SUL MOTO LENTO E QUASI-STAZIONARIO
DI UN SISTEMA RIGIDO DI CARICHE ELETTRICHE.

Nota del Dott. ENRICO PERSICO.

IN un recente lavoro ¹⁾ il Sig. E. Fermi ha studiato, dal punto di vista dinamico, i moti *traslatori* di un sistema di cariche elettriche rigidamente connesse: io mi propongo, in questa nota, di estendere tale studio a movimenti rigidi anche non traslatori, purchè *lenti* e *quasi-stazionari*. Con la prima di queste limitazioni intendo autorizzarmi a trascurare la velocità $\dot{M}$ di un punto qualunque M del sistema in esame, rispetto alla velocità della luce (questa limitazione si potrebbe poi togliere, sfruttando il principio di relatività in senso stretto, se il prodotto della velocità angolare Ω per la massima dimensione del sistema è trascurabile rispetto alla velocità della luce). La seconda condizione si può precisare dicendo che deve essere trascurabile, rispetto all'unità, la variazione relativa che subisce la grandezza dell'accelerazione di un punto qualunque del sistema, nel tempo che impiegherebbe la luce a percorrere la massima dimensione di questo.

Sotto queste ipotesi, si possono facilmente scrivere le sei equazioni differenziali che — come, nella ordinaria dinamica, il teorema del moto del baricentro unito alle equazioni di Eulero — permettono di determinare, date le condizioni iniziali, il movimento del sistema; però non è possibile, in generale, scindere il calcolo del movimento di traslazione da quello del movimento di rotazione. Si trova poi l'equazione dell'energia, e si vede che, in generale, il sistema non è conservativo. Si esamina da ultimo il caso della simmetria sferica.

¹⁾ *Nuovo Cimento*, VI vol. XXII; adopero le stesse notazioni.

Assunto, come centro di riduzione, un punto O del sistema mobile, e detta V la sua velocità, e Ω la rotazione, la velocità di un punto generico M è

$$\dot{M} = V + \Omega \wedge (M - O).$$

L'accelerazione Γ si ottiene derivando questa formula, e con qualche facile trasformazione si trova

$$(1) \quad \Gamma = \dot{V} + \Omega \times (M - O) \Omega - \Omega^2 (M - O) + \dot{\Omega} \wedge (M - O)$$

cioè, con referenza a un sistema ortogonale di assi (x_1, x_2, x_3) di origine O

$$(1') \quad \Gamma_r = \dot{V}_r + \Omega_r \sum_s \Omega_s x_s - \Omega^2 x_r + (\dot{\Omega}_{r+1} x_{r+2} - \dot{\Omega}_{r+2} x_{r+1})$$

(dove $r, s = 1, 2, 3$, ed agli indici maggiori di 3 debbono, al solito, sostituirsi i loro resti rispetto a 3).

Consideriamo ora il campo elettrico prodotto in un punto generico $P(x')$ dalla carica $\rho d\tau$ muoventesi in $M(x)$ con l'accelerazione (1). Esso è dato, nella nostra approssimazione, da un termine E_1 corrispondente alla legge di Coulomb, più

$$(2) \quad E_2 = \frac{\Gamma \times a}{c^2 r} a - \frac{\Gamma}{c^2 r}$$

dove $r = |MP|$, ed a è un vettore unitario diretto da M a P , e quindi

$$a_r = \frac{x'_r - x_r}{r}$$

La forza applicata in P , e proveniente dall'autocampo del sistema, è dunque

$$\rho' d\tau' \int \rho (E_1 + E_2) d\tau$$

e il suo momento rispetto ad O

$$\rho' d\tau' \int \rho (P - O) \Lambda (E_i + E_i) d\tau.$$

Calcolando la risultante F di queste forze e quella Q dei loro momenti, si avrà un contributo nullo dai termini dipendenti da E_i (che soddisfano il principio di azione e reazione) e resterà

$$F = \iint E_i \rho \rho' d\tau d\tau'$$

$$Q = \iint (P - O) \Lambda E_i \rho \rho' d\tau d\tau'$$

ossia, in forma scalare, ricordando la (2) e ponendo per brevità

$$\frac{\rho \rho' d\tau d\tau'}{c_i r} = du$$

$$F_i = \iint \Sigma_r \Gamma_r a_r a_i du - \iint \Gamma_i du$$

$$Q_i = \iint \Sigma_r \Gamma_r a_r (a_{i+2} x_{i+1} - a_{i+1} x'_{i+2}) du - \iint (\Gamma_{i+2} x'_{i+1} - \Gamma_{i+1} x'_{i+2}) du.$$

