = 0,000018223 \, \Omega & W_{23} = 0,000018241 \, \Omega & W_{13} = 0,000036455 \, \Omega \\ \text{bei } 29,69^\circ & \text{bei } 29,70^\circ & \text{bei } 29,69^\circ \end{array}$$

III. Messung.

$$\begin{array}{lll} W_{12} = 0,000018257 \, \Omega & W_{23} = 0,000018281 \, \Omega & W_{13} = 0,000036605 \, \Omega \\ \text{bei } 29,875^\circ & \text{bei } 30,085^\circ & \text{bei } 30,325^\circ \end{array}$$

Berechnet man aus der Formel

$$W_{\tau+20} = W_{20}(1 + \alpha \tau)$$

die Grösse α dadurch, dass Messung 2 und 3 zum Mittel vereinigt werden, so lässt sich mit dem gefundenen α die nachfolgende Tabelle ausfüllen, die einen Ueberblick giebt über die Grösse der Abweichungen der Messungen untereinander.

	Temp. des Cu t	$W_{12} \times 10^5$ in Ω	$W_{23} \times 10^5$ in Ω	$W_{13} \times 10^5$ in Ω	$W_{13} \times 10^5$ in Ω ber. aus $W_{12} + W_{23}$	Ab- weichung in ‰
I. Messung	20°	1,7534	1,7562	3,5074	3,5096	+0,63
II. „	30	1,8245	1,8263	3,6499	3,6508	+0,25
III. „	30	1,8266	1,8275	3,6558	3,6541	-0,47

Die kleinen Abweichungen der Werte $W_{12} + W_{13}$ vom Werte W_{13} , die in der letzten Columnne angeführt sind, dürften zeigen, dass diese Widerstandsbestimmung mit ausreichender Schärfe gelungen ist.

Als Mittelwert ergibt sich für das ganze Stück:

$(W_{13})_{t=20^{\circ}} = 0,00003508 \Omega$, $(W_{13})_{t=30^{\circ}} = 0,000036526$,
somit

$$\alpha_{20^{\circ}} = 0,004108$$

und weil der Drahtdurchmesser 0,703 cm und die Länge des Stückes 1 bis 3 8,00 cm war, kommt als spezifischer Widerstand des cm^3 in absoluten Einheiten bei 20°

$$\omega_{20^{\circ}} = 1702,5.$$

B. Bestimmung des äusseren Wärmeleitungsvermögens.

Dieses ist nur von sehr untergeordneter Bedeutung in den vorliegenden Versuchen, weil der Wärmeleiter kurz und verhältnismässig dick ist. Es genügt daher eine angenäherte Bestimmung. Da das äussere Wärmeleitungsvermögen keine Constante des Materiales ist, sondern auch stark von den äusseren Umständen abhängt, so wurde die Bestimmung so vorgenommen, dass dabei die Verhältnisse möglichst genau dieselben sind wie bei der Versuchsanordnung für die Bestimmung des inneren Wärmeleitungsvermögens (vgl. Fig. 3, weiter unten).

Zu diesem Zweck wurde ein Kupferstäbchen von gleichem Querschnitt wie dasjenige, das für die Bestimmung des inneren Wärmeleitungsvermögens gedient hatte, in der Axe einer Glasröhre aufgehängt mit je drei an seinen Enden befestigten Coconfäden. Die Glasröhre war mit einem Ansatzrohr versehen, ähnlich wie die weiter unten durch Fig. 3 dargestellte, nur mit dem Unterschiede, dass diese Röhre an beiden Enden verengt war, sodass sie leichter dicht abgeschlossen werden konnte.

Die Länge l und die Masse m des Stabes betrugen bez.

$$l = 9,05 \text{ cm}, \quad m = 31,38 \text{ g.}$$

In der Mitte des Stabes befand sich in einer feinen Bohrung die eine Lötstelle eines Thermoelementes aus Eisen-Constantan. Die andere Lötstelle war im Ansatzrohr untergebracht, das gegen den Leiter hin, nach unten, durch Watte abgeschlossen war, während es oben, wo die Leitungsdrähte

ins Freie traten, wasserdicht abgeschlossen war. Nachdem das Ganze etwa 15° über die Temperatur des Wassers im bereits erwähnten Kessel erwärmt war, wurde es in dieses Wasser getaucht und nach Verfluss von einigen Minuten mit der Beobachtung der Temperatur der Stabmitte durch Ablesung des Galvanometerauschlages von Minute zu Minute begonnen.

