Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o più variabili complesse.

(Di EUGENIO ELIA LEVI, a Genova.)

§ I.

1. Sia $f(x, y)$ una funzione monodroma (*) analitica di due variabili complesse $x = x_1 + i x_2$, $y = y_1 + i y_2$. Si dice che $f(x, y)$ è *regolare* nel punto (ξ, η) se nell'intorno di questo punto è sviluppabile in serie di potenze di $x - \xi$, $y - \eta$; si dice che in (ξ, η) ha un *punto singolare non essenziale*, se è possibile trovare una serie di potenze $p_0(x - \xi, y - \eta)$ tale che il prodotto $p_0(x - \xi, y - \eta) f(x, y)$ sia regolare nel punto (ξ, η) ; e cioè quando la $f(x, y)$ si può porre nella forma $f(x, y) = \frac{p_1(x - \xi, y - \eta)}{p_0(x - \xi, y - \eta)}$ dove $p_1(x - \xi, y - \eta)$ indica essa pure una serie di potenze di $x - \xi$, $y - \eta$. Ogni altro punto sarà per la funzione un *punto singolare essenziale* (**).

Nel presente lavoro mi propongo di mostrare che le varietà formate dai punti singolari *essenziali* soddisfanno a condizioni assai restrittive; o, il che è lo stesso, che i campi in cui una funzione può essere meromorfa (***) sono di natura particolare. Così verrà mostrato che è erronea l'affermazione del WEIERSTRASS che, analogamente a quanto avviene per le funzioni di una sola

(*) Sovente per la validità di quanto segue si potrà anche considerare un ramo monodromo di una funzione polidroma.

(**) Così sono punti singolari essenziali anche quelli di un campo (lacunare) cui non si possa giungere per prolungamento analitico.

(***) E cioè in cui la funzione può non avere punti regolari e punti singolari non essenziali: secondo WEIERSTRASS si direbbe: *in cui una funzione può avere comportamento di una funzione razionale*.

variabile, assegnato ad arbitrio un campo continuo a 4 dimensioni nello spazio in cui sono rappresentate le variabili complesse x, y , esiste sempre una funzione meromorfa in esso, che ha singolarità essenziali in ogni punto del contorno di questo (*).

La natura degli insiemi di punti singolari di una funzione analitica è già stata studiata dall'HARTOGS (**) nei suoi bei lavori partendo sia dalla formula di CAUCHY sia dagli sviluppi in serie di potenze: però l'HARTOGS non riesce a scindere nelle sue considerazioni i punti singolari essenziali dai non essenziali, cosicchè i suoi risultati nulla ci dicono sui punti singolari essenziali limiti di punti singolari non essenziali; e limitano la natura dei campi in cui la funzione può essere regolare, e non di quelli in cui può essere meromorfa.

Le deduzioni di questo lavoro hanno comune fondamento nel semplicissimo teorema del § I (n. 4 e 5) secondo il concetto esposto nel n. 6. Nel § II mostro come da questo solo principio e nel campo più ampio ora ricordato si possano facilmente dedurre tutti i principali risultati che l'HARTOGS ottenne per varie vie. Nel § III determino alcune proprietà differenziali delle *ipersuperficie* che possono costituire la frontiera di un campo in cui una funzione analitica di due variabili complesse è meromorfa.

Tutti i risultati di questo lavoro si estendono senza difficoltà essenziali alle funzioni di più variabili.

2. Un'equazione $\varphi(x, y) = 0$, dove φ è una funzione analitica di x ed y , determina nello spazio a 4 dimensioni, in cui si rappresentano i punti (x, y) , una varietà a due dimensioni di natura particolare: indicherò queste varietà

(*) WEIERSTRASS, *Untersuchungen über die 2 r-fach periodischen Functionen von r Veränderlichen*. Crelles Journal, 89, Werke II, pag. 123-133: Wird aus dem Gebiete von r complexen Veränderlichen $u_1, u_2, \dots, u_r$ auf irgend eine Weise ein 2 r-fach ausgedehntes Continuum ausgeschieden, so lassen sich stets eindeutige Functionen von $u_1, \dots, u_r$ bestimmen, welche sich an allen Stellen im Innern dieses Continuum, aber an keiner Stelle seiner Begrenzung wie rationale Functionen verhalten.

(**) FRITZ HARTOGS: — 1.° *Zur Theorie der analytischen Functionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen*, etc. Math. Annalen, Bd. 62, pag. 1-88. — 2.° *Einige Folgerungen aus der Cauchy'schen Integralformel bei Functionen mehrerer Veränderlichen*. Münchener Sitzungsberichte, Bd. 36 (1906). — 3.° *Ueber die aus den singulären Stellen einer analytischen Function mehrerer Veränderlichen bestehenden Gebiete*. Acta Mathematica, Vol. 32 (1909), pag. 57-79. — Vedi anche il rapporto riassuntivo dell'HARTOGS nei Jahresber. der Deutscher Math. Vereinigung, 16 (1907), pag. 223 e ss. *Ueber neuere Untersuchungen auf dem Gebiete der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen*.

col nome di *varietà* o *superficie caratteristiche* (*): in particolare un'equazione lineare tra x ed y rappresenta un *piano caratteristico*.

Un punto di una superficie caratteristica $\varphi(x, y) = 0$ può essere: *regolare* o *critico* se la superficie può nell'intorno di esso essere rappresentata col dare x (od y) in serie di potenze intere o fratte di y (od x); *singolare* se è un punto singolare di $\varphi(x, y)$ limite di punti in cui è $\varphi(x, y) = 0$.

Con queste definizioni risulta che noi potremo parlare di *multiplicità di intersezione* di un piano caratteristico con una superficie caratteristica in un punto regolare o critico per questa: risulta pure che, data una superficie caratteristica che in (ξ, η) abbia un punto regolare o critico, esiste un intorno σ di (ξ, η) sufficientemente piccolo ed un numero m tale che ogni piano caratteristico $x = \text{cost.}$ ha in σ al più m punti — contato ognuno colla sua molteplicità, — comuni con essa, fatta eccezione per il piano $x = \xi$ che può appartenere alla superficie medesima.

Applichiamo queste considerazioni ai punti singolari non essenziali di una funzione $f(x, y)$. Se (ξ, η) è un tale punto, e se precisamente nell'intorno di esso è $f(x, y) = \frac{p_1(x - \xi, y - \eta)}{p_0(x - \xi, y - \eta)}$, i soli punti singolari di $f(x, y)$ che esistono nell'intorno di (ξ, η) sono punti singolari non essenziali i quali appartengono alla varietà caratteristica $p_0(x - \xi, y - \eta) = 0$: (ξ, η) è su essa un punto regolare o critico. Ne segue:

Osservazione I. Se (ξ, η) è un punto regolare o singolare non essenziale di $f(x, y)$ si può trovare un intorno σ di esso ed un numero m , tale che ogni piano $x = \text{cost.}$ abbia in σ al più m punti singolari di $f(x, y)$ tutti non essenziali, fatta eventualmente eccezione per il piano $x = \xi$ che può far parte della varietà caratteristica di punti singolari non essenziali cui appartiene (ξ, η) . Infatti se (ξ, η) è regolare non esistono punti singolari nel suo intorno: si può fare $m = 0$. Se (ξ, η) è singolare non essenziale è questa un'immediata conseguenza del fatto che i punti singolari di $f(x, y)$ nell'intorno di (ξ, η) costituiscono una varietà caratteristica per cui (ξ, η) è regolare o critico.

L'osservazione precedente vale pure quando si conti ogni punto (ξ', η') singolare non essenziale per $f(x, y)$ come multiplo secondo il numero che

(*) Seguendo la terminologia proposta dal LEVI-CIVITA: *Sulle funzioni analitiche di due o più variabili complesse*. Rend. della R. Accademia dei Lincei, (1905), vol. XIV, sem. 2, pag. 492-9. Tali varietà sono invero le varietà caratteristiche rispetto al problema di CAUCHY per il noto sistema di equazioni cui devono soddisfare la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di una funzione di due variabili.

rappresenta l'ordine del polo che $f(\xi' y)$ ha in $y = \eta'$ (*). Invero tale ordine è sempre inferiore all'ordine infinitesimale di $p_0(x - \xi, y - \eta)$ in $x = \xi', y = \eta'$.

Osservazione II. Se un piano $x = \xi$ non è tutto di punti singolari non essenziali per $f(xy)$, ma su esso esistono infiniti punti singolari non essenziali di $f(xy)$, ogni punto (ξ, η) limite di questi punti singolari non essenziali è un punto singolare essenziale di $f(xy)$. Infatti tale punto per l'osservazione precedente non può essere nè regolare, nè singolare non essenziale.