Se ora poniamo in queste equazioni le espressioni (1') delle componenti dell'accelerazione, e osserviamo che $\dot{V}_r, \Omega_r, \Omega_r$ sono costanti rispetto alle integrazioni, otteniamo, come si vede subito, per F_i e Q_i delle espressioni lineari nelle componenti di $\dot{V}$ e $\dot{\Omega}$ e quadratiche in quelle di Ω . Nel fare questa sostituzione conviene cambiare gli indici di sommatoria, dove l'uniformità lo consiglia, e poi porre

$$m_{ir} = m_{ri} = - \iint a_r a_i du + \epsilon_{ri} \iint du$$

$$\mu_{s,ir} = \mu_{s,ri} = - \iint x_s a_r a_i du + \epsilon_{ri} \iint x_s du$$

$$k_{\alpha\beta,rs} = k_{\beta\alpha,rs} = k_{\alpha\beta,sr} = - \iint x_\alpha x'_\beta a_r a_s du + \epsilon_{rs} \iint x_\alpha x'_\beta du.$$

(dove ε_{ri} è 1 o 0 secondochè $r = i$ o $r \neq i$). Le 6 quantità m_{ir} , le 18 $\mu_{s\,ir}$ e le 36 $k_{23\,rs}$ sono, come si vede da queste formule, tensori covarianti rispetto alle rotazioni di assi. Le formule divengono allora

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} F_i &= -\Sigma_r \dot{V}_r m_{ir} - \Sigma_{rs} \Omega_r \Omega_s \mu_{s\,ri} + \Omega^2 \Sigma_r \mu_{r\,ri} - \\ &\quad - \Sigma_r \dot{\Omega}_r \left[\mu_{r+1\,r+2\,i} - \mu_{r+2\,r+1\,i} \right] \\ Q_i &= -\Sigma_r \dot{V}_r \left[\mu_{i+1\,r\,i+2} - \mu_{i+2\,r\,i+1} \right] - \\ &\quad - \Sigma_{rs} \Omega_r \Omega_s \left[k_{s\,i+1\,r\,i+2} - k_{s\,i+2\,r\,i+1} \right] \\ &\quad + \Omega^2 \Sigma_r \left[k_{r\,i+1\,r\,i+2} - k_{r\,i+2\,r\,i+1} \right] - \\ &\quad - \Sigma_r \dot{\Omega}_r \left[k_{r+1\,i+1\,r+2\,i+2} + k_{r+2\,i+2\,r+1\,i+1} - \right. \\ &\quad \left. - k_{r+1\,i+2\,r+2\,i+1} - k_{r+2\,i+1\,r+1\,i+2} \right] \end{aligned} \right.$$

Se ora diciamo X la risultante delle forze esterne applicate al sistema, ed M il loro momento risultante, e supponiamo il sistema sprovvisto di massa materiale, dovremo avere ¹⁾

$$(4) \quad \begin{cases} X_i = -F_i \\ M_i = -Q_i \end{cases}$$

e queste saranno (quando per F_i e Q_i si intendano sostituite le espressioni (3)) le sei equazioni del moto.

¹⁾ Cfr. M. Abraham. « Theorie der Elektrizität ». Bd. II.

Per dare alle equazioni una forma più compatta, scriviamo, nelle (3), $\Sigma_{rs} \varepsilon_{rs} \Omega_r \Omega_s$ in luogo di Ω^2 , e poniamo

$$\begin{aligned} A_{i,r|s} &= \mu_{s,ri} - \varepsilon_{sr} \Sigma_j \mu_{j,ji} \\ B_{i|r|s} &= \left(k_{j,i+1|r,i+2} - k_{s,i+2|r,i+1} \right) - \frac{1}{2} \varepsilon_{sr} \Sigma_j \left(k_{j,i+1|j,i+2} - k_{j,i+2|j,i+1} \right). \\ \mu_{i,r} &= \mu_{i+1|r,i+2} - \mu_{i+2|r,i+1} \\ k_{ir} &= k_{ri} = k_{r+1,i+1|r+2,i+2} + k_{r+2,i+2|r+1,i+1} - \\ &\quad - k_{r+1,i+2|r+2,i+1} - k_{r+2,i+1|r+1,i+2} \end{aligned}$$