Aus dem logarithmischen Decrement für die Abkühlung des Kupferstabes ergibt sich bei bekannter specifischer Wärme das äussere Wärmeleitvermögen h .

Es wurde die nachfolgende Reihe beobachtet:

Zeit	Ausschlag s	$\log s$	Decrement δ
0'	208,5	2,3191	—
1'	184,7	2,2665	—
2'	163,5	2,2135	—
3'	145,3	2,1624	—
4'	129,8	2,1134	—
5'	116,1	2,0649	—
6'	104,3	2,0182	—
7'	93,8	1,9722	—
8'	84,5	1,9269	—
9'	75,2	1,8762	0,04329
10'	67,8	1,8312	0,04353
11'	61,0	1,7853	0,04282
12'	55,4	1,7435	0,04189
13'	49,1	1,6911	0,04223
14'	43,6	1,6395	0,04254
15'	39,2	1,5933	0,04249
16'	35,2	1,5465	0,04257
17'	31,7	1,5011	0,04258
18'	28,3	1,4518	0,04244
19'	25,3	1,4031	0,04281
20'	22,5	1,3522	0,04331
21'	20,3	1,3075	0,04360
22'	18,3	1,2625	0,04286
23'	16,3	1,2122	0,04273
24'	14,8	1,1703	0,04230
25'	13,1	1,1173	0,04292
26'	11,7	1,0682	0,04329
27'	10,7	1,0294	0,04214

Mittel = 0,04275

Daraus kommt:

$$h = \frac{2,303 \delta \cdot m \cdot c}{9 \cdot 60 \cdot 0} = 0,000254 \text{ (G.C.S.)},$$

wenn die Oberfläche $0 = 20,7 \text{ (cm}^2\text{)}$ und $c = 0,092 \text{ (g-Cal.)}$.

Es ist also:

$$\frac{h p}{q} = 0,00144$$

und

$$\frac{h p}{\alpha q} = 0,00154,$$

wenn man näherungsweise setzt:

$$\alpha = 0,94.$$

Davon geht die erste Grösse in den variablen, die zweite in den stationären Zustand ein.

C. Bestimmung des Wärmeleitungsvermögens aus der stationären Temperaturverteilung.

Die Temperaturmessung geschah mittels Thermoelementen aus Eisen und Constantandraht von 0,1 mm Durchmesser.

Diesen Draht hatten mir die Herren Jaeger und Diesselhorst von der physikalisch-technischen Reichsanstalt in dankenswertester Weise zur Verfügung gestellt. Die Combination war von den beiden Herren auf ihre Thermokraft untersucht im Intervall von 0—110° und sie haben dafür gefunden:

$$\frac{de}{dt} = 52,25 + 0,056 t - 0,00018 t^2 \text{ (Mikrovolt)}$$

mit 1—2 Promille individueller Abweichung.

An drei Thermoelementen aus dieser Combination wurde meinerseits für das Temperaturintervall Kühlwasser der Leitung und Siedetemperatur eine Nachprüfung vorgenommen. Der Unterschied der drei Exemplare war im Mittel 1,2 Promille und blieb im Maximum kleiner als 2 Promille. Der Mittelwert aller drei Elemente stimmte bis auf 0,4 Promille mit dem aus der Formel berechneten Wert überein. Allen weiteren

Rechnungen liegt die Annahme zu Grunde, die Thermoelemente aus dieser Drahtcombination seien identisch und ihre Thermokraft sei nach der obenstehenden Formel zu berechnen.

Für die Bestimmung des Leitungsvermögens waren folgende Anordnungen getroffen. An Stelle der drei Kupferdrähte, die zur Bestimmung des specifischen Widerstandes gedient hatten, wurden die einen Lötstellen von drei Thermoelementen gesetzt. Bei der Bildung der Lötstellen wurde die doppelte Seidenumspinnung der Thermodrähte nur wenig zurückgeschoben, die Lötung vorgenommen und die Seide soweit als möglich wieder vorgeschoben. Der unterste blanke Teil wurde durch Eintauchen in flüssigen Schwefel isolirt durch eine sehr dünne Schwefelschicht. Die so gebildete Lötstelle wurde dann unter kräftiger Pressung mit Stanniol umwickelt und so in eine der 0,4 mm weiten und 3,5 mm tiefen Ausbohrung des Kupferstabes vollständig hinunter gedrückt. Es war notwendig, dass die Lötstellen vom Stab isolirt waren, und dass doch ein guter Temperatenausgleich zwischen Stab und Lötstelle stattfinden konnte. Beides wurde durch dieses Verfahren erreicht, wie aus Versuchen hervorging, wo die Isolation nicht vorgenommen war. In diesem Falle waren die Beobachtungen aber sehr weitläufig und beschwerlich und weniger genau.

