Ueber unendliche Doppelreihen.

Von

O. Stolz in Innsbruck.

Bekanntlich handelt von den Doppelreihen mit *reellen* Gliedern die 7. Note in Cauchy's Cours d'Analyse*). Dabei wird das Problem zurückgeführt auf die Betrachtung einer Function $s_n^{(m)}$ von zwei unabhängigen Variablen m, n , die beide zur Grenze $+\infty$ übergehen. In diesem Sinne ist es auch im Folgenden gestellt. Später (Résumés analytiques 1833 p. 86) definirte Cauchy die Convergenz einer Doppelreihe in anderer Weise. Er bildet aus den Gliedern derselben, in endlicher oder auch in unendlicher Anzahl eine Summe s_n in der Art, dass sie wenigstens alle jene Glieder enthält, in denen die Summe der Indices kleiner ist als n , und dass neben jedem in ihr stehenden Gliede auch alle jene Glieder vorkommen, die man daraus ableiten kann, indem man einen oder beide Indices durch kleinere ersetzt. „Si toutes les fois que les deux conditions précédentes sont remplies, la somme s_n converge, pour des valeurs croissantes de n , vers une limite fixe s , la série multiple sera dite *convergente* etc.“ Es ist klar, dass damit gemeint ist, es müsse s_n immer denselben endlichen Grenzwert s haben. So begreift sich ein späterer Satz von Cauchy**), der einfach aus der Convergenz einer vielfachen Reihe gefolgert wird: „Une série multiple (mit dem allgemeinen Gliede $f(x, y, z \dots)$) étant supposée convergente, désignons par $k_0, k_1, k_2 \dots k_n$ etc. des sommés partielles formées avec divers termes de cette série multiple, de telle sorte que le même terme ne se trouve jamais reproduit dans deux sommes distinctes, et que les termes exclus du système des sommes $k_0, k_1, k_2 \dots k_n$ soient toujours, pour une valeur infiniment grande de n , des termes, qui correspondent à des valeurs infiniment grandes de $x, y, z \dots$; alors, la série simple k_0, k_1, k_2 etc. sera elle-même convergente, et elle aura pour somme la somme s de la série multiple“.

*) In den folgenden Citaten mit C. bezeichnet. R. bedeutet die „Résumés.“

**) Vgl. Comptes rendus. 1844. 2. sém. p. 1435.

und sowohl bei constantem n $\lim_{m \rightarrow \infty} A_n^{(m)} = 0$ als auch bei constantem m $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{(m)} = 0$. Endlich sei stets

$$A_n^{(m)} + A_{n+1}^{(m+1)} \geq A_n^{(m+1)} + A_{n+1}^{(m)}.$$

Unter diesen Voraussetzungen *convergiert die Doppelreihe (I)*“.

Der Beweis folgt aus der naheliegenden Relation

$$|s_{m+p}^{(n+p)} - s_m^{(n)}| \leq A_{n+1}^{(0)} + A_0^{(m+1)},$$

woraus vermöge $\lim A_n^{(0)} = 0$ bei $\lim n = +\infty$ und $\lim A_0^{(m)}$ bei $\lim m = +\infty$ unmittelbar die Ungleichung (2) hervorgeht. — So *convergiert die Doppelreihe*

$$(1b) \quad a_n^{(m)} = \frac{(-1)^{m+n}}{m+n+1} \quad \left. \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\} = 0, 1, 2 \dots$$

(und zwar, wie leicht zu zeigen ist, zum Grenzwerthe $\frac{1}{2}$).

Eine andere Classe *convergenter Doppelreihen* mit reellen Gliedern kann man aus einem Satze von F. Arndt (l. c. p. 58) ableiten.