Allora le (4) si scriveranno

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} X_i &= \Sigma_r \dot{V}_r m_{ir} + \Sigma_r \dot{\Omega}_r \mu_{r,i} + \Sigma_{rs} \Omega_r \Omega_s A_{i,r|s} \\ M_i &= \Sigma_r \dot{\Omega}_r k_{ir} + \Sigma_r \dot{V}_r \mu_{i,r} + \Sigma_{rs} \Omega_r \Omega_s B_{i|r|s} \end{aligned} \right.$$

Queste equazioni possono riferirsi a qualunque sistema di assi ortogonali, purchè si intendano per $\dot{V}_r$ e $\dot{\Omega}_r$ le proiezioni su questi assi dei vettori $\dot{V}$ e $\dot{\Omega}$, derivati di V ed Ω rispetto agli assi fissi, e non, in generale, le derivate di V_r e Ω_r . Se riferiamo le (5) ad assi fissi, sarà

$$\dot{V}_r = \frac{dV_r}{dt}, \quad \dot{\Omega}_r = \frac{d\Omega_r}{dt},$$

ma questa semplificazione sarà compensata dal fatto che dovremo riguardare i coefficienti m_{ir} , k_{ir} , $\mu_{i,r}$, $A_{i,r|s}$, $B_{i|r|s}$ come variabili, poichè essi dipendono dalla orientazione del sistema di cariche rispetto agli assi di riferimento. È opportuno quindi riferirsi ad assi rigidamente connessi col sistema mobile e, per maggior comodità, procurarsi delle equazioni in cui figurino le derivate fatte rispetto a questi assi (che indicheremo con un apice). Fra le due specie di derivate del medesimo vettore V passa, come è noto, la relazione

$$\dot{V} = V' + \Omega \wedge V$$

che per il vettore Ω diviene

$$\dot{\Omega} = \Omega' ;$$

tenuto conto di queste relazioni, le (5) divengono

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_i = \Sigma_r V'_r m_{ir} + \Sigma_r \Omega'_r \mu_{r,i} + \\ + \Sigma_r \left(\Omega_{r+1} V_{r+2} - \Omega_{r+2} V_{r+1} \right) m_{ir} + \Sigma_{rs} \Omega_r C_s A_{i,r|s} \\ M_i = \Sigma_r \Omega'_s k_{ir} + \Sigma_r V'_r \mu_{i,r} + \\ + \Sigma_r \left(\Omega_{r+1} V_{r+2} - \Omega_{r+2} V_{r+1} \right) \mu_{i,r} + \Sigma_{rs} \Omega_r \Omega_s B_{i,r|s} \end{array} \right.$$

Se si riferiscono agli assi mobili, queste equazioni hanno i coefficienti costanti e inoltre $\Omega'_r = \frac{d\Omega_r}{dt}$, $V'_r = \frac{dV_r}{dt}$. Il tensore m_{ir} è quello già considerato nella citata memoria, e può riguardarsi come un'estensione del concetto di massa: le k_{ir} invece intervengono qui per la prima volta, e rappresentano i *momenti d'inerzia delle masse elettromagnetiche*.

Dalle (5) o dalle (6) si vede subito che non si può avere l'equilibrio, o la traslazione uniforme, se non si annullano insieme X ed M, come nella ordinaria meccanica dei sistemi rigidi: però non vale la proposizione reciproca.

Se il moto è una pura traslazione, eliminando le $\dot{V}_r$ dalle (5) si vede che X ed M devono essere legate dall'omografia

$$M_i = \Sigma_j X_j \mu_i^j$$

dove $\mu_i^j = \Sigma_r \mu_{i,r} m^{jr}$, ed m^{jr} è l'elemento reciproco di m_{jr} . Si vede altresì che se esiste un punto G tale che, scegliendolo a centro di riduzione, si annulla il tensore $\mu_{i,r}$ (punto che in generale non esiste) si può avere moto puramente traslatorio con una forza applicata in G, di direzione qualsiasi.

