sumption that they are actual ellipsoids of equilibrium. Our best guide is *G. H. Darwin's* work on masses of homogeneous, incompressible fluid. The actual stars are undoubtedly denser toward the center, which tends toward a smaller ellipticity, and they are composed of elastic and expansible material, which, as *Jeans* has shown ¹⁾, may cause ellipticity or even instability to set in for a much smaller rate of rotation than would be the case for a mass of incompressible fluid of equal mean density. The results given below may perhaps give a fair approximation to the relative magnitude of the third axis of the ellipsoids, but should be considered as only an indication of the possible order of magnitude of their densities.

From *Darwin's* paper ²⁾ we may take the following values for the dimensions and angular velocity of the *Jacobian* ellipsoids of homogeneous incompressible fluid, the unit of length being the radius of the sphere of equal volume, and the unit of density being so chosen that the *Gaussian* constant is unity. The fifth of these computed ellipsoids represents the condition just beyond which instability occurs and the pear-shaped figure begins to form.

Table III. *Jacobi's* Ellipsoids of Equilibrium.

No.	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	$\omega^2/4\pi\rho$	<i>b/a</i>	<i>c/a</i>
1	1.197	1.197	0.698	0.0936	1.000	0.583
2	1.279	1.123	0.696	0.093	0.879	0.544
3	1.383	1.045	0.692	0.0906	0.756	0.501
4	1.601	0.924	0.677	0.0830	0.577	0.423
5	1.899	0.811	0.649	0.0705	0.427	0.342
6	2.346	0.702	0.607	0.0536	0.299	0.259
7	3.136	0.586	0.545	0.0334	0.187	0.174

In Table III the axes of the ellipsoids are designated by *a*, *b*, *c*, in descending order of magnitude; the angular velocity is denoted by ω , and the density by ρ . For the three ellipsoidal stars, the quantity $b/a = (1 - \epsilon^2)^{1/2}$ would be obtained from the light curves if the inclination were known. We will take $i = 90^\circ$, which is probably near the truth, at least for the two stars of greatest range, and this will give the minimum value of the ellipticity. Plotting the values of b/a in the above table against c/a , and against $\omega^2/4\pi\rho$, we can read from the curves the values of the angular velocity and relative polar axis for each of the variables. The density is then readily computed from the known period of rotation. The results are tabulated below.

	RU Camelopardalis		SZ Tauri		S Antliae	
	Uniform	Darkened	Uniform	Darken.	Uniform	Darken.
ϵ^2	0.82	0.62	0.67	0.47	0.475	0.33
<i>b/a</i>	0.424	0.617	0.574	0.728	0.724	0.819
<i>c/a</i>	0.341	0.443	0.421	0.490	0.489	0.524
$\omega^2/4\pi\rho$	0.0703	0.0853	0.0828	0.0897	0.0897	0.0922
ρ	0.00003	0.00003	0.0014	0.0013	0.119	0.116

The densities are expressed in terms of the mean solar density. It should be noted that the uniform solution for RU Camelopardalis gives dimensions practically identical to those of the homogeneous ellipsoid that is near to instability and to the transformation into the pear-shaped figure.

Princeton University Observatory, 1913 March 1.

Harlow Shapley.

¹⁾ Philosophical Transactions, A, 201.157; A, 199.1.

²⁾ Roy. Soc. Proc. 41.319, 1887.

Die Veränderlichkeit des Polarsterns. Von *Ant. Pannekoek*.

Als ich in den Jahren 1889 und 1890 Beobachtungen der Helligkeit mehrerer Sterne zweiter und dritter Größe nach *Argelanders* Methode anstellte, zeigte sich bei einigen Sternen ein starker Verdacht der Veränderlichkeit, u. a. bei α Ursae minoris. Die Schätzungen zeigten eine Periode von etwas weniger als 4 Tagen; da aber die Amplitude äußerst gering war, gelang es mir nicht, einen Wert für die Periode zu finden, der den Beobachtungen genügte, und damit die Veränderlichkeit zweifelsfrei festzustellen. Als dann nachher *Campbell* eine Veränderlichkeit der visuellen Geschwindigkeit in einer Periode von 3.968 Tagen feststellte, und sich bei einer Untersuchung im Jahre 1906 zeigte, daß der Polarstern den *c*-Charakter des Spektrums und die geringe Dichtigkeit mit den kurzperiodischen Veränderlichen gemeinsam hat, wurde die Realität einer Veränderlichkeit im hohen Maße wahrscheinlich. *Hertzsprung* hat dann neulich auf photographischem Wege eine Veränderlichkeit mit einer Amplitude von 0.17 Größenklassen nachgewiesen und *Stebbins* hat sie mit dem Selenphotometer bestätigt.