3. Aggiungiamo un lemma sullo sviluppo di LAURENT.

LEMMA. Sia $f(xy)$ una funzione regolare nei punti in cui

$$|x| \leq \delta, \quad k_1 \geq |y| \geq k_2.$$

Essa si svilupperà in serie di LAURENT rapporto ad y con coefficienti funzioni analitiche di x per $|x| \leq \delta$:

$$f(xy) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n(x) y^n. \quad (1)$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè questa funzione sia meromorfa nel campo $|x| \leq \delta, |y| \leq k_1$ è che esista un numero finito $l+1$ di funzioni — analitiche — di $x: A_0(x), A_1(x), \dots, A_l(x)$ tali che sia identicamente per $n < 0$:

$$A_0(x) g_{n-l}(x) + A_1(x) g_{n-l+1}(x) + \dots + A_l(x) g_n(x) = 0. \quad (2)$$

Per maggior chiarezza premettiamo l'osservazione che, se delle funzioni $A_0, A_1, \dots, A_l$ esistono le quali soddisfano alle (2), esse potranno certamente ritenersi funzioni regolari analitiche di x per $|x| \leq \delta$. Infatti osserviamo che le $g_n(x)$ sono funzioni analitiche regolari per $|x| \leq \delta$; e quindi, se le (2) sono equazioni compatibili nelle $A_i(x)$, esse si possono risolvere con funzioni analitiche di x regolari per $|x| \leq \delta$.

Ciò posto, la condizione è sufficiente. Infatti la funzione

$$\psi(xy) = f(xy) \cdot [A_0(x) y^l + A_1(x) y^{l-1} + \dots + A_l(x)]$$

sarà come la $f(xy)$ una funzione regolare per $|x| \leq \delta, k_1 \geq |y| \geq k_2$. Ma

(*) È noto che i soli punti in cui la funzione $f(\xi' y)$ della variabile y può avere un polo sono i punti $(\xi' y)$ in cui $f(xy)$ ha una singolarità non essenziale: non viceversa.

per (1) e (2) essa si svilupperà in questo campo nella forma

$$\psi(xy) = \sum_0^{\infty} [A_0(x) g_{n-l}(x) + A_1(x) g_{n-l+1}(x) + \dots + A_l(x) g_n(x)] y^n$$

e cioè per sole potenze positive di y : onde segue che essa è regolare analitica per $|x| \leq \delta$, $|y| \leq k_1$. Quindi si avrà che

$$f(xy) = \frac{\psi(xy)}{A_0(x)y' + A_1(x)y'^{-1} + \dots + A_l(x)},$$

come quoziente di due funzioni analitiche regolari nel campo $|x| \leq \delta$, $|y| \leq k_1$, sarà meromorfa nel campo medesimo.

La condizione è necessaria. Infatti poichè $f(xy)$ è regolare per $|x| \leq \delta$, $k_1 \geq |y| \geq k_2$, nessun piano $x = x_0$ con $|x_0| \leq \delta$ è una varietà di punti singolari non essenziali di $f(xy)$: onde per l'osservazione II del n. 2 su esso esiste nel cerchio $|y| \leq k_2$ un numero finito di punti singolari non essenziali. Sia m_{x_0} il numero di tali punti sul piano $x = x_0$, ognuno contato colla molteplicità che ha il polo di $f(x_0 y)$ in esso: m_{x_0} avrà per $|x_0| \leq \delta$ un massimo l . Infatti ove questo non esistesse, vi sarebbe un punto $(\xi \eta)$ con $|\xi| \leq \delta$ e $|\eta| \leq k_2$ tale che si troverebbero piani $x = x_0$ che dentro ad un intorno arbitrariamente piccolo di esso, avrebbero un numero di punti singolari non essenziali superiore ad ogni numero fissato grande a piacere: e ciò contraddice per l'osservazione I del n. 2 all'ipotesi che $\xi \eta$ sia un punto regolare non essenziale.

Concludendo su ogni piano $x = x_0$ (con $|x_0| \leq \delta$) $f(x_0 y)$ ha al più l poli, distinti o coincidenti, entro il cerchio $|y| \leq k_2$ e quindi entro il cerchio $|y| \leq k_1$; onde potremo costruire un'equazione

$$A_0(x)y' + A_1(x)y'^{-1} + \dots + A_l(x) = 0 \quad (3)$$

tale che per ogni valore di x i poli di $f(xy)$ siano tra le radici di essa, ciascuno contato colla sua molteplicità. La funzione

$$f(xy) [A_0(x)y' + A_1(x)y'^{-1} + \dots + A_l(x)]$$

sarà quindi su ogni piano $x = \text{cost.}$ una funzione della variabile y regolare entro il cerchio $|y| \leq k_1$ onde il suo sviluppo per potenze di y deve mancare di potenze negative. E ciò richiede che le $A_i(x)$ così costruite soddisfacciano identicamente alle equazioni (2).

Corollario. Il numero l che compare nel precedente enunciato è un limite superiore per il numero dei punti singolari non essenziali di $f(x, y)$ appartenenti ad un piano $x = x_0$ con $|x_0| < \delta$.

4. Premesso questo lemma possiamo dimostrare il seguente

TEOREMA. Sia $f(x, y)$ una funzione analitica di x ed y che nel punto $(0, 0)$ abbia una singolarità essenziale, mentre nei punti di un certo intorno $|y| \leq k$ dell'origine appartenenti al piano $x = 0$ sia meromorfa. Dato un numero ε piccolo a piacere, è sempre possibile trovare un numero δ tale che in ogni piano $x = x_0$ con $|x_0| \leq \delta$ esista sempre almeno un punto singolare essenziale per $f(x, y)$ per cui è $|y| \leq \varepsilon$ (*).

Intanto possiamo supporre che nei punti del piano $x = 0$ la funzione sia generalmente regolare: poichè altrimenti i punti generici del piano $x = 0$ sarebbero tutti punti singolari non essenziali, e quindi esisterebbe un numero n tale che $x^n f(x, y)$ avrebbe ancora come $f(x, y)$ il punto $(0, 0)$ come punto singolare essenziale, e sarebbe meromorfa, ma generalmente regolare per $x = 0$, $y \neq 0$.

Ciò posto le nostre ipotesi dicono che $f(x, y)$ può avere dei punti singolari non essenziali nei punti $(0, y)$ con $y \neq 0$, ma l'unico punto limite che essi possono avere è, per l'osservazione II del n. 2, il punto $(0, 0)$. Onde fissato ε , potremo trovare nel piano $(0, y)$ una corona circolare di centro l'origine limitata dai cerchi di raggio k_1 e k_2 ($k_1 > k_2$), interna ad ambedue i cerchi $|y| \leq k_1$, $|y| \leq \varepsilon$, tale che in qualunque punto di essa e del suo contorno $f(x, y)$ sia regolare: onde per il teorema di LAURENT nel campo medesimo si potrà sviluppare in serie di potenze positive e negative di y :

$$f(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n(x) y^n$$

dove le $g_n(x)$ sono funzioni analitiche di x per $|x| \leq \delta$. E poichè il punto $(0, 0)$ è un punto singolare essenziale, per il lemma precedente le $g_n(x)$ non soddisfanno alcun sistema del tipo (2) per $|x| \leq \delta$.

Ne viene che per $|x_0| \leq \delta$ la $f(x, y)$ ha sul piano $x = x_0$ entro il cerchio $|y| \leq k_2$ — e quindi a fortiori entro il cerchio $|y| \leq \varepsilon$ — almeno un punto singolare essenziale. Invero, ove ciò non fosse, la $f(x, y)$ sarebbe meromorfa

(*) Pel caso che $f(x, y)$ sia regolare nei punti $x = 0$, $0 < |y| \leq k$, questo teorema è stato dimostrato dall'HARTOGS, l. c. 2.º; e poi con una dimostrazione del tipo di quella usata nel testo in l. c. 3.º.

in tutti i punti del piano $x = x_0$, $|y| \leq k$, e vi avrebbe un numero finito di punti singolari non essenziali, poichè altrimenti per l'osservazione II del n. 2 esso sarebbe tutto di punti singolari non essenziali il che è contrario all'ipotesi che per $x = x_0$, $k_1 \geq |y| \geq k_2$, $f(xy)$ sia regolare. Quindi esisterebbe un campo $|x_0 - x| \leq \delta'$, $|y| \leq k_1$ in cui la funzione $f(xy)$ avrebbe solo un numero finito di punti singolari non essenziali su ogni piano $x = \text{cost.}$: e quindi si svilupperebbe in una serie di LAURENT:

$$f(xy) = \sum_{-\infty}^{\infty} g'_n(x) y^n, \quad (5)$$

le $g'_n(x)$ essendo funzioni regolari analitiche di x per $|x - x_0| \leq \delta'$: e per il lemma del n. precedente esisterebbe un numero l tale che le $g'_n(x)$ soddisfanno (per $n < 0$) ad un sistema del tipo (2). Ma poichè i campi $|x - x_0| \leq \delta'$, $k_1 \geq |y| \geq k_2$, e $|x| \leq \delta$, $k_1 \geq |y| \geq k_2$ hanno un campo a quattro dimensioni comune, i due sviluppi (4) e (5) coincidono: e ciò è assurdo poichè le $g_n(x)$ di (4) non possono soddisfare alcun sistema del tipo (2).