Die Thermodrähte waren nur wenige Centimeter lang, an sie wurden weiche isolirte Kupferdrähte gelötet. Der Kupferstab mit den Endplatten und Thermoelementen wurde in eine Glasröhre *D*, Fig. 3, mit Ansatzrohr *E* eingesetzt. Längs des Umfanges der Kupferscheibe wurde der Zwischenraum mit je einem Gummiring und mit Enamelfarbe wasserdicht ausgefüllt. Die anderen Lötstellen und die Verbindungen der Constantandrähte auf den Kupferdrähten waren im Ansatzrohr *E* mit Seide gut voneinander isolirt untergebracht. Zum Schutze dieser Lötstellen gegen Strahlung und insbesondere gegen warme Convectionsströme der Luft vom Kupferstab aus, war Watte von unten in die Röhre *E* eingeschoben und von

Fig. 3.

aussen ein Mantelrohr über E gestülpt und der Zwischenraum mit Watte ausgefüllt. Das Rohr E war oben, wo die Kupferdrähte herauskamen, mit Gummibändern und Lack gleichfalls dicht verschlossen. Das Ganze wurde alsdann in dem bereits erwähnten Kessel unter Wasser gesetzt.

Die Bepflügung der Stabenden geschah mittels einer durch einen Motor getriebenen Schraube mit Röhrenleitung, deren zwei Mundstücke etwa 0,5 cm vor den Enden des Kupferstabes sich befanden. (Die Schraube und ein Teil der Röhrenleitung ist in der Figur nicht gezeichnet.) Durch diesen Rührer wurde ein kräftiger Wasserstrahl gegen jedes Leiter-

Fig. 4.

ende samt Endplatte getrieben und zugleich die ganze Wassermasse in gleichmässiger Circulation erhalten. Die Wassertemperatur wurde mit dem oben erwähnten Thermometer gemessen.

Fig. 4 giebt Aufschluss über die Schaltungen. Hier bedeutet B eine Batterie für grosse Stromstärken, R einen eben solchen Regulirwiderstand und N einen Normalwiderstand von $0,001 \Omega$ mit Wasserkühlung zur Messung grosser Ströme dienend. Der Rührer für diesen Normalwiderstand wurde mittels Schnurlauf durch den gleichen Motor getrieben, der die Bepflügung des Wärmeleiters besorgte. MV ist das oben besprochene Millivoltmeter, S eine Vorrichtung zum Stromwenden, K der Kessel mit Wärmeleitungsapparat und G das Edelmann'sche Galvanometer zum Anschluss an die verschiedenen Thermolemente.

Für diese Messungen war das Galvanometer mittels zweier grosser Magnete astasirt, sodass seine Empfindlichkeit ungefähr verdoppelt war. Auch hier konnte die Empfindlichkeit jederzeit rasch ermittelt werden durch besondere Anordnung.

Der Regulirwiderstand R bestand aus 2 mm starken Neu-silberdrähten unter Wasser, diese wurden mit ca. 100 Amp. beansprucht. Dieser Widerstand hat sich vorzüglich bewährt, er wurde nach meinen Angaben in der mechanischen Werkstätte des Institutes hergestellt.

Durch entsprechende Schaltung der Thermoelemente konnten bestimmt werden die Temperaturen $S_x = -l_1$, $S_x = +l_1$, $S_x = 0$, $S_x = 0 - S_x = +l_1$, $S_x = 0 - S_x = -l_1$ und mit Rücksicht darauf, dass $S_x = +l_1$ und $S_x = -l_1$ kaum merklich verschieden waren durch Parallelschaltung auch

$$\frac{S_{x=0} - S_{x=l_1} + S_{x=0} - S_{x=-l_1}}{2} = S_{x=0} - S_{x=\pm l_1}.$$

