Die geometrische Deutung einer gewissen Invariante bei ebenen Collineationen.*)

Von

J. KRAUS in Mainz.

1. Die bei drei ebenen Reciprocitäten

$$\xi_x = a_{x1}x_1 + a_{x2}x_2 + a_{x3}x_3 \quad (x=1, 2, 3)$$

$$\xi'_x = b_{x1}x_1 + b_{x2}x_2 + b_{x3}x_3 \quad ,,$$

$$\xi''_x = c_{x1}x_1 + c_{x2}x_2 + c_{x3}x_3 \quad ,,$$

auf tretende simultane Invariante

$$H = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ist eine bemerkenswerthe Verallgemeinerung der „harmonischen Invariante“ zweier Kegelschnitte (Rosanes, Math. Ann. Bd. 23, S. 413), in welche sie übergeht, wenn die Reciprocitäten Polarsysteme werden und zwei mit einander zusammenfallen. Indem man zu den Collineationen

$$\xi_i = m_{i1}\xi'_1 + m_{i2}\xi'_2 + m_{i3}\xi'_3 \quad (i=1, 2, 3)$$

$$\xi''_i = n_{i1}\xi'_1 + n_{i2}\xi'_2 + n_{i3}\xi'_3 \quad ,,$$

übergeht, tritt an Stelle von H die Invariante

$$Z = m_{22}n_{33} + m_{33}n_{22} + m_{33}n_{11} + m_{11}n_{33} + m_{11}n_{22} + m_{22}n_{11} - m_{23}n_{32} \\ - m_{32}n_{23} - m_{31}n_{13} - m_{13}n_{31} - m_{12}n_{21} - m_{21}n_{12}.$$

Im Folgenden soll das Verschwinden dieser Invariante geometrisch gedeutet werden.

*) Auszug aus der Inauguraldissertation des Verfassers, Giessen 1886.

Jede Collineation wird durch zwei homologe Vierecke festgelegt, zwei Collineationen können als durch drei Vierecke definit betrachtet werden. Specielle Beschaffenheiten von Collineationen finden in einer entsprechenden eigenthümlichen Lage der zu Grunde gelegten Vierecke ihren Ausdruck. Es erwächst daraus in unserem Falle die Aufgabe, diejenige Lage der homologen Vierecke zu beschreiben, welche durch die Annahme $Z = 0$ bedingt wird.

2. Herr Pasch zeigt (Ann. Bd. 26, S. 211 ff.), wie zwei Vierecke $abcd$ und $a'b'c'd'$ gelegen sein müssen, damit die entsprechende Collineation sich in eingeschriebener Dreieckslage befinde. In diesem Falle giebt es nämlich ein Vierseit $\alpha\beta\gamma\delta$, welches dem Viereck $abcd$ „verkehrt eingeschrieben“ (Ann. Bd. 26, S. 212) und dem andern umschrieben ist. Die erforderliche Bedingung lautet:

$$(abd)(abc)b'cd)(a'd'c') + (adc)(abc)(bc'd)(a'b'd') \\ + (adc)(abd)(bcd')(a'b'c') = 0.$$

Um diese Lage kurz zu bezeichnen, wollen wir in Analogie zur Reye'schen Ausdrucksweise sagen, das System $a'b'c'd'$ „stütze“ das System $abcd$, und dieses „ruhe“ auf jenem. Von dem Vierecke $a'b'c'd'$ sagen wir dementsprechend, es stütze das Viereck $abcd$; und von diesem, es ruhe auf $a'b'c'd'$.

Es ist ferner bekannt, dass zu zwei geraden Punktreihen einer Ebene, xyz und $x'y'z'$, sich stets eine Gerade — nämlich die Verbindungslinie der Punkte $(yz', y'z)$, $(zx', z'x)$ und $(xy', x'y)$ — ergibt als Ort der Punkte, aus denen involutorische Strahlenpaare nach den Punktpaaren xx' , yy' , zz' hingehen. Diese Gerade soll der Kürze wegen im Folgenden die *Involutionslinie* der beiden Punktreihen heissen.

