figuren. Auch ist es leicht, die Gültigkeit des Gesetzes für beliebig gestaltete Platten nachzuweisen, indem man Ellipsen von beliebiger Excentricität oder andere Platten von gleicher Gestaltung ausschneidet, in welchen homologe Linien sich wie die Quadratwurzeln der anzuwendenden Stimmgabeln verhalten.

Um die Proportionalität der Tonhöhen mit der Dicke der Platte zu demonstrieren, construirt man drei Platten aus demselben Material, von derselben Gestalt und Grösse; man verbinde zwei dieser Platten durch einen schwachen Leim und bringe die Doppelplatte und die einfache Platte in Verbindung mit Stimmgabeln, deren Tonhöhen sich wie 2:1 zu verhalten, alsdann erhält man auf beiden Seiten gleiche Klangfiguren.

Marburg, im Juli 1883.

VII. *Zu Boltzmann's Theorie der elastischen Nachwirkung; von Édouard Riecke.*

Die von Boltzmann für die elastische Nachwirkung aufgestellten Gleichungen lassen sich auf einem anderen Wege ableiten als dem von ihm befolgten.

Wir betrachten ein Parallelepipedon, dessen Kanten den Axen x, y, z eines rechtwinkligen Coordinatensystemes parallel sind. Der zu einer bestimmten Zeit t bestehende Zustand dieses Prismas sei in folgender Weise gegeben. In dem Augenblick t werden auf die drei Seitenflächen des Prismas drei Drucke p_1, p_2, p_3 ausgeübt; ausserdem seien in der Richtung der drei Axen elastische Nachwirkungen vorhanden, erzeugt dadurch, dass zu einer beliebigen früheren Zeit τ während des kleinen Zeitraumes $d\tau$ Dilatationen von dem Betrage $\lambda_1^{\tau}, \lambda_2^{\tau}, \lambda_3^{\tau}$ in der Richtung der drei zu einander senkrechten Axen unterhalten worden waren. Wir machen die Hypothese, dass die durch einen einzelnen Druck p_1 erzeugten Wirkungen ganz ebenso sich gestalten, wie

wenn keine anderen Drucke, keine Nachwirkungen vorhanden wären, d. h. der Druck p_1 erzeuge eine Verlängerung in der Richtung der x -Axe, welche bestimmt ist durch die Gleichung:

$$p_1 = -E \frac{\xi_1}{x},$$

Contractionen in der Richtung der y - und z -Axe, welche gegeben sind durch:

$$\frac{\eta_1}{y} = \frac{\zeta_1}{z} = -\mu \frac{\xi_1}{x}.$$

Hier bezeichnet E den Elasticitätsmodul, μ das Verhältniss der Quercontraction zur Längsdilatation.

Ganz ebenso gelten für die Drucke p_2 und p_3 die Gleichungen:

$$\begin{aligned} p_2 &= -E \frac{\eta_2}{y}, & \frac{\zeta_2}{z} = \frac{\xi_2}{x} &= -\mu \frac{\eta_2}{y}, \\ p_3 &= -E \frac{\zeta_3}{z}, & \frac{\xi_3}{x} = \frac{\eta_3}{y} &= -\mu \frac{\zeta_3}{z}. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir durch $d\lambda_1^v$, $d\lambda_2^v$, $d\lambda_3^v$ die zur Zeit t bestehenden Nachwirkungsdilatationen, durch λ_1 , λ_2 , λ_3 die gesammten zu dieser Zeit vorhandenen Dilatationen des Prismas, so ist:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}{x} + d\lambda_1^v, & \lambda_2 &= \frac{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3}{y} + d\lambda_2^v, \\ \lambda_3 &= \frac{\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3}{z} + d\lambda_3^v, \end{aligned}$$

Wenn man mit Hülfe dieser Gleichungen die Verlängerung ξ_1 ausdrückt durch die Gesammtdilatationen λ_1 , λ_2 , λ_3 , so ergibt sich:

$$\begin{aligned} p_1 &= -\frac{E}{1+\mu} \left\{ \lambda_1 + \frac{\mu}{1-2\mu} (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \right\} \\ &+ \frac{E}{1+\mu} \left\{ d\lambda_1^v + \frac{\mu}{1-2\mu} (d\lambda_1^v + d\lambda_2^v + d\lambda_3^v) \right\}. \end{aligned}$$

Setzt man:

$$E = 2K \frac{1+3\Theta}{1+2\Theta}, \quad \mu = \frac{\Theta}{1+2\Theta},$$

so erhält man die Kirchhoff'sche Form der Gleichungen:

$$p_1 = -2K[\lambda_1 + \Theta(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)] + 2K[d\lambda_1^v + \Theta(d\lambda_1^v + d\lambda_2^v + d\lambda_3^v)].$$

Im allgemeinen wird die elastische Nachwirkung des Prismas nicht durch eine einzige während eines isolirten Zeitelementes $d\tau$ ausgeübte Dilatation bedingt sein, son-

dern in dem ganzen Zeitraum von $t = -\infty$ bis $t = t$ werden Dilatationen bestanden haben. Wir machen die Hypothese, dass auch in diesem Fall das Princip der Superposition der Wirkungen und Verschiebungen Geltung besitze. Es tritt dann an Stelle der obigen Gleichung die allgemeinere:

$$p_1 = -2K[\lambda_1 + \Theta(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)] \\ + 2K\left\{\sum_{-\infty}^t d\lambda_1'' + \Theta\sum_{-\infty}^t (d\lambda_1'' + d\lambda_2'' + d\lambda_3'')\right\}.$$

In dieser Gleichung sind an Stelle der Nachwirkungsdilatationen diejenigen gegebenen Dilatationen einzuführen, deren Folge jene Nachwirkungen sind. Es setzt dies die Kenntniss eines Elementargesetzes der elastischen Nachwirkung voraus, d. h. eines Gesetzes, durch welches die einer einfachen Dehnung in der Richtung einer Hauptaxe entsprechende Nachwirkung bestimmt wird.