Die Widerstände der Thermoelemente und deren Temperaturcoefficienten waren durch besondere Messungen ermittelt und es war allen Widerstandsänderungen, die durch die Temperatur bedingt waren, gebührend Rechnung getragen. Bezeichnet man mit $W_{s=-l_1}$, $W_{s=+l_1}$ und W_o die Widerstände der einzelnen Thermoelemente, bez. der betreffenden Schaltung derselben, wie sie zur Messung von $S_x = -l_1$, $S_x = +l_1$ und $S_{x=0} - S_{x=\pm l_1}$ dienten, so ergab sich:

$$(W_{s=-l_1})_{t=17^\circ} = 10,15 \, \Omega, \quad (W_{s=+l_1})_{t=17^\circ} = 10,305 \, \Omega,$$

$$(W_{s=0})_{t=17^\circ} = 14,25 \, \Omega.$$

Für W_o war der Temperaturcoefficient

$$\alpha_{W_o} = 0,000572.$$

Der Widerstand von Galvanometer und Zuleitung und dessen Temperaturcoefficient ergaben sich zu:

$$W_g = 42,77 \, \Omega \quad (t_{\text{galv.}} = 19,3^\circ), \quad \alpha_{W_g} = 0,00352.$$

Die Messungen wurden wie folgt durchgeführt.

I. Bestimmung von $S_{x=-l_1}$ und $S_{x=+l_1}$:

Galvanometerlesung und Ausschlag ohne Strom		Lesung am Millivolt- meter ΔP	Galvanometerlesung und Ausschlag mit Strom		Galvanometerlesung und Ausschlag ohne Strom
$S_{x=-l_1}$					
1. 562,2		0,3665	1. 603,8		1. 563,6
2. 560,8	1,4	0,3660	2. 533,2	70,6	2. 558,8
1. 562,3	1,5	0,3655	1. 604,0	70,8	1. 563,2
2. 560,7	1,6				2. 558,8
	1,5	0,3660		70,7	
					4,5
$t_{\text{galv.}} = 17,85^\circ$		$t = 14,65^\circ$	$s = 67,7$	$\Delta P = 0,3660 \text{ Volt}$	

Die Zahlen 1. und 2. deuten die verschiedenen Richtungen des Galvanometerstromes an.

In gleicher Weise kam für

$$S_{x=+l_1}$$

$$t_{\text{galv.}} = 17,85^\circ, \quad t = 14,65^\circ, \quad s = 60,6, \quad \Delta P = 0,3678 \text{ Volt.}$$

II. Aichung des Galvanometers:

$$E = 1,6369 \times 10^{-8} \text{ Amp. pro 1 Sct. beiderseit. Ausschlages.}$$

III. Bestimmung von $S_{x=0} - S_{x=\pm l_1}$:

Die Thermoelemente werden derart geschaltet, dass der Strom ein Maass für $S_{x=0} - S_{x=\pm l}$ ist.

Galvanometer- lesung und Ausschlag ohne Strom		Temp. des Cu- Stabes	Lesung am Millivoltmeter	Galvanometer- lesung und Ausschlag mit Strom		Galvanometer- lesung und Ausschlag ohne Strom
1. 563,3		14,72°	0,3680	1. 646,5		1. 562,5
2. 556,6	6,7		0,3670	2. 488,3	158,2	2. 556,7
1. 563,2	6,6	14,80°	0,3660	1. 645,8	157,5	1. 562,3
2. 556,8	6,4		0,3655	2. 488,2	157,6	2. 556,3
			0,3653	1. 645,8	157,6	
	6,6		0,3650	2. 488,5	157,3	
$t_{\text{galv.}} = 17,75^\circ$						
$t_{\text{galv.}} = 17,75^\circ$		$t = 14,76^\circ$	$\Delta P = 0,3661 \text{ V.} \quad s = 163,8 \text{ Sct.}$			

Aehnlich ergab sich weiter, wenn der Heizstrom gekehrt wurde:

Stromrichtung II.

$$t_{\text{galv.}} = 17,70^{\circ}, \quad t = 14,82^{\circ}, \quad \Delta P = 0,3649 \text{ Volt}, \quad s = 162,2 \text{ Sct.}$$

Stromrichtung I.

$$t_{\text{galv.}} = 17,75^{\circ}, \quad t = 14,92^{\circ}, \quad \Delta P = 0,3638 \text{ Volt}, \quad s = 162,1 \text{ Sct.}$$

Stromrichtung II.

$$t_{\text{galv.}} = 17,70^{\circ}, \quad t = 14,97^{\circ}, \quad \Delta P = 0,3627 \text{ Volt}, \quad s = 161,1 \text{ Sct.}$$

IV. Aichung des Galvanometers:

$$E = 1,6355 \times 10^{-8} \text{ Amp. pro 1 Sct.}$$

Es sind fünf solche Reihen ausgeführt worden, bei denen der Heizstrom zum Teil sehr verschieden war.