3. Ich beweise nun zuerst den Satz: Wenn in einer Ebene irgend zwei vollständige Vierecke $abcd$, $a'b'c'd'$ gegeben sind mit den Nebenecken

$$e = (ad, bc), \quad f = (bd, ca), \quad g = (cd, ab), \\ e' = (a'd', b'c'), \quad f' = (b'd', c'a'), \quad g' = (c'd', a'b'),$$

und man construirt zu je zwei homologen Punktreihen bce und $b'c'e'$, caf und $c'a'f'$ u. s. w. die *Involutionslinie*, so sind die entstehenden sechs Geraden wieder die Seiten eines vollständigen Vierecks $\alpha\beta\gamma\delta$, welches wir das *Involutionsviereck* der beiden gegebenen nennen wollen.

Beweis: Unter der Voraussetzung

$$\rho : \sigma : \tau : \omega = (bcd) : -(cda) : (dab) : -(abc) \\ \rho' : \sigma' : \tau' : \omega' = (b'c'd') : -(c'd'a') : (d'a'b') : -(a'b'c')$$

hat man identisch:

$$(1) \quad \rho a_x + \sigma b_x + \tau c_x + \omega d_x \equiv 0, \quad \rho' a'_x + \sigma' b'_x + \tau' c'_x + \omega' d'_x \equiv 0 \\ (x=1, 2, 3).$$

Ferner darf man schreiben

$$\lambda e_x + \rho a_x + \omega d_x = 0, \quad \mu f_x + \sigma b_x + \omega d_x = 0, \quad \nu g_x + \tau c_x + \omega d_x = 0$$

$$(\kappa = 1, 2, 3)$$

u. s. w.

Nun lautet die Gleichung der Involutionenlinie zweier projectivischer Punktreihen abc und $a'b'c'$, wenn gesetzt wird

$$\rho a_x + \sigma b_x + \tau c_x = 0, \quad \rho' a'_x + \sigma' b'_x + \tau' c'_x = 0 \quad (\kappa = 1, 2, 3),$$

folgendermassen:

$$\sigma\tau(b'c'x) + \sigma'\tau'(b'cx) = 0,$$

oder

$$\tau\rho'(ca'x) + \tau'\rho(ca'x) = 0,$$

oder

$$\rho\sigma'(ab'x) + \rho'\sigma(ab'x) = 0.$$

Bezeichnet man daher die Gleichungen der Involutionenlinien von bce und $b'c'e'$, caf und $c'a'f'$, u. s. w. mit bezw. $[bc] = 0$, $[ca] = 0$, u. s. w., so ist:

$$\begin{aligned} [bc] &= \sigma\tau(b'c'x) + \sigma'\tau'(b'cx) \\ &= -[(cda)(d'a'b')(b'cx) + (c'd'a')(dab)(b'cx)], \\ [ca] &= \tau\rho'(ca'x) + \tau'\rho(ca'x) \\ &= (dab)(b'c'd')(ca'x) + (d'a'b')(bcd)(c'ax), \\ [ab] &= \rho\sigma'(ab'x) + \rho'\sigma(ab'x) \\ &= -[(bcd)(c'd'a')(ab'x) + (b'c'd')(cda)(a'bx)], \\ [ad] &= \rho\omega'(ad'x) + \rho'\omega(ad'x) \\ &= -[(bcd)(a'b'c')(ad'x) + (b'c'd')(abc)(a'dx)], \\ [bd] &= \sigma\omega'(bd'x) + \sigma'\omega(bd'x) \\ &= (cda)(a'b'c')(bd'x) + (c'd'a')(abc)(b'dx), \\ [cd] &= \tau\omega'(cd'x) + \tau'\omega(cd'x) \\ &= -[(dab)(a'b'c')(cd'x) + (d'a'b')(abc)(c'dx)], \end{aligned}$$

sodass $[bc] = -[cb]$, u. s. w.