Corollario. *L'insieme dei punti singolari essenziali di una funzione analitica di due variabili complesse è perfetto (*).* Infatti esso è chiuso: e per il teorema precedente non contiene alcun punto isolato.

5. Il teorema precedente si può immediatamente estendere quando al punto (00) si sostituisca un punto (ξ, η) generico, alla famiglia dei piani caratteristici $x = \text{cost.}$, una famiglia di varietà caratteristiche *regolare* nell'intorno del punto (ξ, η) . Con quest'ultima espressione vogliamo indicare una famiglia di superficie caratteristiche regolari nell'intorno di (ξ, η) dipendenti analiticamente da un parametro α per modo che per ogni punto dell'intorno passi una ed una sola superficie della famiglia. Perchè l'equazione $\varphi(x, y, \alpha)$ rappresenti una tale famiglia occorre quindi e basta: 1.º che per $\alpha = \alpha_0$ sia $\varphi(\xi, \eta, \alpha_0) = 0$; 2.º che per ogni punto (xy) dell'intorno di (ξ, η) passi una ed una sola superficie della famiglia, in altri termini che l'equazione $\varphi(x, y, \alpha) = 0$ si possa risolvere rapporto ad α , e cioè che sia $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right)_{(\xi, \eta, \alpha_0)} \neq 0$; 3.º che (ξ, η) ed ogni punto dell'intorno sia regolare per la superficie passante per esso,

(*) Era noto che un punto singolare non può essere isolato, e quindi che l'insieme dei punti singolari è perfetto. Il corollario ci dice che esso rimane perfetto se ne sopprimiamo l'insieme dei punti singolari non essenziali.

e cioè che una almeno delle variabili x oppure y si possa esprimere per una serie di potenze intere di y od x rispettivamente; deve esser quindi

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{(\xi, \eta, \alpha_0)} \neq 0, \text{ oppure } \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{(\xi, \eta, \alpha_0)} \neq 0.$$

Ciò posto, a dimostrare la nostra affermazione, si scriva l'equazione della famiglia regolare di superficie nella forma $\psi(x, y) = \alpha$, il che per 2.^o è possibile:

e sia ad es.: $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{(\xi, \eta)} \neq 0$. Si faccia la trasformazione di variabili $x' = \psi(x, y) - \alpha_0$,

$y' = y - \eta$; poichè è $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{(\xi, \eta)} \neq 0$, è questa una trasformazione regolare nel punto (ξ, η) . Una funzione $f(x, y)$ che abbia in (ξ, η) una singolarità essenziale e che sia meromorfa nei punti della superficie $\psi(x, y) = \alpha_0$ diversi da (ξ, η) , diviene una funzione $F(x', y')$ avente una singolarità essenziale in $(0, 0)$ e meromorfa negli altri punti di $x' = 0$. Essa avrà quindi nell'intorno di $x' = 0$ $y' = 0$ un punto singolare essenziale almeno su ogni piano $x' = \text{cost.}$; e cioè la $f(x, y)$ avrà un punto singolare essenziale almeno nell'intorno di (ξ, η) su ogni superficie $\psi(x, y) = \alpha$. Conchiuderemo dunque col seguente

TEOREMA. *Se (ξ, η) è un punto singolare essenziale per la funzione analitica, monodroma $f(x, y)$, e si ha una famiglia regolare analitica di superficie caratteristiche nell'intorno di (ξ, η) tale che in questo intorno sulla superficie passante per (ξ, η) , la $f(x, y)$ è meromorfa tranne che nel punto (ξ, η) , sopra ogni superficie della famiglia esiste nell'intorno di (ξ, η) un punto singolare essenziale almeno di $f(x, y)$.*

6. Sarà questo il teorema fondamentale per le considerazioni che seguono. Poichè ogni volta che, dato un insieme di punti, si può prendere una famiglia analitica di superficie caratteristiche regolare in un punto (ξ, η) dell'insieme, tale che una di esse contenga il solo punto (ξ, η) dell'insieme, ma infinite ne esistono che non ne contengono alcuno, potremo concludere che l'insieme dato non può essere l'insieme dei punti singolari essenziali di una funzione analitica.

Ci verrà sovente utile la seguente osservazione: Se $\varphi(x, y) = 0$ è una superficie caratteristica regolare in (ξ, η) , la famiglia che se ne ottiene assoggettandola a tutte le traslazioni che portano (ξ, η) nei vari punti di un piano caratteristico per (ξ, η) non tangente a $\varphi(x, y) = 0$, è regolare in (ξ, η) .

Infatti se $X - \xi - p(Y - \eta) = 0$ è un tal piano, la famiglia è data da $\varphi(x + p\alpha, y + \alpha) = 0$: e si ha:

1.° per $\alpha = 0$, $\varphi(\xi, \eta) = 0$;

2.° poichè $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right)_{(\xi, \eta, 0)} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{(\xi, \eta, 0)} p + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{(\xi, \eta, 0)}$ ed il piano $X - \xi = p(Y - \eta)$ non è tangente a $\varphi(x, y) = 0$ sarà certamente $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right)_{(\xi, \eta, 0)} \neq 0$.

3.° poichè $\varphi(x, y) = 0$ è regolare in (ξ, η) , è $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{(\xi, \eta, 0)} \neq 0$ oppure è $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{(\xi, \eta, 0)} \neq 0$.

§ II.

7. Sia E un insieme perfetto di punti, O un punto arbitrario fisso dello spazio, $r(OP)$ la distanza di O dal punto generico P di E . Se esiste un punto P' di E tale che $r(OP')$ sia il massimo dei valori che $r(OP)$ prende nell'intorno di P' , non può esistere una funzione analitica monodroma la quale abbia l'insieme E come insieme di punti singolari essenziali.

Si supponga per semplicità che O sia l'origine, che le coordinate di P' siano (ξ, η) e che ad es. sia $\xi \neq 0$.

Osserviamo anzitutto che è sempre possibile costruire una superficie caratteristica data da un'equazione

$$x = \xi + a(y - \eta) + b(y - \eta)^2 + c(y - \eta)^3 + \dots \quad (1)$$

passante per P' , regolare in questo punto e tale che i suoi punti nell'intorno di P' diversi da P' abbiano da O una distanza maggiore (non mai uguale) di $r(OP')$: basta perciò disporre convenientemente dei valori di a e b . Invero, posto $a = a_1 + i a_2$, $b = b_1 + i b_2$, le equazioni reali contenute in (1) sono

$$\left. \begin{aligned} x_1 - \xi_1 &= a_1(y_1 - \eta_1) - a_2(y_2 - \eta_2) + b_1(y_1 - \eta_1)^2 - \\ &\quad - b_2(y_2 - \eta_2)^2 + 2b_2(y_1 - \eta_1)(y_2 - \eta_2) + \dots \\ x_2 - \xi_2 &= a_2(y_1 - \eta_1) + a_1(y_2 - \eta_2) + b_2(y_1 - \eta_1)^2 - \\ &\quad - b_1(y_2 - \eta_2)^2 + 2b_1(y_1 - \eta_1)(y_2 - \eta_2) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Quindi posto $\varphi(y_1, y_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2) = \frac{1}{2}r^2(OP)$ dove x_1, x_2

sono date dalle (2) sarà :

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \right)_{(\xi \eta)} &= \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \eta_1 & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \right)_{(\xi \eta)} &= \xi_2 a_1 - \xi_1 a_2 + \eta_2 \\ \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} \right)_{(\xi \eta)} &= 1 + |a|^2 + 2(\xi_1 b_1 + \xi_2 b_2) & \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2} \right)_{(\xi \eta)} &= 1 + |a|^2 - 2(\xi_1 b_1 + \xi_2 b_2) \\ \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1 \partial y_2} \right)_{(\xi \eta)} &= 2(\xi_2 b_1 - \xi_1 b_2). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Affinchè dunque la φ e quindi la distanza da O dei punti di (1) abbia un minimo effettivo nel punto (ξ, η) basterà che: 1.º le a_1, a_2 siano determinate per modo che