Moltiplicando la prima delle (6) per V_i , e sommando rispetto i , poi la seconda per Ω_i e facendo lo stesso, otteniamo:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} X \times V = \sum_{ir} V_i V'_r m_{ir} + \sum_{ir} V_i \Omega'_r \mu_{r|i} + \\ \quad + \sum_{ir} V_i \left(\Omega_{r+1} V_{r+2} - \Omega_{r+2} V_{r+1} \right) + \sum_{irs} V_i \Omega_r \Omega_s A_{i|r|s} \\ M \times \Omega = \sum_{ir} \Omega_i \Omega'_r k_{ir} + \sum_{ir} \Omega_i V'_r \mu_{ir} + \\ \quad + \sum_{ir} \Omega_i \left(\Omega_{r+1} V_{r+2} - \Omega_{r+2} V_{r+1} \right) \mu_{ir} + \sum_{irs} \Omega_i \Omega_r \Omega_s B_{i|r|s} \end{array} \right.$$

In ciascuno dei secondi membri, la prima sommatoria è una derivata esatta rispetto al tempo; le seconde non lo sono separatamente, ma se in una di esse si scambiano gli indici i ed r , e poi si sommano, si ottiene una derivata esatta. Ricordando poi che i coefficienti sono costanti, ponendo

$$T = \frac{1}{2} \sum_{ir} V_i V_r m_{ir}$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{ir} \Omega_i \Omega_r k_{ir}$$

$$U = \sum_{ir} \Omega_i V_r \mu_{i|r}$$

$$E = T + W + U$$

e chiamando P la somma dei primi membri delle (7) che rappresenta la potenza delle forze esterne, si ottiene

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} P = \frac{dE}{dt} + \sum_{ir} \left(V_i m_{ir} + \Omega_i \mu_{i|r} \right) \left(\Omega_{r+1} V_{r+2} - \Omega_{r+2} V_{r+1} \right) + \\ \quad + \sum_{irs} V_i \Omega_r \Omega_s A_{i|r|s} + \sum_{irs} \Omega_i \Omega_r \Omega_s B_{i|r|s} . \end{array} \right.$$

Lo scalare T (già considerato nel moto traslatorio) rappresenta la forza viva di traslazione; W si deve interpretare come forza viva di rotazione; il termine U rappresenta energia cinetica mista, e si può far sparire, come nella ordinaria dinamica, solo se esiste un punto G avente la proprietà sopra ricordata. Gli altri termini rappresentano energia dissipata.

Dunque in generale non vale il teorema dell'energia: se la rotazione è nulla, i termini di dissipazione spariscono e il teorema sussiste, come era già noto.

Nel caso che il sistema abbia simmetria sferica, assunto il centro di simmetria come centro di riduzione, si osservi che lo scambio di x_1, x_2 con $x_2, -x_1$ rispettivamente, oppure con $-x_1, -x_2$ rispettivamente, equivalendo a una rotazione di 90° o di 180° intorno all'asse x_3 , non deve alterare i valori dei coefficienti; così pure la rotazione dei tre indici 1, 2, 3, non deve alterare tali valori. Con queste considerazioni si trova che:

le m_{ir} con indici diversi si annullano, le altre sono uguali tra loro, e le indicheremo con m ;

le $\mu_{s,ir}$ sono tutte nulle: si annulla quindi l'energia cinetica mista;

le $k_{2\beta,rs}$ sono tutte nulle, tranne quelle aventi due coppie di indici uguali, cioè quelle di uno dei tre tipi

$$k_{11|22} = k' \qquad k_{12|12} = k'' \qquad k_{11|11} = k'''.$$

Se ne deduce che le $A_{i,r|s}$ sono tutte nulle e le $B_{i,r|s}$ pure, tranne quelle aventi i tre indici disuguali, ma per queste si trova

$$B_{3|1,2} = k'' - k' \qquad B_{3|2,1} = k' - k''$$

cosicchè la relativa sommatoria sparisce; le k_{ir} sono nulle per $i \neq r$, mentre $k_{ii} = 2(k' - k'') = k$.

Le equazioni (5) divengono dunque

$$X_i = m \dot{V}_i$$

$$M_i = k \dot{\Omega}$$

cioè identiche a quelle che la ordinaria dinamica fornisce nel caso corrispondente a questo.

Roma, dicembre 1921.