Die Beobachtungen, die ich in den Jahren 1890 bis 1899 mit freiem Auge angestellt habe, zerfallen in zwei getrennte Reihen, Vergleichen mit α Persei, β und γ Andromedae in der zweiten und Vergleichen mit ϵ und η Ursae majoris in der ersten Hälfte jedes Jahres. Werden sie alle

mit dem Periodenwert 3.968 auf eine einzige Periode, 3. bis 7. August 1894, zurückgebracht und dann nach der Phase geordnet, so ergeben sich folgende Mittelwerte:

Erste Reihe.				Zweite Reihe.			
Vergl.-St.: α Persei = 6.3,				Vergl.-St.: ϵ Ursae maj. = 2.4,			
β Andr. = 3.8, γ Andr. = 3.1.				η Ursae maj. = 0.0.			
Epoche	Helligk.	Anz.	B-R	Epoche	Helligk.	Anz.	B-R
Aug. 3.12	3.72	(18)	+0.03	Aug. 3.21	0.59	(18)	-0.03
3.42	3.94	(16)	+0.11	3.48	0.68	(16)	-0.08
3.73	4.11	(21)	+0.08	3.65	0.59	(13)	-0.28
3.96	3.91	(17)	-0.29	3.92	1.13	(18)	+0.07
4.22	3.94	(20)	-0.42	4.25	1.39	(20)	+0.10
4.54	4.68	(17)	+0.18	4.46	1.40	(22)	0.00
4.76	4.86	(16)	+0.33	4.65	1.69	(24)	+0.22
4.94	4.76	(16)	+0.24	4.94	1.55	(14)	+0.05
5.18	4.11	(17)	-0.34	5.22	1.20	(17)	-0.23
5.52	4.45	(14)	+0.19	5.46	1.27	(18)	-0.03
5.76	4.11	(20)	+0.02	5.72	1.02	(20)	-0.11
5.94	3.67	(18)	-0.29	6.22	0.74	(19)	-0.04
6.23	3.67	(16)	-0.11	6.48	0.86	(16)	+0.22
6.46	3.78	(14)	+0.10	6.86	0.67	(16)	+0.11
6.73	3.79	(19)	+0.16				

Die Veränderlichkeit des Polarsterns tritt in beiden

Reihen klar zu Tage. Sucht man die Helligkeit durch eine Sinusoide darzustellen, so findet man

1. Reihe: $4.08 + 0.45 \sin(\varphi - 72^\circ)$ Max. Aug. 4.79 ± 0.11
 2. Reihe: $1.03 + 0.47 \sin(\varphi - 78^\circ)$ » » 4.86 ± 0.11 .

Der m. F. einer Mittelzahl ergibt sich zu 0.22, einer einzigen Beobachtung zu 0.84, und die Zeit des Maximums wird, nach Reduktion auf Greenwich

$$1894 \text{ Aug. } 4.81 = \text{J. D. } 2413045.81 \pm 0.08 \text{ m. Z. Gr.}$$

Zur Reduktion der benutzten Skalen auf photometrische Größen wurde für die Vergleichsterne und einige weitere daran angeschlossene Sterne die Größe berechnet, und dafür das Mittel der Ergebnisse von Harv. Ann. 14, Harv. Ann. 44, Potsdam Photometer CII und Potsdam Photometer CIII genommen, nachdem sie auf das in meiner Dissertation aufgestellte System H_r reduziert waren ¹⁾.

	Größe	Farbe	Skale		Größe	Farbe	Skale
α Persei	1.91	3.4	6.3	ϵ Ursae maj.	1.89	1.8	2.4
α Arietis	2.03	5.4	5.4	η »	2.02	1.4	0.0
β Andromed.	2.10	6.2	3.8	ζ »	2.20	2.1	-3.6
γ »	2.14	5.2	3.1	α Coron. bor.	2.37	1.8	-4.8
α »	2.17	1.8	2.3	ϵ Bootis	2.50	4.8	-5.7
γ Cassiopeiae	2.28	2.1	0.8	β Ursae maj.	2.54	1.7	-8.9
β »	2.41	2.9	-1.7	γ »	2.55	1.8	-9.7
α Ursae maj.	1.85	4.9	4.0				

Die Ausgleichung mit Hinzuziehung eines von der Farbe abhängigen Einflusses ergab

1. Reihe: $m = 2.335 - 0.065n$
 2. Reihe: $m = 2.07 - 0.059n$ } $+ 0.020(c - 3.7)$.

Die Darstellung der Helligkeit des Polarsterns durch eine Sinusformel wird dann in Größenklassen

1. Reihe: $2.07 - 0.029 \sin(\varphi - 72^\circ)$
 2. Reihe: $2.01 - 0.028 \sin(\varphi - 78^\circ)$.

Die Amplitude des Lichtwechsels ist also 0.057 Größenklassen.