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \right)_{(\xi \eta)} &\equiv \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \eta_1 = 0 \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \right)_{(\xi \eta)} &\equiv \xi_2 a_1 - \xi_1 a_2 + \eta_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

il che è sempre possibile poichè il determinante di queste equazioni lineari è uguale a $-|\xi|^2 \neq 0$ per ipotesi; 2.º inoltre b_1 e b_2 siano tali che

$$0 > \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1 \partial y_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2} \right]_{(\xi \eta)} \equiv 4|\xi|^2 \cdot |b|^2 - (1 + |a|^2)^2 \quad (5)$$

e

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} \right)_{(\xi \eta)} > 0. \quad (6)$$

Ma quanto a (5) basterà prendere $|b| < \frac{1 + |a|^2}{2|\xi|}$ perchè risulti soddisfatta; ed allora la (6) sarà soddisfatta di necessità poichè $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} \right)_{(\xi \eta)}$ e $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2} \right)_{(\xi \eta)}$ avranno certamente il medesimo segno, e precisamente lo stesso segno della loro somma, che per le (3) è

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} \right)_{(\xi \eta)} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2} \right)_{(\xi \eta)} = 1 + |a|^2 > 0.$$

Ciò posto, supponiamo dato un insieme E quale è stato detto nell'enunciato. Costruiamo come si è fatto ora una superficie caratteristica S passante per P' , regolare in P' , tale che tutti i suoi punti nell'intorno di P' abbiano

da O una distanza maggiore di $r(OP')$ ed assoggettiamo S a tutte le traslazioni che portano P' in un punto del piano caratteristico passante per OP' . Questo piano non può essere il piano tangente in (ξ, η) a S ; infatti le (4) esprimono precisamente che il piano caratteristico tangente a S giace nell'iperpiano $\xi_1(X_1 - \xi_1) + \xi_2(X_2 - \xi_2) + \eta_1(Y_1 - \eta_1) + \eta_2(Y_2 - \eta_2) = 0$, normale alla retta che congiunge O con P' , la quale è invece contenuta nel piano caratteristico OP' . Quindi pel n. 6 la famiglia di superficie caratteristiche così costruita è regolare nel punto P' . E delle superficie di questa famiglia, la superficie S ha nell'intorno di P' il solo punto P' comune con E ; mentre le infinite superficie S' che si hanno per una traslazione sufficientemente piccola lungo la retta $\overrightarrow{OP'}$ nel verso da O a P' , non hanno nell'intorno di P' alcun punto comune con E (*). Se ora fosse E l'insieme dei punti singolari essenziali di una funzione $f(xy)$ meromorfa e monodroma, la superficie S non avrebbe nell'intorno di P' che il solo punto P' singolare essenziale per $f(xy)$, e le superficie S' non avrebbero punti singolari essenziali per $f(xy)$: ora questo contraddice al teorema del n. 5: quindi è assurda l'esistenza di $f(xy)$.

Corollarii. I. L'insieme dei punti singolari di una funzione $f(xy)$ non può contenere una parte perfetta isolata tutta al finito. Poichè evidentemente in una tale parte esisterebbe un punto quale il punto P' del teorema precedente.

In particolare si può dare a questo corollario la forma seguente:

II. Se una funzione $f(xy)$ è meromorfa in tutti i punti di una ipersuperficie chiusa, è meromorfa all'interno di essa (**). Onde segue ad esempio che una funzione monodroma, meromorfa di due variabili non può avere spazi lacunari tutti al finito. È questo un primo teorema che contraddice all'affermazione del WEIERSTRASS richiamata al n. 1: ne vedremo tosto altri anche più interessanti nei nn. seguenti e nel § III.

8. Dal precedente teorema è però agevole trarre conseguenze un po' più nascoste che i precedenti corollarii.

Consideriamo nei piani $y = \text{cost.}$ il cerchio $|x| \leq r$, nei piani $x = \text{cost.}$

(*) Poichè per tale traslazione il punto P' si allontanerà da O e lo stesso accadrà dei punti di un intorno di P' .

(**) Per le funzioni olomorfe in tutti i punti di una ipersuperficie chiusa vedi HARTOGS, l. c., Münch. Sitz. Ber.

un campo B_1 , che supponiamo tutto interno al cerchio $|y| \leq r_1$, e chiamiamo C_1 il suo contorno. Supponiamo che una funzione $f(xy)$ sia meromorfa:

a) in tutti i punti $(0, y)$ dove y è in B_1 o su C_1 ,

b) in tutti i punti (xy) dove y è su C_1 e $|x| < r$;

allora potremo affermare che la funzione $f(xy)$ è meromorfa in tutti i punti (xy) dove $|x| < r$ ed y è in B_1 .

Se il teorema non fosse vero, esisterebbe un punto singolare essenziale (ξ, η) per cui $|\xi| < r$ ed η è in B_1 : poniamo $|\xi| = \rho$.

Facciamo allora la trasformazione $X = \frac{k}{x}$ dove $k = \frac{r_1 r \rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}$. La funzione $f(xy)$ diverrà una funzione $F(Xy)$; e siccome la funzione $f(xy)$ è meromorfa nei punti $(0, y)$ quando y è in B_1 o su C_1 , e quindi pure esiste un numero σ tale che $f(xy)$ è meromorfa in tutti i punti (xy) per cui y è in B_1 o su C_1 e $|x| \leq \sigma$, anche la $F(Xy)$ è meromorfa in tutti i punti (X, y) per cui $|X| \geq \frac{k}{\sigma}$ e y è in B_1 o su C_1 ; e poichè la funzione $f(xy)$ è meromorfa in tutti i punti (xy) per cui $|x| < r$ ed y è su C_1 , la $F(Xy)$ è pure meromorfa in tutti i punti (Xy) per cui $|X| > \frac{k}{r} = \frac{r_1 \rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}$ e y su C_1 ; ed infine $F(Xy)$ avrà nel punto $\left(\frac{k}{\xi}, \eta\right)$, per l'ipotesi fatta su $f(xy)$, un punto singolare essenziale interno al campo $\left[|X| > \frac{r_1 \rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}, y \text{ in } B_1\right]$.

Consideriamo l'insieme E_1 dei punti singolari essenziali di $F(Xy)$ all'interno o sul contorno del campo $\left[|X| > \frac{r_1 \rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}, y \text{ in } B_1 \text{ o su } C_1\right]$; sarà questo un insieme perfetto tutto al finito, e di più, poichè la funzione $F(Xy)$ è meromorfa per y su C_1 ed $|X| > \frac{r_1 \rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}$, se esistono punti di E_1 sul contorno del campo essi appartengono necessariamente alla varietà $|X| = \frac{r_1 \rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}$, y in B_1 . D'altra parte se diciamo R il massimo della distanza di un punto di E_1 dall'origine, poichè $\left(\frac{k}{\xi}, \eta\right)$ è un punto di E_1 sarà certamente $R \geq \sqrt{\frac{k^2}{\rho^2} + |\eta|^2} \geq \frac{k}{\rho} = \frac{r r_1}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}$. Ne segue che un punto P' di E_1 il quale disti dall'origine di R è certamente interno al campo $\left[|X| > \frac{r_1 \rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}},\right]$

y in B_1 o su C_1], perchè la sfera $|X|^2 + |y|^2 = R^2$ incontra la varietà $|X| = \frac{r_1 \rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}$ in punti per cui è $|y| = \sqrt{R^2 - \frac{r_1^2 \rho^2}{r^2 - \rho^2}} \geq r_1$ e quindi certo all'esterno del campo B_1 .

Trovandosi P' all'interno — e non sul contorno — del campo $\left[|X| > \frac{r_1 \rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}, y \text{ in } B_1 \right]$, ne segue che nell'intorno di P' non si trovano altri punti singolari essenziali di $F(X, y)$ oltre a quelli di E_1 ; onde il punto P' si troverà nelle condizioni del teorema del n. precedente: il che è assurdo. Quindi anche $f(x, y)$ non può certamente avere un punto singolare essenziale all'interno del campo $|x| < r, y \text{ in } B_1$ c. v. d.