„Man setze

$$a_n^{(m)} = (-1)^n A_n^{(m)} \quad A_n^{(m)} > 0.$$

Es sei durchaus

$$A_{n+1}^{(m)} \leq A_n^{(m)}$$

und bei constantem m $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{(m)} = 0$; so dass jede Horizontalreihe in

(I) *convergiert*. Ferner sei auch die aus ihren Summen gebildete unendliche Reihe *convergent*. Endlich sei jede Verticalreihe in (I) und die aus ihren Summen gebildete Reihe *convergent*. Dann *convergiert die Doppelreihe (I) ebenfalls*. — Die letzte Bedingung kommt darauf zurück, dass die erste Verticalreihe *convergiert* und dass wenn

$$\sum_n A_n^{(m)} = A_n, \quad \lim A_n = 0 \quad \text{sei bei} \quad \lim n = +\infty.$$

Der Beweis folgt aus der Relation

$$|s^{(m)} - s_n^{(m)}| < A_{n+1}.$$

2. Wenn wir unter der Voraussetzung dass die Doppelreihe (I) *convergiert*, die Glieder derselben diagonal summiren d. h. die unendliche Reihe bilden $d_0 + d_1 + d_2 + \dots$, worin

$$(6) \quad d_n = a_0^{(n)} + a_1^{(n-1)} + \dots + a_r^{(n-r)} + \dots + a_n^{(0)};$$

so kann sie auch *divergent* sein, wie schon die Doppelreihe (Ib) oder gewisse aus den Gliedern zweier *convergenter Reihen*

$$a_0 + a_1 + \dots + a_m + \dots, \quad b_0 + b_2 + \dots + b_n + \dots$$

gebildete Doppelreihen

$$a_n^{(m)} = a_m b_n$$

werth wie ursprünglich.“ — „Wenn man ihre Glieder auf beliebige Weise in eine unendliche Anzahl von endlichen oder einfach-unendlichen Reihen oder in eine endliche oder unendliche Anzahl von Doppelreihen vertheilt, so werden diese Partialreihen stets convergiren und die Summe ihrer Grenzwerte wird gleich sein dem Grenzwerte der vorgelegten Doppelreihe.“

Cauchy hat noch bemerkt (C. p. 540):

5) „Convergiren in (I) sämtliche Horizontal (Vertical)-Reihen und convergirt die aus ihren Grenzwerten $a^{(0)}, a^{(1)}, \dots, a^{(m)}$ gebildete unendliche Reihe, so convergirt die Doppelreihe (I) und hat daher nach Nr. 1 denselben Grenzwert wie die Reihe $\sum a^{(m)}$.“

Denn es ist

$$s_n^{(m)} \leq \underline{s}^{(0)} + a^{(1)} + \cdots + a^{(m)} < \sum a^{(m)}.$$

4. Absolut convergente Doppelreihen. Wenn die Glieder einer Doppelreihe (I) so beschaffen sind, dass *die aus ihren absoluten Beträgen* $|a_n^{(m)}| = A_n^{(n)}$ *gebildete Doppelreihe*

$$(III) \quad \begin{cases} A_0^{(0)} + \dots + A_n^{(0)} + \dots \\ \vdots \\ + A_0^{(m)} + \dots + A_n^{(m)} + \dots \end{cases}$$

convergiert, so konvergiert auch die Doppelreihe (I) (Cauchy C. p. 540; R. p. 57, 161). Sie soll in diesem Falle als *absolut* konvergent bezeichnet werden. — Denn bezeichnet man mit $S_n^{(m)}$ die Summe der je $(n+1)$ Anfangsglieder in den $(m+1)$ ersten Horizontalreihen von (III), so folgt unmittelbar

$$|s_{n+r}^{(m+p)} - s_n^{(m)}| \leq |S_{n+r}^{(m+p)} - S_n^{(m)}|;$$

es ist somit die Relation (2) erfüllt. — Sind die Glieder in (I) sämmtlich reell, so ist ihr Grenzwert $a = b - c$, wo b der Grenzwert der aus den positiven, $-c$ den der aus den negativen Gliedern $a_n^{(m)}$ gebildeten Doppelreihe bedeutet. — Sind die Glieder in (II) sämmtlich oder zum Theil complexe Zahlen, so ist $a = \beta + \gamma i$, unter β den Grenzwert der aus den reellen Theilen der $a_n^{(m)}$, unter γi den der mit den imaginären Theilen der $a_n^{(m)}$ gebildeten Doppelreihe verstanden.