Jahr	E	Maximum	B-R	Amplitude	Beobachter	B-R'
1879	-2845	2407696.57 ± 0.14	-0.05	0.056 vis.	Müller	-0.13
1881	-2711	8228.45 ± 0.24	+0.11	0.078 vis.	Harvard	+0.03
1894	-1497	2413045.81 ± 0.08	+0.20	0.057 vis.	Pannekoek	+0.12
1910	0	8985.86 ± 0.08	0.00	0.171. fotogr.	Hertzsprung	-0.07
1911	0	8985.94 ± 0.09	+0.08	0.078 selen.	Stebbins	+0.01

Der Versuch, aus diesen Abweichungen eine Korrektur der Formel herzuleiten, ergab für die Periode nur eine Änderung -0.00001 ± 0.00004 , und für die Epoche eine Korrektur $+0.07$, wobei die Abweichungen der letzten Spalte übrigbleiben. Es ist also nach dem vorhandenen Material anzunehmen:

$$\text{Maximum J. D. } 2418985.93 (\pm 0.06) + 3.96809 \cdot E (\pm 0.00004).$$

Bremen, 1913 Febr. 1.

Ant. Pannekoek.

In ähnlicher Weise habe ich die Beobachtungen untersucht, die G. Müller 1878-81 in Potsdam zur Bestimmung der atmosphärischen Extinktion anstellte ²⁾ und die aus photometrischen Messungen der Helligkeitsdifferenzen zwischen α Ursae min. und 5 anderen Sternen bestehen. Nach Ausschluß aller als unsicher bezeichneten und aller Beobachtungen, bei denen $z > 60^\circ$, wurden für die übrigen die »Abweichungen vom Mittel« (Tabelle IV vorletzte Spalte S. 251-265) mit umgekehrtem Zeichen (damit eine größere Helligkeit des Polarsterns durch positive Abweichungen bezeichnet wird) nach der Phase geordnet, zu Mittelwerten zusammengekommen, und mit dem Faktor eine Einheit = 0.0025 multipliziert. Diese Mittel sind:

Phase 1879	Abweich.	B-R	Phase 1879	Abweich.	B-R
Dez. 12.02	+0.022	+0.001	Dez. 14.11	-0.028	-0.012
12.34	+0.030	0.000	14.50	-0.009	+0.015
12.64	+0.047	+0.014	14.81	-0.009	+0.013
12.92	+0.008	-0.021	15.05	-0.021	-0.004
13.21	+0.028	+0.008	15.20	-0.048	-0.036
13.63	+0.006	+0.003	15.34	+0.017	+0.022
13.84	-0.010	-0.004	15.69	+0.008	-0.001

Sie lassen sich durch eine Sinusformel darstellen:

$$+ 0.004 + 0.028 \sin(\varphi + 35^\circ)$$

Maximum 1879 Dez. 12.61 = Dez. 12.57 (± 0.14) m. Z. Gr.

Für die nahezu gleichzeitigen photometr. Messungen auf der Harvard Sternwarte, bei denen Polaris als Vergleichstern benutzt wurde, hat Pickering schon die Mittelwerte der Abweichungen zusammengestellt ³⁾. Sie lassen sich durch die Sinusformel $-0.011 + 0.039 \sin(\varphi + 254^\circ)$ am besten darstellen und ergeben ein Maximum für Phase 2.16, also für J. D. 2408228.45 ± 0.24 und eine Amplitude von 0.078 Größenklassen.

Die folgende Zusammenstellung gibt die Resultate der bisher bearbeiteten Beobachtungsreihen, nebst einer Vergleichung mit der Hertzsprung'schen Formel:

$$\text{Max.} = \text{J. D. } 2418985.86 + 3.9681 E.$$

¹⁾ A. Pannekoek. Untersuchungen über den Lichtwechsel Algols. S. 158. Dort sind die Korrekturen der Katalogwerte für Harv. 14 und Potsdam CII gegeben. Für Potsdam CIII ist eine konstante Korrektur -0.23 angenommen; für Harv. 44 sind zuerst die Differenzen $H_{44} - H_{14}$ angebracht, die aus den in Potsdam Publ. Bd. 17, p. XXIII gegebenen Zahlen durch Ausgleichung gewonnen wurden.

²⁾ Publikationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam Bd. III.

³⁾ Astron. Nachr. 4597 (Bd. 192, S. 219); Harv. Zirk. 174, wo die Berechnung der Epoche des Maximums verfehlt ist ($E = 2073$ ergibt die Formel 2408226.29, nicht 2408227.0, wie dort angenommen wurde).