Die Identitäten (1) liefern, mit bezw. $(xa')_x$ und $(xa)_x$ ($\kappa = 1, 2, 3$) componirt:

$$\begin{aligned} \rho(a'ax) + \sigma(a'bx) + \tau(a'cx) + \omega(a'dx) &\equiv 0, \\ \rho'(a'ax) + \sigma'(a'bx) + \tau'(a'cx) + \omega'(a'dx) &\equiv 0. \end{aligned}$$

Durch abermaliges Componiren mit resp. ρ' , ρ ergibt sich

$$(2) \quad [ab] + [ac] + [ad] \equiv 0,$$

d. h. die drei Geraden $[ab]$, $[ac]$, $[ad]$ gehen durch einen Punkt; derselbe soll α heissen. Indem man in (2) a der Reihe nach mit b , c , d vertauscht, erhält man weiter:

$$(3) \quad [ba] + [bc] + [bd] \equiv 0,$$

$$(4) \quad [ca] + [cb] + [cd] \equiv 0,$$

$$(5) \quad [da] + [db] + [dc] \equiv 0,$$

d. h. die Geraden $[ba]$, $[bc]$, $[bd]$ gehen durch einen Punkt β , $[ca]$, $[cb]$, $[cd]$ durch einen Punkt γ , $[da]$, $[db]$, $[dc]$ durch einen Punkt δ , und das Viereck $\alpha \beta \gamma \delta$ ist das Involutionsviereck von $abcd$ und $a'b'c'd'$; w. z. b. w.

4. Wenn drei Vierecke $abcd$, $a'b'c'd'$, $a''b''c''d''$ eine solche Lage in der Ebene haben, dass das Involutionsviereck $\alpha\beta\gamma\delta$ von $a'b'c'd'$ und $a''b''c''d''$ auf dem Vierecke $abcd$ ruht, so ist (nach 2) die Gleichung erfüllt:

$$(1) \quad (\alpha\beta\delta)(\alpha\beta\gamma)(b\gamma\delta)(adc) + (\alpha\delta\gamma)(\alpha\beta\gamma)(\beta c\delta)(abd) \\ + (\alpha\delta\gamma)(\alpha\beta\delta)(\beta\gamma\delta)(abc) = 0.$$

Zufolge 3 hat man identisch:

$$(2) \quad \begin{cases} R_1(\beta\gamma x) = (c'd'a')(d''a''b'')(b'c'x) + (c'd''a'')(d'a'b')(b''c'x), \\ R_2(\gamma\alpha x) = (d'a'b')(b''c'd'')(c'a'x) + (d'a''b'')(b'c'd')(c'a'x), \\ R_3(\alpha\beta x) = (b'c'd')(c''d''a'')(a'b'x) + (b''c'd'')(c'd'a')(a'b'x), \\ R_4(\alpha\delta x) = (b'c'd')(a''b''c'')(a'd'x) + (b''c'd'')(a'b'c')(a'd'x), \\ R_5(\beta\delta x) = (c'd'a')(a''b''c'')(b'd'x) + (c'd''a'')(a'b'c')(b'd'x), \\ R_6(\gamma\delta x) = (d'a'b')(a''b''c'')(c'd'x) + (d'a''b'')(a'b'c')(c'd'x), \end{cases}$$

ferner:

$$(3) \quad \begin{cases} R_3(\alpha\beta x) + R_2(\alpha\gamma x) + R_4(\alpha\delta x) \equiv 0, \\ R_3(\beta\alpha x) + R_1(\beta\gamma x) + R_5(\beta\delta x) \equiv 0, \\ R_2(\gamma\alpha x) + R_1(\gamma\beta x) + R_6(\gamma\delta x) \equiv 0, \end{cases}$$

wobei $R_1, R_2, \dots$ von Null verschiedene constante Factoren bedeuten. Aus (3) berechnet sich

$$(\gamma\delta\alpha) = \frac{R_3}{R_1}(\alpha\beta\gamma), \quad (\delta\alpha\beta) = -\frac{R_2}{R_1}(\alpha\beta\gamma).$$