Unter der Voraussetzung dass die Doppelreihe (I) absolut convergirt, gelten auch der zweite, dritte und vierte Satz der vorigen Nr.*).

5. „Wenn die Zahlen $a_n^{(m)}$ dem absoluten Betrage nach sämtlich

*) Cauchy C. p. 541, R. p. 59, 561.

$$\lim_{x=1-0} \sum_0^{\infty} d_n x^n = d.$$

Nach Nr. 1 muss $\sum \varphi^{(m)}(1)$ convergiren und zwar zum Grenzwerthe a .

Der Grenzwert der linken Seite von (8) bei $\lim x = 1 - 0$ ist aber nur dann sicher

$$\sum_0^{\infty} \varphi^{(m)}(1) = \sum_0^{\infty} a^{(m)} = a,$$

wenn die unendliche Reihe $\sum \varphi^{(m)}(x)$ gleichmässig für alle $0 \leq x < 1$ convergirt. Unter dieser Bedingung ist also $a = d$.

Um die angegebene gleichmässige Convergenz zu beweisen, setze man

$$\varphi^{(m)}(x) + \varphi^{(m+1)}(x) + \dots + \varphi^{(m+p)}(x) = \varrho_{m,p}(x);$$

ferner sei

$$P_n^{(k)} = a_n^{(k)} + a_{n+1}^{(k)} + \dots, \quad (n \geq 0), \quad P_0^{(k)} = a^{(k)} \quad \text{nach (4).}$$

Man hat demnach

$$a_n^{(k)} = P_n^{(k)} - P_{n+1}^{(k)}$$

und nach (7)

$$\varphi^{(k)}(x) = \sum_0^{\infty} \{P_n^{(k)} - P_{n+1}^{(k)}\} x^{k+n} = a^{(k)} x^k - (1-x) \sum_1^{\infty} P_n^{(k)} x^{k+n-1}.$$

Setzt man in der letzten Gleichung nacheinander $k = m, m+1, \dots, m+p$ und summirt die $p+1$ Reihen rechter Hand in der Art, dass man die $n-1$ Anfangsglieder abtrennt, so folgt

$$\begin{aligned} (9) \quad \varrho_{m,p}(x) &= \sum_m^{m+p} a^{(k)} x^k - (1-x) \sum_1^{n-1} x^k \sum_m^{m+p} P_h^{(k)} x^{k-1} \\ &\quad - (1-x) \sum_n^{\infty} x^k \sum_m^{m+p} P_h^{(k)} x^{k-1}. \end{aligned}$$

Der Kürze wegen mögen diese drei Theile bez. mit F, G, H bezeichnet werden.

Wir beschäftigen uns zuerst mit dem dritten Theile H . Es sei ε eine beliebige positive Zahl. Dann existiren nach Nr. 1 positive Zahlen μ, ν , so dass für $m > \mu, n > \nu$

$$(10) \quad |R_n^{(m)}| < \varepsilon.$$

Wir haben nun

$$P_h^{(k)} = R_h^{(k)} - R_h^{(k+1)},$$

also

$$\sum_m^{m+p} P_h^{(k)} x^{k-1} = R_h^{(m)} x^{m-1} - (1-x) \sum_{m+1}^{m+p} R_h^{(k)} x^{k-2} - R_h^{(m+p+1)} x^{m+p-1}.$$