Corrigirt man die Beobachtungen, wie früher, wobei bemerkt sein mag, dass beim vorliegenden Zustand des Galvanometers und bei den kleinen Ausschlägen die Correctur auf Proportionalität zwischen Strom und Ausschlag sich auf die Reduction der Ausschläge beschränkte und benutzt Formel (13), worin man setzt:

$$J = 4,20 \times 10^7,$$

$$\kappa \approx 0,95 \text{ (Näherungswert),}$$

so ergibt sich die nachfolgende Tabelle:

Reihe	t Temp. des Kühl- wassers	$S_x = \pm t_1$ von t an gerechnet	$S_x = 0$ $- S_x = \pm t_1$	I in Weber	ω_0	κ (G.C.S.)
1	14,92	1,05 ⁰	2,835 ⁰	35,77	1667,2	0,9504
2	15,14	0,75	1,977	29,935	1668,8	0,9516
3	15,33	0,44	1,238	23,69	1670,1	0,9490
4	13,50	1,05	2,855	35,92	1657,1	0,9462
5	13,93	0,96	2,863	35,92	1660,2	0,9448

Giebt man den Resultaten der 1., 2., 3., 4., 5. Reihe respective die Gewichte 3, 2, 1, 3, 3 mit Rücksicht darauf, dass die Werte $S_{x=0} - S_{x=\pm l_1}$ dort in diesem Grössenverhältnis stehen, so ergibt sich aus dem stationären Temperaturzustand für κ der Mittelwert

$$\kappa = 0,9480 \text{ (G.C.S.)}.$$

Aus der letzten Columnne der oben stehenden Tabelle geht hervor, dass, wie dies verlangt werden muss, die Grösse des Heizstromes ohne Einfluss ist auf κ .

In der Einleitung wurde gesagt, dass die Grösse W in Gleichung (1), welche Gleichung den Wärmeaustausch in den vom Kühlwasser bespülten Endflächen beherrscht, constant sei und speciell unabhängig sei vom Temperaturgefälle im Endquerschnitt.

Da diese Annahme von fundamentaler Bedeutung ist für die vorliegende einfache Berechnungsart der Versuche, so will ich die Gelegenheit, das Gesagte an den vorhergehenden Beobachtungen zu beweisen, nicht unbenutzt vorübergehen lassen, obschon wir auch später bei der Behandlung des variablen Zustandes wieder auf die Frage zurückkommen.

Wir bilden mit Hülfe von Gleichung (10)

$$\begin{aligned} \frac{S_{x=0} - S_{x=\pm l_1}}{S_{x=\pm l_1}} &= \frac{l_1^2 \left(1 + \frac{1}{12} \nu^2 l_1^2 + \frac{1}{360} \nu^4 l_1^4 \right)}{2 l W \left(1 + \frac{1}{6} \nu^2 l^2 + \frac{1}{120} \nu^4 l^4 \right) + l^2 - l_1^2 - \frac{1}{12} (\nu^2 l^4 - l_1^4) + \dots} \\ &= \frac{l_1^2}{2 l W + (l^2 - l_1^2)}. \end{aligned}$$

Weil ν^2 eine sehr kleine Grösse ist, kann man sie und ihre Potenzen vernachlässigen und hat im Quotienten ein Maass für die Grösse W .

In den drei ersten Versuchsreihen war die Stromstärke, also auch das Temperaturgefälle im Endquerschnitt, verschieden. In der nachfolgenden Tabelle sind für diese drei Versuchsreihen obige Quotienten gebildet; sind sie constant, so gilt dasselbe für die Grösse W und es liegt dann darin der Nachweis, dass diese Grösse vom Temperaturgefälle am Stabende unabhängig ist.