9. Invece di considerare sui piani $y = \text{cost.}$ il cerchio $|x| = r$, si potrà evidentemente considerare un campo B che si possa rappresentare conformemente su un cerchio di raggio r : poichè se $x' = \psi(x)$ è la funzione analitica della variabile x che dà questa rappresentazione conforme, la trasformazione $x' = \psi(x), y = y$ sarà regolare per x interno a B ed y qualunque, onde muta la funzione $f(x, y)$ in una funzione $F(x', y)$ che sarà meromorfa all'interno del campo $[|x'| < r, y \text{ in } B]$, allora ed allora soltanto che la funzione $f(x, y)$ è meromorfa per x interno al campo B ed y interno al campo B_1 . Onde potremo concludere:

Se B rappresenta un campo qualunque nei piani $y = \text{cost.}$ che si possa rappresentare conformemente su un cerchio ed $x = a$ è un punto di esso, se B_1 rappresenta un campo interno al cerchio $|y| \leq r_1$ e C_1 ne indica il contorno, se infine $f(x, y)$ è una funzione meromorfa

a) *in tutti i punti (a, y) dove y è in B_1 o su C_1 ,*

b) *in tutti i punti (x, y) dove x è in B e y su C_1 ,*

allora potremo affermare che la funzione $f(x, y)$ è meromorfa in tutti i punti (x, y) per cui x è in B ed y in B_1 o su C_1 ().*

10. Sia $f(x, y)$ una funzione meromorfa sul piano $x = 0$ quando y è interno ad un certo campo B_1 tutto al finito o sul contorno C_1 di esso; sopra ogni piano $y = y_0$, y_0 essendo un punto di B_1 o C_1 , esisterà un massimo

(*) Pel caso che la $f(x, y)$ sia olomorfa vedi HARTOGS, l. c. 2.º

cerchio di centro $x=0$ entro cui $f(x, y)$ è meromorfa. Diciamo R_{y_0} il raggio di tale cerchio (*): sarà R_{y_0} la minima distanza dal piano $x=0$ dei punti singolari essenziali di $f(x, y)$ appartenenti al piano $y=y_0$. Osserviamo subito per la R_y la seguente proprietà:

La funzione R_y è semicontinua inferiormente; ossia, assegnato un numero ε , è sempre possibile trovare un numero δ tale che per $|y - y_0| < \delta$ sia $R_y \geq R_{y_0} - \varepsilon$.

Infatti ove ciò non fosse esisterebbero infiniti valori $y_1, y_2, \dots, y_i, \dots$ tali che $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = y_0$ e $R_{y_i} < R_{y_0} - \varepsilon$. I punti singolari essenziali (x_i, y_i) con $|x_i| = R_i$ che si trovano nei piani $y = y_i$ avrebbero allora un punto limite (x_0, y_0) con $|x_0| \leq R_{y_0} - \varepsilon$, e questo sarebbe necessariamente un punto singolare essenziale, il che è assurdo poichè per ipotesi entro al cerchio $|x| < R_{y_0}$ sul piano $y = y_0$ non esistono punti singolari essenziali.

Ma dal teorema del n. 8 segue una proprietà ancora più notevole:

Se p_y è una funzione reale di y_1 ed y_2 , definita in B_1 , che sul contorno C_1 soddisfa alla limitazione $0 < p_y \leq R_y$ ed all'interno di B_1 all'equazione $\Delta''_2 \log p_y = 0$ (**), in tutti i punti di B_1 sarà pure

$$p_y \leq R_y. \quad (7)$$

Infatti su C_1 , poichè è $0 < p_y \leq R_y$, $\log p_y$ è sempre finito: l'ipotesi che in B_1 sia $\Delta''_2 \log p_y = 0$ porta che $\log p_y$ sia sempre finita e regolare: quindi sarà sempre $p_y > 0$ anche all'interno di B_1 .

Indichiamo con q_y la funzione coniugata di $\log p_y$ — fissandone arbitrariamente la costante additiva —; le funzioni

$$\varphi(y) = \log p_y + i q_y$$

$$\psi(y) = e^{\varphi(y)} = p_y e^{iq_y}$$

sono funzioni regolari analitiche di y in B_1 ; e sarà $|\psi(y)| = p_y > 0$.

(*) L'HARTOGS chiama analogamente R'_{x_0} la minima distanza di un punto singolare essenziale o no del piano $x=x_0$ dal piano $y=0$. Cfr. l. c., *Math. Ann.* E mediante considerazioni sugli sviluppi in serie dimostra per questa funzione proprietà analoghe a quelle che seguono nel testo. Cfr. specialmente i §§ 5, 6, 8, 10.

(**) Poniamo qui e nel seguito $\Delta'_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, $\Delta''_2 = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}$.

Facciamo allora la trasformazione

$$X = \frac{x}{\psi(y)} \quad Y = y. \quad (8)$$

È questa una trasformazione regolare invertibile in tutti i punti per cui y è interno a B_1 o su C_1 ; e se, come segue dall'ipotesi che su C_1 sia $R_y \cong p_y$, la $f(xy)$ è meromorfa

a) nei punti $(0, y)$ per cui y è in B_1 o su C_1 ,

b) nei punti (x, y) quando y è su C_1 e $|x| < p_y$;

la funzione $F(X, Y)$ trasformata di $f(xy)$ per la (8) è meromorfa

a') nei punti $(0, Y)$ per cui Y è in B_1 o su C_1 ,

b') nei punti (X, Y) per cui Y è su C_1 e $|X| < 1$.

Segue dal teorema del n. 8 che $F(X, Y)$ è meromorfa in tutti i punti (X, Y) per cui Y è in B_1 o su C_1 , e $|X| < 1$; ossia che $f(xy)$ è meromorfa in tutti i punti per cui y è in B_1 o su C_1 , e $|x| < |\psi(y)| = p_y$. Quindi sarà certo $R_y \cong p_y$: c. v. d.

Dai due teoremi dimostrati per R_y seguono, ragionando come fa l'HARTOGS nella Memoria citata dei *Math. Ann.* al § 8 (n. 1, Zusatz, pag. 47 e 48; e n. 3), i seguenti corollari:

1.º *Mantenute le notazioni del teorema precedente, se anche in un sol punto y_0 interno a B_1 è $R_{y_0} = p_{y_0}$ sarà allora ovunque in B_1*

$$R_y = p_y;$$

2.º *Se R_y ammette le derivate dei primi due ordini rapporto ad y_1 e y_2 , essa soddisfa alla disuguaglianza*

$$\Delta''_2 \log R_y \leq 0.$$

Il teorema precedente ed il suo primo corollario sono — insieme col teorema fondamentale del § I — i teoremi su cui fonda l'HARTOGS tutti i ragionamenti che svolge nella Memoria citata degli *Acta Mathematica*: senza ripeterli quindi noi potremo concludere coi seguenti enunciati che si ottengono da quelli dell'HARTOGS mutando le parole « funzione regolare » e « punto singolare » nelle parole « funzione meromorfa » e « punto singolare essenziale. »

I. *Se $x = 0, y = 0$ è un punto singolare essenziale per una funzione ana-*

litica $f(x, y)$ monodroma (*) di x ed y ; e se l'insieme dei punti singolari essenziali di $f(x, y)$ in un certo intorno $|x| < \rho$, $|y| < \rho'$ dell'origine è così costituito che in ogni piano $x = x_0$ di esso vi sia al più un punto singolare essenziale mentre nei residui la funzione è meromorfa, esiste allora su ogni piano $x = \xi$ dove ξ appartiene ad un conveniente intorno dello zero un punto singolare essenziale $(\xi, \varphi(\xi))$, e la funzione $\varphi(\xi)$ è una funzione analitica regolare di ξ (l. c., pag. 70).

II. Se nelle stesse condizioni del teorema precedente su ogni piano $x = \xi \neq 0$ esistono proprio r punti singolari essenziali di $f(x, y)$ $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$, le loro funzioni simmetriche elementari sono funzioni regolari analitiche di ξ ; od in altri termini le $\eta_i(\xi)$ sono funzioni analitiche di ξ le quali per $\xi = 0$ hanno al più un punto di diramazione (l. c., pag. 76).

Non tralascieremo di notare che la proprietà dimostrata per la funzione R_y è in certa qual guisa caratteristica per essa: precisamente che se è assegnata una funzione U_y reale, finita, avente derivate prime e seconde finite e continue e soddisfacente alla condizione $\Delta''_2 U_y = 0$ in un campo T , è sempre possibile trovare una funzione $f(x, y)$ per cui la funzione R_y sia in T uguale ad e^{U_y} . Infatti in queste ipotesi l'HARTOGS costruisce (**) una funzione $\varphi(x, y)$ che ha in ogni piano $y = y_0$ sopra il cerchio di raggio e^{U_y} e centro l'origine un punto singolare essenziale o no, ed è regolare all'interno del cerchio: basterà allora considerare la funzione $f(x, y) = e^{\varphi(x, y)}$, perchè la nuova funzione ottenuta pure restando regolare all'interno di quei cerchi abbia sul contorno di essi una singolarità essenziale.