Denkt man sich in (9) n fixirt und zwar so, dass sein Werth grösser als ν ist, so ergiebt sich wegen $0 \leq x < 1$, $h \geq n$ zunächst, falls nur $m > \mu$

$$\left| \sum_m^{m+p} P_h^{(k)} x^{k-1} \right| < \varepsilon \left\{ x^{m-1} + (1-x) \sum_{m+1}^{m+p} x^{k-2} + x^{m+p-1} \right\} = 2\varepsilon x^{m-1},$$

und endlich

$$|H| < 2\varepsilon (1-x) x^{m-1} \sum_n^{\infty} x^h = 2\varepsilon x^{n+m-1};$$

d. i. für $m > \mu$ ist

$$(11) \quad |H| < 2\varepsilon.$$

Da

$$P_h^{(k)} = a^{(k)} - a_0^{(k)} - a_1^{(k)} - \dots - a_{h-1}^{(k)},$$

so convergiren zufolge der vorausgesetzten Convergenz der Verticalreihen in (I) die unendlichen Reihen

$$\sum_0^{\infty} P_h^{(k)} \quad (h = 0, 1, \dots, n-1).$$

Setzt man nun

$$P_h^{(k)} + P_h^{(k+1)} + \dots = Q_h^{(k)},$$

so kann man, da die Zahl n als fest gewählt anzusehen ist, behaupten, dass jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl μ' zugeordnet sei, so dass, falls $h > \mu'$, $|Q_h^{(k)}| < \varepsilon$, mag h irgend eine der Zahlen $0, 1, \dots, n-1$ sein. Es sei m in (9) nun auch grösser als μ' , d. i. $m > M$, wenn M die grössere der Zahlen μ, μ' bedeutet.

Man hat zunächst

$$P_h^{(k)} = Q_h^{(k)} - Q_h^{(k+1)},$$

$$\sum_m^{m+p} P_h^{(k)} x^{k-1} = Q_h^{(m)} x^{m-1} - (1-x) \sum_{m+1}^{m+p} Q_h^{(k)} x^{k-2} - Q_h^{(m+p+1)} x^{m+p-1};$$

somit falls $m > M$

$$\left| \sum_m^{m+p} P_h^{(k)} x^{k-1} \right| < \varepsilon \left\{ x^{m-1} + (1-x) \sum_{m+1}^{m+p} x^{k-2} + x^{m+p-1} \right\} = 2\varepsilon x^{m-1}.$$

Setzt man hier $h = 0$, so findet man

$$(12) \quad |F| < 2\varepsilon x^{m-1} < 2\varepsilon.$$

Ferner ergibt sich

$$(13) \quad |G| < 2\varepsilon(1-x)x^{m-1}\sum_1^{n-1}x^k = 2\varepsilon x^m(1-x^{n-1}) < 2\varepsilon.$$

Aus den Relationen (11) — (13) folgt endlich, dass wenn $m > M$

$$|Q_{m,p}(x)| < 6\varepsilon \quad (p = 0, 1, 2 \dots),$$

was für einen der Werthe $0 \leq x < 1$ auch x annehmen mag. Damit ist der verlangte Nachweis geliefert.

Einen speciellen Fall des allgemeinen Theorems bietet der folgende Satz von Abel dar: „Wenn die unendlichen Reihen $\sum a_m$, $\sum b_n$ convergiren und es convergirt auch die Reihe $\sum d_n$, wo

$$d_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0,$$

so ist ihr Grenzwert gleich dem Producte der Grenzwerte a, b der beiden ersteren Reihen.“ Denn setzt man in (I) $a_n^{(m)} = a_m b_n$, so ist die Doppelreihe convergent und hat den Grenzwert ab .