Reihe	$S_{x=0} - S_{x=\pm l_1}$ $= C \cdot \left(\frac{d\varrho}{dx} \right)_{x=l}$	$S_{x=l_1}$	$S_{x=0} - S_{x=\pm l_1}$ $S_{x=\pm l_1}$
1	2,835	1,030	2,75
2	1,977	0,747	2,65
3	1,238	0,441	2,81

Da auf die scharfe Ermittlung der Grössen $S_{x=\pm l_1}$, die sonst nur als Correctionsglieder auftreten, kein grosses Gewicht gelegt wurde bei der Ausführung der Versuche, so kann die vorliegende Constanz der Quotienten, wie sie die letzte Kolumne zeigt, als befriedigend bezeichnet werden, insbesondere, da durch die Quotienten kein Gang in der Grösse W zum Ausdruck kommt.

D. Bestimmung des Wärmeleitungsvermögens aus dem variablen Zustand.

Zu dem Ende wurde die Abkühlung vom stationären Zustande aus durch Ablesung des Galvanometeraussschlages von fünf zu fünf Secunden verfolgt. Es wurde auf diese Weise bestimmt der zeitliche Verlauf der Grössen $S_{x=0} - S_{x=l_1}$, $S_{x=0}$ und $S_{x=l_1}$. Für jede Temperatur wurden fünf Beobachtungsreihen ausgeführt und diese zum Mittel vereinigt. Die nachfolgende Tabelle enthält die Mittelwerte, sowie die für die Erreichung des stationären Zustandes verwendete Stromstärke I und den zugehörigen Widerstand im Galvanometerkreis.

Zeit	$S_{x=0} - S_{x=\pm l_1}$	$S_{x=0}$	$S_{x=\pm l_1}$
5"	55,32	77,85	20,93
10	27,57	38,72	11,53
15	15,72	22,22	6,27
20	7,85	11,17	3,24
25	4,58	6,35	1,90
30	2,25	3,30	1,02
35	1,80	2,05	0,63
40	0,63	1,05	0,22
5", 15" etc. {	$I = 356,0 \text{ Amp.}$ $W = 56,73 \text{ } \Omega$	$I = 350,9 \text{ Amp.}$ $W = 51,99 \text{ } \Omega$	$I = 352,8 \text{ Amp.}$ $W = 47,70 \text{ } \Omega$
10", 20" etc. {	$I = 352,5 \text{ Amp.}$ $W = 56,99 \text{ } \Omega$	$I = 350,6 \text{ Amp.}$ $W = 51,69 \text{ } \Omega$	$I = 351,7 \text{ Amp.}$ $W = 47,82 \text{ } \Omega$

Werden diese Lesungen, soweit nötig, corrigirt und dann auf gleiche Stromstärke und gleichen Widerstand reducirt, so liefern sie mit Hülfe von Gleichung (23) die Werte von λ_1 , die in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind. Die erste Columne enthält die Zeit, die zweite den Wert von λ_1 aus $S_{x=0} - S_{x=\pm t_1}$ und $S_{x=\pm t_1}$ berechnet, die dritte enthält λ_1 berechnet aus $S_{x=0}$ und $S_{x=\pm t_1}$, die vierte endlich das Mittel aus den beiden vorigen Columnen und die letzte enthält die Gewichte, mit welchen versehen die Werte zum Mittel vereinigt sind. Diese Gewichte sind den abgerundeten Ausschlägen, aus denen die betreffenden λ_1 berechnet sind, proportional angenommen, nur dem ersten Wert wurde das Gewicht 10 statt 20 beigelegt, weil dort die rasche Bewegung die scharfe Ablesung sehr erschwerte und weil die Eigenbewegung des Galvanometers noch nicht abgeklungen war.

Zeit	λ_1 (aus $S_{x=0} - S_{x=\pm t_1}$)	λ_1 (aus $S_{x=0}$)	λ_1 Mittel	Gewicht
5"	0,330	0,330	0,330	10
10	0,326	0,324	0,325	10
15	0,328	0,328	0,328	6
20	0,327	0,325	0,326	3
25	0,326	0,324	0,325	2
30	0,323	0,321	0,322	1
35	0,319	0,322	0,320	0,6
40	0,336	0,345	0,340	0,2

Mittel: 0,3270

Die Constanz ist befriedigend, abgesehen von den drei letzten Werten, dort sind aber die Ausschläge, die zur Berechnung gedient haben, so klein, dass keine bessere Uebereinstimmung erwartet werden darf. Diese Constanz und insbesondere die Thatsache, dass sich in λ_1 bei abfallender Temperatur kein Gang bemerkbar macht, beweist wieder, dass die Eingangs gemachte Annahme über den Wärmefluss in den bespülten Grenzflächen in befriedigender Weise mit den Beobachtungen übereinstimmt, speciell auch, dass der Temperaturprung zwischen Kühlwasser und Leiterende dem Temperaturgefälle am Leiterende proportional ist.