Werden diese Werthe, sowie die Ausdrücke für $(b\gamma\delta)$, $(\beta c\delta)$, $(\beta\gamma d)$, welche sich aus (2) ergeben, in Gleichung (1) eingesetzt, so kommt:

$$\frac{R_2}{R_6}(cda)[(d'a'b')(a''b''c'')(c'd'b) + (d''a''b'')(a'b'c')(c'd'b)] \\ + \frac{R_3}{R_5}(dab)[(c'd'a')(a''b''c'')(b'cd'') + (c'd''a'')(a'b'c')(b'cd'')] \\ + \frac{R_2 R_3}{R_1 R_4}(abc)[(c'd'a')(d''a''b'')(b'c'd) + (c'd''a'')(d'a'b')(b'c'd)] = 0.$$

Die Identitäten (3) liefern ausserdem

$$\frac{R_2}{R_6} = \frac{R_3}{R_5} = \frac{R_2 R_3}{R_1 R_4}.$$

Dies berücksichtigt, geht letztere Gleichung (nach entsprechender Anordnung) über in:

$$(4) \quad (b'c'd'')(cda)(d'a'b')(a''b''c'') + (b'c'd')(cda)(d''a''b'')(a'b'c) \\ + (b'c'd'')(c'd'a')(dab)(a''b''c'') + (b'c'd')(c'd'a'')(dab)(a'b'c) \\ + (b'c'd')(c'd'a')(d''a''b'')(abc) + (b'c'd')(c'd'a'')(d'a'b')(abc) = 0,$$

welche Gleichung bestehen bleibt, wenn man in ihr $abcd$ mit $a'b'c'd'$ oder $a''b''c''d''$ vertauscht; d. h.

Wenn von drei Vierecken $abcd$, $a'b'c'd'$, $a''b''c''d''$ eines das Involutionsviereck der beiden andern stützt, so gilt dies von jedem derselben.

5. Benutzt man drei Vierecke $abcd$, $a'b'c'd'$, $a''b''c''d''$, welche die in 4 beschriebene Lage haben, zur Definition zweier Collineationen $[abcd, a'b'c'd']$ und $[abcd, a''b''c''d'']$, so folgt aus Gleichung (4) der vorigen Nummer bekanntlich:

$$(b'c'd'') + (b'c'd') + (b'cd'') + (b'cd') + (b'c'd) + (b'c'd) = 0,$$

welches der algebraische Ausdruck für die Lage irgend eines Dreiecks bcd zu seinen homologen $b'c'd'$ und $b'c'd''$ in den beiden Collineationen ist.

Wenn man andererseits bezeichnet

$$c'_i = m_{i1}c_1 + m_{i2}c_2 + m_{i3}c_3, \quad d'_i = m_{i1}d_1 + m_{i2}d_2 + m_{i3}d_3, \quad (i=1,2,3) \\ c''_i = n_{i1}c_1 + n_{i2}c_2 + n_{i3}c_3, \quad d''_i = n_{i1}d_1 + n_{i2}d_2 + n_{i3}d_3, \quad ,,$$

und wenn

$$Z = m_{22}n_{33} + m_{33}n_{22} + m_{33}n_{11} + m_{11}n_{33} + m_{11}n_{22} + m_{22}n_{11} - m_{23}n_{32} \\ - m_{32}n_{23} - m_{31}n_{13} - m_{13}n_{31} - m_{12}n_{21} - m_{21}n_{12}$$

bedeutet, so besteht (wie man durch zweimalige Anwendung eines δ -Processes findet) die Identität:

$$Z(bcd) = (b'c'd'') + (b'c'd') + (b'cd'') + (b'cd') + (b'c'd) + (b'c'd),$$

woraus für $Z = 0$ ebenfalls folgt

$$(b'c'd'') + (b'c'd') + (b'cd'') + (b'cd') + (b'c'd) + (b'c'd) = 0; \quad \text{d. h.}$$

Vermöge der durch $Z = 0$ definierten Collineationen werden jedem Vierecke $abcd$ der Ebene zwei andere $a'b'c'd'$ und $a''b''c''d''$ als entsprechende zugewiesen, derart, dass das Involutionsviereck je zweier der drei Vierecke $abcd$, $a'b'c'd'$, $a''b''c''d''$ auf dem dritten ruht.

Mainz, im October 1886.