NUOVA RISOLUZIONE DEL PROBLEMA DELL'INDUZIONE MAGNETICA

PER UNA SFERA ISOTROPA.

Nota di TOMMASO BOGGIO ¹⁾.

Il problema della magnetizzazione presa, in un campo qualunque, da una sfera isotropa, è stato trattato sino a questi ultimi tempi da numerosi Autori (Poisson, Betti, F. Neumann, C. Neumann, Mathieu, Kirchhoff, ecc.) mediante serie di funzioni sferiche.

Recentemente il Prof. Somigliana ed io, abbiamo risolto, pressochè contemporaneamente, il problema in questione per mezzo di integrali definiti ²⁾.

Mi permetto ora di esporre all'Accademia un'altra soluzione, assai semplice, dello stesso problema.

1. Sia S una sfera omogenea, isotropa, di centro O e raggio R ; indichiamo con k il coefficiente di magnetizzazione del corpo S e con σ la superficie sferica che lo limita.

Si tratta allora, secondo la teoria di Poisson, di trovare una funzione (armonica) Φ , che verifichi in ogni punto di S l'equazione:

$$W + \Phi - k \int_{\sigma} \frac{d\Phi}{dn} \frac{d\sigma}{r} = 0, \quad ^3)$$

W essendo la funzione potenziale, che definisce il campo magnetico dato; n la normale a σ , diretta all'interno della sfera;

1) Questo lavoro è una traduzione di una Nota presentata dal sig. Poincaré all'Accademia delle Scienze di Parigi, e pubblicata nei Comptes-Rendus nel n. 12 del tomo 142 (19 marzo 1906).

2) Cfr. Somigliana — Intorno ad un problema d'induzione magnetica (Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie 2, vol. 36; adunanza del 17 dicembre 1903).

Boggio — Induzione prodotta da un campo magnetico qualunque sopra una sfera isotropa (id., id., vol. 37; adunanza del 28 gennaio 1904).

3) Cfr. per es. Duhem -- Leçons sur l'Electricité et le Magnétisme, t. 2, pag. 123 (Paris, a. 1892).

r la distanza di un punto qualunque di S da un punto variabile di σ .

Se si indica con ρ il raggio vettore (contato a partire dal centro), e si pone:

$$(1) \quad U = -(W + \Phi),$$

l'equazione precedente può essere scritta così:

$$(2) \quad U = \frac{k}{R} \int_{\sigma} \rho \frac{d\Phi}{d\rho} \frac{d\sigma}{r};$$

U rappresenta, d'altra parte, la funzione potenziale del magnetismo indotto nella sfera, e pertanto basterà determinare tale funzione.

Qui giova notare che la funzione Φ essendo armonica in S , lo sarà pure, com'è ben noto, la funzione $\rho \frac{d\Phi}{d\rho}$.

2. Osserviamo ora che, se u è una funzione armonica nella sfera S , e si pone:

$$v = \int_{\sigma} u \frac{d\sigma}{r},$$

si ha, in ogni punto di S , l'equazione ben nota:

$$(3) \quad \frac{1}{2} v + \rho \frac{dv}{d\rho} = 2\pi R u,$$

che può essere, per es., dedotta facilmente dalla formola:

$$u = \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \int_{\sigma} \frac{u d\sigma}{r^3},$$

che risolve il problema di Dirichlet per la sfera S ¹⁾.

1) Cfr. ad es. Marcolongo — Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici, pag. 86 (Milano, Hoepli, a. 1904).

Applicando la (3) all'equazione (2) si ottiene, in S :

$$\frac{1}{2} U + \rho \frac{dU}{d\rho} = 2 \pi k \rho \frac{d\Phi}{d\rho},$$

ovvero, ricordando la (1) :

$$\frac{1}{2 + 4\pi k} U + \rho \frac{dU}{d\rho} = - \frac{2\pi k}{1 + 2\pi k} \rho \frac{dW}{d\rho},$$

cioè :

$$(4) \quad a(U + bW) + \rho \frac{d(U + bW)}{d\rho} = abW,$$

avendo posto :

$$a = \frac{1}{2 + 4\pi k} \quad , \quad b = \frac{2\pi k}{1 + 2\pi k}.$$

Dalla (4) risulta :

$$\frac{1}{\rho^{a-1}} \frac{d}{d\rho} \left[\rho^a (U + bW) \right] = abW,$$

e poichè la costante a è positiva, si avrà, in ogni punto di S:

$$U = -bW + \frac{ab}{\rho^a} \int_0^\rho \rho^{a-1} W d\rho;$$

questa formula semplicissima, risolve il problema proposto.

Il valore di U , all'esterno di S , si deduce dal precedente con una inversione per raggi vettori reciproci, e si trova, nel punto esterno (ρ, θ, ψ) :

$$U(\rho, \theta, \psi) = -\frac{bR}{\rho} W\left(\frac{R^2}{\rho}, \theta, \psi\right) + abR\rho^{a-1} \int_\rho^\infty \rho^{a+1} W\left(\frac{R^2}{\rho}, \theta, \psi\right) d\rho.$$

3. Se, invece di una sfera, si considera lo spazio indefinito S , per il quale $z > 0$, e che è limitato dal piano xy , ovvero sia σ , si hanno le eguaglianze:

$$U = -k \int_{\sigma} \frac{d\Phi}{dz} \frac{d\sigma}{r} \quad , \quad \frac{dv}{dz} = -2\pi u \quad ,$$

che corrispondono alle (2), (3). Se ne deduce allora subito:

$$U = -bW \quad ,$$

che risolve il problema per il campo S .

Si riconosce poi facilmente, che in due punti simmetrici rispetto al piano σ , i valori di U sono eguali.

LIBRI NUOVI

I MATTONI E LE PIETRE DI SABBIA E CALCE

per l' Ing. E. STÖFFLER.

(Hoepli, Milano, 2.a edizione, L. 3).

Coi tipi della ben nota Casa Hoepli, l' Ing. Stöffler ha pubblicato un manuale che tratta della giovane industria dei mattoni a base di sabbia e calce, noti col nome di arenoliti o di silico-calcarei.

L' A., dopo avere rapidamente accennato ai materiali silico-calcarei, tratta, con molta competenza, della base chimica della fabbricazione dei materiali silico-calcarei e fa delle notevoli considerazioni sulle materie prime e sulla lavorazione di esse.

In capitoli a parte passa in rassegna, e con molta chiarezza, le principali macchine occorrenti per la fabbricazione dei materiali, non che i diversi sistemi attualmente in uso a seconda dei casi e delle condizioni locali. Altri capitoli sono dedicati al costo di produzione e alle descrizioni delle prove