Mit Formel (27) ergibt sich:

$$2 L = 9,61 \text{ cm.}$$

Eine Ueberschlagsrechnung zeigt, dass an Stelle der wirklichen Länge 9,50 cm, wovon 0,8 cm in den Kupferplatten stecken, die Länge $l = 9,00$ in die Rechnung einzuführen wäre. Würde man dies thun, so würde, da l quadratisch in α eingeht, das Leitvermögen um ca. 12 Proc. zu klein.

Bevor wir zur Bestimmung der logarithmischen Decremente übergehen können, müssen die beobachteten Ausschläge corrigirt werden mit Rücksicht auf die Eigenbewegung des Magnetsystems im Galvanometer. Zu dem Zwecke wurde die Schwingungsdauer und Dämpfungsconstante des Galvanometers bestimmt und gefunden:

$$T = 10,72'', \quad \lambda = 1,050.$$

Hieraus ergibt sich nach Formel (37^{bis})

$$a = 0,452, \quad b = 0,586$$

und unter Benutzung von Formel (21) erhält man, da

$$l = 4,75, \quad \lambda_1 = 0,327,$$

$$B_1 = + 2 R \times 5,93,$$

$$B_2 = - 2 R \times 1,995,$$

$$B_3 = + 2 R \times 0,047,$$

$$S = + 2 R \times 5,778.$$

Mit dem Näherungswert für das Decrement des Temperaturabfalles:

$$2,303 \delta = 0,125,$$

woraus mit Formel (36) und (18) kommt:

$$A_2 = 1,109,$$

findet man alsdann unter Benutzung von Formel (37):

$$\varphi(5'') = C \cdot (v)_{t=5''} (1 + 0,0352),$$

$$\varphi(10'') = C \cdot (v)_{t=10''} (1 - 0,00665),$$

$$\varphi(15'') = C \cdot (v)_{t=15''} (1 + 0,0012).$$

Werden jetzt die Lesungen mit Rücksicht auf obige Werte corrigirt, so kommen die folgenden Tabellen, die die Decremente des Temperaturabfalles enthalten.

Die erste Tabelle enthält die Ergebnisse aus der Beobachtung von $S_{x=0} - S_{x=\pm l_1}$, die zweite diejenigen aus der Beobachtung von $S_{x=0}$ und $S_{x=\pm l_1}$.

I.				II.			
Zeit	$S_{x=0} - S_{x=\pm l_1}$ direct beob.	$\delta \cdot 10$	Gewicht	$S_{x=0} - S_{x=\pm l_1}$ durch Diff.-Bildung	$\delta \cdot 10$	Gewicht	
5''	53,86			56,70			
10	27,75			28,29			
15	15,70	0,5315	10	16,48	0,5366	10	
20	7,85	0,5484	10	8,19	0,5383	10	
25	4,58	0,5350	5	4,62	0,5524	6	
30	2,25	0,5427	2,5	2,36	0,5404	3	
35	1,30	0,5470	1,5	1,48	0,4943	1,5	
40	0,63	0,5529	0,8	0,85	0,4435	0,7	
45	0,38	0,5341	0,4				
Mittel: 0,5400				Mittel: 0,5364			

Auch hier sind die Decremente δ mit verschiedenen Gewichten belegt, welche Gewichte jeweilen in der letzten Columnne der Tabelle angeführt sind. Maassgebend für das Gewicht war die Differenz der Ausschläge, aus denen das betreffende Decrement ermittelt ist, nur beim ersten Decrement ist ein kleineres Gewicht eingeführt aus bereits früher besprochenen Gründen.

Soweit, als die Ausschläge nicht schon sehr klein sind, zeigen die Decremente keine zu grossen Abweichungen untereinander.

Bestimmt man jetzt mit Formel (25) die Grösse κ das Wärmeleitungsvermögen aus dem variablen Zustand, so ergibt sich:

$$\kappa = 0,9382 \text{ (G.C.S.)}.$$

Dabei ist gesetzt:

$$\rho = 8,914 \quad \text{und} \quad c = 0,0921 \text{ (18}^\circ\text{)},$$

wo ρ an dem Stabe selbst bestimmt, während c den Beobachtungen von Bède und Naccari entnommen ist.