§ III.

11. Sia $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$ una ipersuperficie S dello spazio a 4 dimensioni: vogliamo esaminare quando essa possa essere frontiera del campo di esistenza di una funzione analitica meromorfa: in altri termini vogliamo

(*) Evidentemente si può anche supporre $f(x, y)$ un ramo monodromo nell'intorno del punto (00) di una funzione polidroma. L'HARTOGS tratta anche il caso in cui $f(x, y)$ abbia un punto critico in (00), non sarebbe difficile anche a noi raggiungere con qualche complemento la stessa estensione.

(**) L. c., *Math. Ann.*, § 10.

vedere quando la S è tale che esiste una funzione analitica meromorfa in una delle regioni Π che hanno S per frontiera per cui tutti i punti di S siano singolari essenziali. Cambiando al più il segno di φ possiamo supporre che la regione Π sia quella in cui è

$$\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) > 0.$$

Applicheremo ancora il teorema del § I. Consideriamo un punto $P \equiv (\xi, \eta)$ di S , e supponiamo di poter costruire una superficie caratteristica Σ che passi per P , ed ivi sia regolare e tocchi l'ipersuperficie S , ed infine non abbia nell'intorno di P altri punti comuni con S . Essa cadrà nell'intorno di P tutta in una delle due regioni in cui S divide lo spazio: affinchè nella regione $\varphi > 0$ possa esistere una funzione $f(x, y)$ che ammetta S come frontiera, è necessario che *ogni tale superficie caratteristica cada nella regione $\varphi < 0$* .

Infatti assoggettiamo Σ alle traslazioni che portano P nei punti del piano caratteristico che contiene la normale a S per P ; poichè questo piano non è tangente a Σ , la famiglia di superficie così generata è una famiglia regolare in P . Inoltre le superficie corrispondenti ad una traslazione sufficientemente piccola diretta secondo la normale a S in P volta verso la regione in cui cade Σ non hanno nell'intorno del punto P punti comuni con S (*). Se quindi Σ giacesse nella regione $\varphi > 0$, la $f(x, y)$ sarebbe meromorfa in tutti i punti di Σ dell'intorno di P , fuori che in P , e meromorfa in tutti i punti dell'intorno di P di queste superficie: e ciò per il teorema I è assurdo.

12. Cerchiamo dunque di costruire una superficie caratteristica Σ che goda rispetto a S nel punto (ξ, η) delle proprietà dette sopra. Supporremo che la φ abbia le derivate dei primi due ordini finite e continue. In un punto regolare di S non si avrà $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = 0$; onde sarà $\Delta'_1 \varphi \neq 0$ oppure $\Delta''_1 \varphi \neq 0$ (**).

(*) Tale affermazione è geometricamente evidente: ci si può ridurre all'intuizione geometrica nello spazio a 3 dimensioni segnando con un iperpiano variabile attorno alla normale a S in P .

(**) In modo analogo a quanto si fece al n. 10 poniamo

$$\Delta'_1 = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2; \quad \Delta''_1 = \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)^2; \quad \Delta'_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}; \quad \Delta''_2 = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}.$$

Supporremo, per fissare le idee, che nel punto (ξ, η) sia $\Delta'_1 \varphi = 0$.

La superficie Σ sia allora data come nel § II dall'equazione tra le variabili complesse:

$$x = \xi + a(y - \eta) + b(y - \eta)^2 + c(y - \eta)^3 + \dots \quad (1)$$

e cioè dal sistema di equazioni tra le variabili reali:

$$\left. \begin{aligned} x_1 - \xi_1 &= a_1(y_1 - \eta_1) - a_2(y_2 - \eta_2) + b_1(y_1 - \eta_1)^2 - \\ &\quad - b_1(y_2 - \eta_2)^2 - 2b_2(y_1 - \eta_1)(y_2 - \eta_2) + \dots \\ x_2 - \xi_2 &= a_2(y_1 - \eta_1) + a_1(y_2 - \eta_2) + b_2(y_1 - \eta_1)^2 - \\ &\quad - b_2(y_2 - \eta_2)^2 + 2b_1(y_1 - \eta_1)(y_2 - \eta_2) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Calcolando il valore di $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2)$ nei punti di Σ avremo dunque, ricordando che P è su S ossia che $\varphi(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) &= (y_1 - \eta_1) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} a_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} a_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \right] + \\ &\quad + (y_2 - \eta_2) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} a_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} a_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \right] + \\ &\quad + (y_1 - \eta_1)^2 \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} b_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} b_2 + A_1 \right] + \\ &\quad + (y_2 - \eta_2)^2 \left[-\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} b_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} b_2 + C_1 \right] + \\ &\quad + 2(y_1 - \eta_1)(y_2 - \eta_2) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} b_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} b_2 + B_1 \right] + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

i termini tralasciati essendo di ordine maggiore del secondo nelle quantità $y_1 - \eta_1, y_2 - \eta_2$. Nella (3) si deve intendere che le $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial y_2}$ siano calcolate nel punto (ξ, η) : inoltre A_1, B_1, C_1 non dipendono da b_1 e b_2 e precisamente è:

$$\left. \begin{aligned} 2A_1 &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} a_1^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} a_1 a_2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} a_2^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_1} a_1 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_1} a_2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2}, \\ B_1 &= - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right) a_1 a_2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} (a_1^2 - a_2^2) + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_1} \right) a_1 - \\ &\quad - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_1} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_2} \right) a_2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1 \partial y_2}, \\ 2C_1 &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} a_1^2 - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} a_1 a_2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} a_2^2 - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_2} a_2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_2} a_1 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

dove però le derivate seconde debbono intendersi tutte calcolate in un punto intermedio del segmento che unisce $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ con (x_1, x_2, y_1, y_2) . Affinchè la superficie Σ data da (2) abbia il solo punto P comune con S occorrerà intanto che sia

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} a_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} a_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} a_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} a_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = 0. \quad (5)$$

Per l'ipotesi che in (ξ, η) sia $\Delta'_1 \varphi \neq 0$ queste equazioni ammettono sempre soluzione; e precisamente si ha

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{\Delta'_1 \varphi} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \right\} \\ a_2 &= \frac{1}{\Delta'_1 \varphi} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

Affinchè Σ sia dunque una delle superficie richieste occorre che a_1 ed a_2 siano dati dalle (6); riconosciamo subito con ciò che necessariamente è anche soddisfatta la condizione che Σ ed S siano tangenti poichè le (5) esprimono precisamente che il piano tangente a Σ giace nell'iperpiano tangente a S .

Ma le condizioni precedenti non bastano ad assicurare che Σ abbia il solo punto P comune con S ; perciò basterà invece determinare b_1 e b_2 per modo che la forma quadratica costituita dai termini di secondo grado di (3) sia definita: ed anzi per la supposta continuità delle derivate seconde di φ , basterà che sia definita quella forma che si ottiene da questa col prendere per le derivate seconde delle φ che compaiono nei coefficienti di quella forma i valori che esse assumono nel punto (ξ, η) ; — e così intenderemo di fare d'ora in poi —. Ed allora affinchè Σ giaccia nel campo $\varphi < 0$ occorrerà che la forma sia definita negativa.

Ora affinchè questa forma sia definita occorre si abbia

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} b_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} b_2 + B_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} b_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} b_2 + A_1 \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} b_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} b_2 - C_1 \right) < 0 \quad (7)$$

ed allora essa sarà definita positiva o negativa a seconda che è > 0 oppure < 0 la somma dei coefficienti di $(y_1 - \eta_1)^2$ e $(y_2 - \eta_2)^2$; ossia secondo che

$$A_1 + C_1 > 0 \quad \text{oppure} \quad A_1 + C_1 < 0.$$

Ma perchè b_1 e b_2 si possano determinare per modo che (7) sia soddisfatta occorre e basta che sia $A_1 + C_1 \neq 0$: perchè se $A_1 + C_1 = 0$ basta

determinare b_1 e b_2 colle condizioni che $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} b_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} b_2 + B_1 = 0$ e che $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} b_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} b_2$ sia compreso fra $-A_1$ e C_1 perchè risulti soddisfatta la (7), mentre se $A_1 = -C_1$ il primo membro di (7), come somma di due quadrati, risulterà ≥ 0 .