NB. Es ist möglich, dass die Doppelreihe (I) und die Reihe (6) $d_0 + d_1 + d_2 + \dots$ convergiren *ohne dass irgend eine Horizontalreihe im Schema (I) convergirt*. Es sei $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ (14) eine convergente Reihe mit der Summe 0 und $b_0 + b_1 + b_2 + \dots$ (15) eine divergente Reihe, jedoch von der Art, dass die Partialsummen

$$b_0 + b_1 + \dots + b_n = t_n$$

sämmtlich ihrem absoluten Betrage nach unter einer Zahl $B > 0$ liegen. Dann convergirt die Doppelreihe mit dem allgemeinen Gliede $a_n^{(m)} = a_m b_n$ und zwar zum Werthe 0. Zugleich divergiren darin jede Horizontalreihe, wenn $a_m \geq 0$. Setzt man z. B. $b_n = (-1)^n$ und bildet

$$d_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0, \quad w_n = d_0 + d_1 + \dots + d_n,$$

so findet man

$$w_{2k} = a_0 + a_2 + \dots + a_{2k}, \quad w_{2k+1} = a_1 + a_3 + \dots + a_{2k+1}.$$

Soll nun $\sum d_n$ convergiren, wie wir wünschen, so muss jede der unendlichen Reihen $a_0 + a_2 + a_4 + \dots$, $a_1 + a_3 + a_5 + \dots$ zum Grenzwert Null convergiren. Auf diese Art ergibt sich das folgende Beispiel für das oben erwähnte Vorkommniß. Es sei $c_0 + c_1 + \dots$ eine convergente Reihe mit der Summe 0 (z. B. $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \dots$). An Stelle von (14) setze man die Reihe

$$c_0 + c_0 + c_1 + c_1 + c_2 + c_2 + \dots$$

mit der Summe 0, an die von (15)

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots,$$

$$\kappa_0^{(n)} + \kappa_1^{(n-1)} + \dots + \kappa_n^{(0)} = \Delta_n,$$

so hat auch die unendliche Reihe $\Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \dots$ den Grenzwert κ und die Doppelreihe mit Gliedern $\kappa_n^{(m)}$, wenn sie überhaupt convergirt, ebenfalls. Es ist somit die obige Voraussetzung abzuweisen, d. h. die Doppelreihe (VI) muss absolut convergiren. Das Gleiche gilt von der Doppelreihe $\beta_n^{(m)}$ und daher auch von (I) selbst.

Mit dem vorstehenden Satze stimmt überein der in der Einleitung angeführte Satz von Cauchy.

9. Im Anschlusse an einen Satz des Hrn. Weierstrass (Monatsberichte der k. Academie zu Berlin 1890 p. 723) wollen wir noch nachweisen, dass die folgende Doppelreihe convergirt. „Man setze in (I)

$$(VII) \quad a_n^{(m)} = a_{m,n} x_n.$$

Die Horizontalreihen

$$\sum_0^\infty a_{m,n} x_n \quad (m = 0, 1, 2 \dots)$$

seien sämmtlich convergent für alle reellen und complexen Werthe von x , welche dem absoluten Betrage nach unter der positiven Zahl R liegen, es convergire ferner die aus ihren Grenzwerten $P_m(x)$ gebildete Reihe

$$P_0(x) + P_1(x) + \dots + P_m(x) + \dots$$

und zwar *gleichmässig* für alle Werthe $|x| < R$; dann *convergirt die Doppelreihe (VII) für jeden Werth von x , der dem absoluten Betrage nach kleiner ist als R* “.

Wir setzen

$$(a) \quad s_{n+r}^{(m+p)} - s_n^{(m)} = \sum_{n+1}^{m+p} \sum_0^{n+r} a_{k,i} x^i + \sum_0^m \sum_{n+1}^{n+r} a_{k,i} x^i = G + H,$$

indem wir die beiden Theile rechts bez. mit G und H bezeichnen. Dabei ist

$$(b) \quad G = \sum_{m+1}^{m+p} P_k(x) - \sum_{m+1}^{m+p} \sum_{n+r+1}^\infty a_{k,i} x^i = \sum_{m+1}^{m+p} P_k(x) - \sum_{n+r+1}^\infty x^i \sum_{m+1}^{m+p} a_{k,i}.$$

Zufolge Voraussetzung entspricht jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl μ , so dass wenn $|x| < R$, für $m > \mu$

$$(c) \quad \left| \sum_{m+1}^{m+p} P_k(x) \right| < \varepsilon,$$

welchen der Werthe $1, 2 \dots$ auch p erhalten mag.