Wir hätten also gefunden:

aus stationärem Temperaturzustand: $\kappa = 0,9480 \text{ (G.C.S.)}$,

aus variablem Temperaturzustand: $\kappa = 0,9382 \text{ (G.C.S.)}$.

Der Unterschied beträgt 1 Proc., was mit Rücksicht auf die Schwierigkeit der Messung nicht zu viel ist. Man kann deshalb wohl sagen, dass beide Bestimmungsarten, in correcter Weise durchgeführt dasselbe Resultat liefern.

Die Bestimmung von κ aus dem variablen Zustand dürfte etwas weniger scharf sein, weil dort durchweg kleine Ausschläge beobachtet wurden.

Die nachfolgende Tabelle zeigt einen Vergleich mit den neuesten Resultaten anderer Beobachter. Es sind zu diesem Vergleich auch noch die Quotienten beider Leitvermögen κ/x herangezogen. Meinem Wert liegt das Mittel aus den beiden Werten für κ und der reciproke Wert des specifischen Widerstandes bei 18° zu Grunde.

Substanz: Reines Kupfer.

κ	$\frac{\kappa}{x}$ (bei 18°)	Beobachter
0,9480	} 1595	Schaufelberger
0,9382		"
0,917 (Cu III)	1598	Jaeger u. Diesselhorst
0,876 (Cu II)	1583	" " "
0,934	1630	Grüneisen

Kupfer II und III von Jaeger und Diesselhorst stammen aus verschiedenen aber sehr zuverlässigen Bezugsquellen. Mit Rücksicht auf die Differenz in α zwischen Kupfer II und III, die Jaeger und Diesselhorst als im Material begründet gefunden haben, kann man die Uebereinstimmung aller Werte als eine gute bezeichnen. Die vollkommene Uebereinstimmung meines Wertes von α/x mit den Werten, die Jaeger und Diesselhorst von der physikalisch-technischen Reichsanstalt beobachtet, erscheint bemerkenswert.

4. Zusammenstellung der Resultate.

Die Ergebnisse dieser Arbeit können kurz, wie folgt, zusammengefasst werden:

1. Bei der Bestimmung des Wärmeleitungsvermögens von guten Leitern ist die Annahme, dass mit Wasser bespülte Flächen die Temperatur des Spülwassers annehmen, durchaus unzulässig. Bei Kupfer beträgt der Fehler, den diese Annahme in den Wert des Leitungsvermögens einführt, über 10 Proc.

2. Die in dieser Arbeit angegebene Gleichung (1), die den Wärmeaustausch in einer derartig bespülten Endfläche beherrscht, wird durch die Versuche vollkommen bestätigt und gestattet, gestützt auf sehr einfache Berechnung, eine exacte Bestimmung des inneren Wärmeleitungsvermögens.

3. Der Temperatursprung zwischen Kühlwasser und Endquerschnitt des Leiters kann in erster Annäherung auch dadurch berücksichtigt werden, dass man den Leiter um eine, aus dem Versuch zu bestimmende Strecke, länger voraussetzt und diese neue Länge in die Berechnungsweise einführt, die das Vorhandensein eines Temperatursprunges negirt.

4. Aus dem stationären und variablen Temperaturzustand gehen Werte für das Leitungsvermögen hervor, die die Beobachtungsfehler kaum übersteigen, sodass diese principiell verschiedenen Methoden als zum gleichen Resultat führend betrachtet werden können.

5. Der gefundene Wert für das Wärmeleitungsvermögen des Kupfers stimmt mit den Werten anderer Beobachter gut überein im Rahmen des in der Verschiedenheit der Materialien zu erwartenden Bereiches.

Der Quotient beider Leitungsvermögen zeigt mit dem von Jaeger und Diesselhorst gefundenen vollkommene, und mit dem von Grüneisen beobachteten gute Uebereinstimmung.

Zum Schluss sei es mir gestattet, meinem hochverehrten Herrn Prof. Dr. J. Pernet den wärmsten Dank auszusprechen für die mir zur Ausführung dieser Arbeit gütigst zur Verfügung gestellten Mittel.

Zürich, September 1901.

(Eingegangen 3. Januar 1902.)