Concludiamo dunque che se $A_1 + C_1 > 0$ si può rendere la nostra forma definita positiva, se $A_1 + C_1 < 0$, la si può rendere definita negativa. E quindi infine che affinchè non si possa costruire una superficie Σ come quella indicata al n. precedente, oppure che essa cada necessariamente nella regione $\varphi < 0$, occorre sia

$$A_1 + C_1 \leq 0. \quad (8)$$

Sostituiamo ad A_1 , C_1 , a_1 , a_2 i valori dati da (4) e (6): la (8) diviene

$$A_1 + C_1 = \frac{1}{2\Delta'_1 \varphi} \left\{ \Delta'_2 \varphi \cdot \Delta''_1 \varphi + \Delta''_2 \varphi \cdot \Delta'_1 \varphi - 2 \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \right] \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_1} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_2} \right] - \right. \\ \left. - 2 \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \right] \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_1} \right] \right\} \leq 0. \quad (9)$$

Poichè si è supposto $\Delta'_1 \varphi \neq 0$ e quindi > 0 , la (9) si tradurrà quindi nel chiedere che la parte tra parentesi del secondo membro di (9) sia ≤ 0 . In tale forma la condizione (9) viene ad essere simmetrica nelle due coppie di variabili x_1, x_2 ed y_1, y_2 , onde essa risulta indipendente dalla ipotesi che sia $\Delta'_1 \varphi \neq 0$ piuttosto che $\Delta''_1 \varphi \neq 0$.

Raccogliendo:

Affinchè una ipersuperficie S di equazione $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$ possa essere frontiera per una funzione $f(xy)$ analitica, monodroma, meromorfa in uno dei campi in cui essa divide lo spazio (od in parte di esso) è necessario che la quantità

$$\mathfrak{Q}\varphi \equiv \Delta'_2 \varphi \cdot \Delta''_1 \varphi + \Delta''_2 \varphi \cdot \Delta'_1 \varphi - 2 \left\{ \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \right| \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_1} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_2} \right| - \right. \\ \left. - 2 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \right| \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_1} \right| \right\} \quad (10)$$

conservi nei punti di S un segno determinato.

Se si ha sempre $\mathfrak{G}\varphi \leq 0$ una funzione $f(x, y)$ che abbia S come frontiera può esistere solo nel campo in cui è $\varphi > 0$; se si ha sempre $\mathfrak{G}\varphi \geq 0$ una funzione $f(x, y)$ che abbia S per frontiera può esistere solo nel campo $\varphi < 0$.

Corollario. Le sole ipersuperficie $\varphi = 0$ che possono essere frontiera comune per due funzioni $f(x, y)$ meromorfe l'una nel campo $\varphi > 0$, l'altra nel campo $\varphi < 0$ sono le soluzioni dell'equazione differenziale

$$\mathfrak{G}\varphi = 0. \quad (11)$$

13. Sarebbe ora assai interessante rispondere alla domanda: *Le condizioni precedenti sono caratteristiche per le ipersuperficie che possono essere frontiera di qualche funzione analitica?* Con maggior precisione: *data una funzione $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$ tale che nei punti della ipersuperficie $\varphi = 0$ (o di un pezzo di essa) sia sempre $\mathfrak{G}\varphi \geq 0$, esiste sempre una funzione $f(x, y)$ analitica, monodroma, meromorfa nei punti del campo $\varphi < 0$ dell'intorno della ipersuperficie, che abbia l'ipersuperficie medesima (o quella parte di essa) come frontiera e cioè come varietà di punti singolari essenziali?*

Non mi è riuscito di dare a questa domanda una risposta esauriente; mi pare tuttavia che non sia privo di interesse il mostrare come nel caso particolare in cui la funzione $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2)$ soddisfaccia nei punti in cui $\varphi = 0$ all'equazione

$$\mathfrak{G}\varphi = 0 \quad (11)$$

è realmente possibile costruire funzioni meromorfe sia nel campo $\varphi < 0$ che nel campo $\varphi > 0$ che abbiano per frontiera l'ipersuperficie S od almeno una parte di essa sufficientemente limitata: risultato che mi pare renda molto probabile che anche alla domanda più generale fatta sopra si dovrà rispondere affermativamente.

Dimostreremo perciò il seguente lemma che mi pare anche interessante per se medesimo:

Le ipersuperficie $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$ tali che nei loro punti la funzione φ soddisfa l'equazione (11) sono tutte e sole le ipersuperficie dello spazio a quattro dimensioni composte con una semplice infinità di superficie caratteristiche.

Affinchè l'ipersuperficie

$$\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0 \quad (12)$$

sia composta con ∞^1 superficie caratteristiche è necessario e sufficiente che si possa trovare una funzione $\psi(x_1, x_2, y_1, y_2)$ tale che associando alla (12) l'e-

quazione

$$\psi(x_1, x_2, y_1, y_2) = \alpha \quad (13)$$

dove α indica un parametro arbitrario, si possano dalle (12) e (13) ricavare ad es.: le x_1, x_2 in funzione di y_1, y_2 in modo che risultino soddisfatte le equazioni

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \quad \frac{\partial x_1}{\partial y_2} = -\frac{\partial x_2}{\partial y_1} \quad (14)$$

Al sistema formato dalle (12) e (13) se ne può evidentemente sostituire uno equivalente in cui la ψ risulti indipendente da x_1 (o da x_2): onde al posto della (13) potremo supporre di avere un'equazione del tipo

$$\psi(x_2, y_1, y_2) = \alpha. \quad (15)$$

Le equazioni (14) si possono allora scrivere

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial y_2} &= 0 \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial y_2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

e queste dovranno essere soddisfatte per x_1, x_2, y_1, y_2 soddisfacenti a (12).

Le (16) sono un sistema di equazioni lineari alle derivate parziali per la $\psi(x_2, y_1, y_2)$; affinchè esso ammetta una soluzione non costante occorre che sia completo (*). Forniamo l'alternata delle due equazioni, ricordando che nell'eseguire questo calcolo occorre pensare le variabili x_1, x_2, y_1, y_2

(*) Può essere utile la considerazione che segue, la quale permette di prevedere, diremo così, sinteticamente che il risultato del calcolo del testo che esprime che il sistema (16) è completo, deve riportarci all'equazione $\mathfrak{C}\varphi = 0$. Si ammetta perciò che, come è dimostrato nel n. seguente, una ipersuperficie composta di superficie caratteristiche possa sempre essere frontiera comune per due funzioni $f(xy)$ meromorfe l'una nel campo $\varphi > 0$, l'altra nel campo $\varphi < 0$. Ne segue per il n. 12 che per $\varphi = 0$ dovrà necessariamente essere soddisfatta l'equazione di secondo ordine $\mathfrak{C}\varphi = 0$. Ma d'altro canto l'esprimere che il sistema (16) è, per $\varphi = 0$, completo porta evidentemente ad un'equazione di secondo ordine che φ deve soddisfare nei punti $\varphi = 0$. Questa equazione non può quindi differire dall'equazione $\mathfrak{C}\varphi = 0$.

legate dalla (12): otterremo l'equazione

$$\begin{aligned} & \left[\Delta''_2 \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_1} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_1} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \right] \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \\ & + \left[-\Delta'_2 \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_1} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_1} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \right] \frac{\partial \psi}{\partial y_1} + \\ & + \left[-\Delta'_2 \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_1} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_1} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \right] \frac{\partial \psi}{\partial y_2} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Ed affinchè questa equazione sia conseguenza di (16) occorrerà che il determinante dei coefficienti di (16) e (17) sia nullo: sviluppando i calcoli si ottiene che deve essere perciò — nei punti di (12) —

$$\Delta \varphi = 0.$$

Inversamente, soddisfatta questa equazione, il sistema (16) è completo; e presa una qualunque sua soluzione quale primo membro di (15), le (15) segano sulla varietà (12) un sistema semplicemente infinito di superficie caratteristiche. La simmetria rapporto alle variabili x_1, x_2 , e y_1, y_2 del risultato indica che questo è indipendente dall'aver supposto la (12) risolubile rapporto a x_1 . Il lemma è quindi pienamente dimostrato.

14. Per provare ora che preso un pezzo sufficientemente piccolo di una ipersuperficie S soddisfacente a (11) è sempre possibile costruire una funzione analitica esistente nell'intorno di S da una parte prefissata e che ha S per frontiera noi dimostreremo che, almeno quando si suppone il campo che si considera sufficientemente piccolo, si può sempre immergere la semplice infinità di superficie caratteristiche costituenti S in una doppia infinità tale che per ogni punto del campo passi una ed una sola superficie S caratteristica. Costruiremo poi una funzione analitica ($\neq 0$) che si annulli sopra infinite delle superficie caratteristiche così costruite aventi per insieme limite tutte le superficie di S : una tale funzione avrà evidentemente su S tutti punti singolari essenziali.