Nun sei $|x| = X < R$ und R_1 eine Zahl zwischen X und R .

Man hat dann nach einem bekannten Satze aus (c), wie Hr. Weierstrass a. a. O. bemerkt,

$$(d) \quad m > \mu \quad \left| \sum_{n+1}^{m+p} a_{k,l} \right| < \varepsilon R_1^{-l}$$

und damit nach (b)

$$(e) \quad m > \mu \quad |G| < \varepsilon + \varepsilon \sum_{n+r+1}^{\infty} \left(\frac{X}{R_1}\right)^l < \varepsilon + \varepsilon \left(\frac{X}{R_1}\right)^{n+1} : \left(1 - \frac{X}{R_1}\right).$$

Für den Ausdruck H schreiben wir

$$H = \sum_{n+1}^{n+r} x^l \sum_0^m a_{k,l}.$$

Zunächst ist nun zu bemerken, dass die Function

$$(f) \quad \varphi(x) = \sum_0^{\infty} P_k(x) = \sum_0^m P_k(x) + \sum_{m+1}^{\infty} P_k(x)$$

für alle $|x| \leq R_1$ dem absoluten Betrage nach unter einer Zahl $D > 0$ liegt. Denn ist hier m eine *bestimmte* Zahl $> \mu$, so bildet der erste Theil eine stetige Function von x und hat daher seinem absoluten Betrage nach ein endliches Maximum D_m ; so dass zufolge (c)

$$|x| \leq R_1 \quad |\varphi(x)| \leq D_m + \varepsilon.$$

Bezeichnet man die Constante $D_m + \varepsilon$ mit D , so hat man nach (f)

$$|x| \leq R_1 \quad |\varphi(x)| \leq D, \quad \left| \sum_0^m P_k(x) \right| \leq D + \varepsilon \quad (m > \mu).$$

Setzt man

$$\sum_0^m P_k(x) = \sum_0^{\infty} x^l \sum_0^m a_{k,l},$$

so folgt wie oben für jeden Werth von l

$$m > \mu \quad \left| \sum_0^m a_{k,l} \right| \leq (D + \varepsilon) R_1^{-l};$$

somit

$$(g) \quad |H| \leq (D + \varepsilon) \sum_{n+1}^{n+r} \left(\frac{X}{R_1}\right)^l < (D + \varepsilon) \left(\frac{X}{R_1}\right)^{n+1} : \left(1 - \frac{X}{R_1}\right).$$

Fast man (e) und (g) zusammen, so findet man endlich

$$|s_{n+r}^{(m+p)} - s_n^{(m)}| < \varepsilon + (D + 2\varepsilon) \left(\frac{X}{R_1}\right)^{n+1} : \left(1 - \frac{X}{R_1}\right) \quad (m > \mu).$$

Da $X < R_1$, so kann man eine positive Zahl ν angeben, so dass der zweite Theil auf der rechten Seite dieser Relation kleiner ist als ε , wenn nur $n > \nu$. Also ist für alle Werthsysteme $m > \mu$ $n > \nu$

$$|s_{n+r}^{(m+p)} - s_n^{(m)}| < 2\varepsilon,$$

d. h. die Doppelreihe (VII) ist convergent, wenn $|x| < R$. Nach Nr. 1 ist $\varphi(x)$ ihr Grenzwert.

Aus (d) folgt, dass jede der Reihen $\sum_0^\infty a_{k,l}$ convergirt. Nennt man a_l ihre Summe, so ist der Grenzwert der Doppelreihe (VII) auch gleich $\sum_0^\infty a_l x^l$, so dass

$$|x| < R \quad \varphi(x) = \sum_0^\infty a_l x^l$$

— eine Gleichung, die Hr. Weierstrass zuerst aufgestellt und auf einfachere Weise bewiesen hat.

Innsbruck, im Februar 1884.