Il primo punto è quasi evidente. Supponiamo che l'origine sia un punto di S e che ad essa corrisponda il valore $\alpha = 0$ del parametro α nelle (15). Supponiamo come precedentemente che il sistema (12), (15) sia nell'intorno dell'origine risolubile rapporto x_1 ed x_2 : avremo

$$x_1 = \Phi_1(y_1, y_2, \alpha) \quad x_2 = \Phi_2(y_1, y_2, \alpha)$$

Φ_1 e Φ_2 essendo funzioni armoniche coniugate di $y_1 y_2$, e funzioni derivabili di α ; almeno in un certo campo attorno ai valori $y_1 = y_2 = \alpha = 0$. Potremo anche scrivere:

$$x = \Phi(y, \alpha) \quad (18)$$

Φ essendo funzione analitica della variabile complessa y e derivabile della variabile reale α . Avremo inoltre

$$\left| \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right|^2 = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha} \right)^2 = - \frac{\Delta'_1 \Phi}{\left[\frac{\partial (\Phi \bar{\Phi})}{\partial (x_1 x_2)} \right]^2} = 0.$$

Consideriamo allora l'insieme di superficie caratteristiche

$$x = \Phi(y, \alpha) + k\beta, \quad (19)$$

dove β è una variabile reale, k è un numero complesso $\neq 0$, e, tale che il

rapporto $\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)_{y, \alpha=0}}{k}$ è ancora un numero complesso (non reale). Le (19) comprendono come caso particolare per $\beta = 0$ le superficie (18): di più in ogni punto dell'intorno dell'origine passa una ed una sola superficie caratteristica (19). Basta osservare che le (19) equivalgono alle

$$x_1 - \Phi_1(y_1 y_2, \alpha) - k_1 \beta = 0 \quad x_2 - \Phi_2(y_1 y_2, \alpha) - k_2 \beta = 0$$

e che nel punto $x = y = \alpha = \beta = 0$ si ha che il determinante funzionale di queste equazioni rapporto ad α e β è

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha} \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} k_2 - \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha} k_1 = k \Im \left[\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)_{y, \alpha=0}}{k} \right]$$

dove $\Im(\mu)$ indica il coefficiente dell'immaginario di μ : e quindi per le ipotesi fatte su k è certo $\neq 0$.

Noi potremo quindi nell'intorno dell'origine determinare un campo C interno al campo $|x| < \rho$, $|y| < \rho$ tale che per ogni punto appartenente a C passa una ed una sola superficie caratteristica (19) corrispondente ad $|\alpha| < \sigma$, $|\beta| < \sigma$; ed inversamente ad ogni valore $|\alpha| < \sigma$, $|\beta| < \sigma$ corrisponde una superficie (19) i cui punti aventi coordinata y minore in modulo a ρ sono interni a C . È chiaro per continuità che le superficie (19) per cui $\beta > 0$

apparterranno ad una medesima delle regioni in cui S divide lo spazio, ad es.: alla $\varphi > 0$, le superficie per cui $\beta < 0$ apparterranno all'altra.

Passiamo ora alla costruzione della funzione $f(x, y)$. Consideriamo perciò un insieme di punti (α_n, β_n) tale che sia sempre $\beta_n > 0$ (o sempre $\beta_n < 0$) e che l'insieme derivato di esso sia l'insieme $|\alpha| \leq \sigma, \beta = 0$. Basta, perciò per es.: numerare al modo solito i valori razionali di α minori di σ e prendere per α_n l' n -esimo punto in tale numerazione, per β_n il valore $\frac{1}{n}$.

Consideriamo allora il prodotto infinito (*):

$$\Pi_n \left(\frac{x - \Phi(y, \alpha_n) - k\beta_n}{x - \Phi(y, \alpha_n)} \right) e^{p_n(xy)} = \Pi_n \left(1 - \frac{k}{n(x - \Phi(y, \alpha_n))} \right) e^{p_n(xy)} \quad (20)$$

dove

$$p_n(xy) = \frac{k}{n(x - \Phi(y, \alpha_n))} + \frac{1}{2} \frac{k^2}{n^2(x - \Phi(y, \alpha_n))^2} + \dots \left. \vphantom{\frac{k}{n(x - \Phi(y, \alpha_n))}}} \right\} \quad (21)$$

$$\dots + \frac{1}{n} \frac{k^n}{n^n(x - \Phi(y, \alpha_n))^n}.$$

È facile vedere che il prodotto (20) è uniformemente convergente in ogni campo Γ appartenente a C il quale non contenga alcun punto di S . Se ammettiamo per un momento tale convergenza, esso rappresenterà evidentemente una funzione analitica di x ed y , nulla su tutte le superficie caratteristiche (19) corrispondenti ai valori α_n e β_n di α e β ; e quindi, come dicemmo, una funzione che esiste nel campo $\beta > 0$ ossia $\varphi > 0$, ed ha necessariamente S come frontiera. È chiaro che si potrebbe costruire una funzione analoga nel campo $\varphi < 0$ col porre $\beta_n = -\frac{1}{n}$; e con ciò resta dimostrato il nostro teorema.

Occorre quindi solo dimostrare la convergenza uniforme in un qualunque campo Γ del prodotto (20). Indichiamo perciò con d la minima distanza dei punti di Γ da S . Sarà per un qualunque punto (x_0, y_0) di Γ , $|x_0 - \Phi(y_0, \alpha_n)| \geq d$: infatti $|x_0 - \Phi(y_0, \alpha_n)|$ rappresenta la distanza del punto (x_0, y_0) dal punto in cui il piano $y = y_0$ incontra la superficie $x = \Phi(y, \alpha_n)$, la quale appartiene tutta ad S . Fissato allora un numero ε piccolo a piacere, dividiamo i numeri n

(*) Il ragionamento che segue non è che la ripetizione sotto forma leggermente diversa del classico ragionamento del WEIERSTRASS relativo alla scomposizione di una funzione intera in fattori primarii.

in due classi a seconda che $\left| \frac{k}{nd} \right| \geq 1 - \varepsilon$ oppure che $\left| \frac{k}{nd} \right| < 1 - \varepsilon$: la prima conterrà solo un numero finito di valori di n : poichè sarà $n \leq \frac{|k|}{(1-\varepsilon)d}$: noi nel considerare il prodotto (20) lasceremo da parte questi valori di n . Per gli altri valori di n si ha

$$\left| \frac{k}{n(x - \Phi(y, \alpha_n))} \right| \leq \left| \frac{k}{nd} \right| < 1 - \varepsilon,$$

quindi i fattori corrispondenti di n in (20) non si annulleranno mai per (x, y) in Γ : e per dimostrare che (20) converge uniformemente ad un limite $\neq 0$ basterà dimostrare la convergenza della serie dei logaritmi dei singoli termini. Ora per (21) tale serie è

$$-\sum_n \left(\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{n+m} \frac{k^{n+m}}{n^{n+m} (x - \Phi(y, \alpha_n))^{n+m}} \right). \quad (22)$$

Ma per (x, y) in Γ e

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n+m} \frac{k^{n+m}}{n^{n+m} (x - \Phi(y, \alpha_n))^{n+m}} \right| &< \\ &< \left| \frac{1}{n^{n+1}} \frac{k^{n+1}}{d^{n+1}} \right| \sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{k^m}{n^m d^m} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \frac{|k|^{n+1}}{n^{n+1} d^{n+1}}; \end{aligned}$$

onde segue che la serie dei moduli di (22) converge più rapidamente della serie

$$\frac{1}{\varepsilon} \sum (1 - \varepsilon)^{n+1} = \frac{1}{\varepsilon^2}$$

e quindi converge uniformemente in Γ .

Onde resta pienamente dimostrato il nostro enunciato.

15. Ove si interpretino i risultati degli studi precedenti come risultati relativi al sistema di equazioni alle derivate parziali cui soddisfa la parte reale di una funzione di due variabili complesse, si ottengono indicazioni non prive di valore. È noto che, assegnare i valori di una tale funzione sopra l'ipersuperficie contorno di campo, è assegnare condizioni sovrabbon-

danti; quali siano le condizioni cui devono soddisfare tali valori è un problema ancora assai oscuro non ostante gli sforzi di parecchi studiosi. Orbene, da quanto precede risulta che dette condizioni portano non solo sulla natura della funzione assegnata, ma anche e principalmente su quella dell'ipersuperficie considerata; in quanto che, se, per es., si suppone questa ipersuperficie analitica, non potrebbe assegnarsi su essa una funzione non analitica a meno che l'ipersuperficie stessa non soddisfaccia, rispetto al campo che essa limita, alle condizioni del n. 12

Ottobre 1909.