Um zu den speciellen, von Boltzmann aufgestellten Gleichungen zu gelangen, müssen wir dieses Gesetz in der folgenden Form supponiren.

1. Die elastische Nachwirkung, welche durch eine einfache Dehnung ξ_1^t eines Prismas in der Richtung der x -Axe erzeugt wird, ist zur Zeit t dargestellt durch den Ausdruck:

$$d\xi_1'' = \xi_1^t \Phi(t - \tau) d\tau.$$

Hier ist $\Phi(t - \tau)$ eine Function der Zeit t , welche für $t - \tau = 0$ einen bestimmten endlichen Werth besitzt, für $t - \tau = \infty$ verschwindet; $d\tau$ das Zeitelement, während dessen die Dehnung ξ_1^t unterhalten wurde.

2. Die der Verlängerung ξ_1^t entsprechenden Quercontractionen η_1^t und ζ_1^t haben Nachwirkungen $d\eta_1''$ und $d\zeta_1''$ zur Folge, welche in derselben Weise von $d\xi_1''$ abhängen, wie η_1^t und ζ_1^t von ξ_1^t , es ist somit:

$$d\eta_1'' = \eta_1^t \Phi(t - \tau) d\tau, \quad d\zeta_1'' = \zeta_1^t \Phi(t - \tau) d\tau.$$

3. Wenn zur Zeit τ gleichzeitig drei primäre Dehnungen ξ_1^t , η_2^t , ζ_3^t in der Richtung der Hauptaxen erzeugt worden sind, so haben die gesammten so entstehenden Nachwirkungsdilatationen zur Zeit t den Werth:

$$\frac{d\xi_1^v + d\xi_2^v + d\xi_3^v}{x} = d\lambda_1^v = \lambda_1^v \Phi(t - \tau) d\tau,$$

$$\frac{d\eta_1^v + d\eta_2^v + d\eta_3^v}{y} = d\lambda_2^v = \lambda_2^v \Phi(t - \tau) d\tau,$$

$$\frac{d\zeta_1^v + d\zeta_2^v + d\zeta_3^v}{z} = d\lambda_3^v = \lambda_3^v \Phi(t - \tau) d\tau.$$

Substituiren wir diese Ausdrücke in der früheren Gleichung, so ergibt sich:

$$p_1 = -2K[\lambda_1 + \Theta(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)] \\ + 2K \sum_{-\infty}^{t+} [\lambda_1^v + \Theta(\lambda_1^v + \lambda_2^v + \lambda_3^v)] \Phi(t - \tau) d\tau.$$

Mit Bezug auf ein Coordinatensystem, dessen Axen eine beliebige Lage gegen die Hauptdruckaxen besitzen, ergeben sich die Gleichungen:

$$X_x = -2K \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial x} + \Theta \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \right\} \\ + 2K \int_{-\infty}^t \left\{ \frac{\partial \xi^v}{\partial x} + \Theta \left(\frac{\partial \xi^v}{\partial x} + \frac{\partial \eta^v}{\partial y} + \frac{\partial \zeta^v}{\partial z} \right) \right\} \Phi(t - \tau) d\tau, \\ Y_z = Z_y = -K \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right\} + K \int_{-\infty}^t \left\{ \frac{\partial \eta^v}{\partial z} + \frac{\partial \zeta^v}{\partial y} \right\} \Phi(t - \tau) d\tau.$$

Gleichungen, welche mit den von Boltzmann aufgestellten im wesentlichen identisch sind.

Die von Boltzmann aufgestellten Gleichungen haben durch die Erfahrung nur eine theilweise Bestätigung gefunden. Insbesondere sind es die Beobachtungen von Kohlrausch an Silberdraht, welche mit denselben in Widerspruch stehen. Der Grund hierfür kann entweder darin liegen, dass für den Silberdraht die Annahme der Superposition der Wirkungen nicht zutreffend ist, oder darin, dass das für die Ausdehnung angenommene Nachwirkungsgesetz:

$$d\xi_1^v = \xi_1^v \Phi(t - \tau) d\tau$$

nicht allgemein richtig ist. Beide Möglichkeiten hängen unter sich insofern zusammen, als bei gewissen anderen Formen des Elementargesetzes, wie sie eben durch Kohl-

rausch's Beobachtungen nahe gelegt werden, durch die Superposition der Verschiebungen der zwischen $d\xi_1^y$ und ξ_1^x bestehende Zusammenhang nicht mehr auf $d\lambda_1^y$ und λ_1^x sich überträgt, sodass die entstehenden Formeln die Analogie mit den Entwicklungen der gewöhnlichen Elasticitätstheorie vollständig verlieren.

Die im Vorhergehenden entwickelten Gleichungen sollen benutzt werden, um wenigstens eine Vermuthung über denjenigen Einfluss zu begründen, welcher durch die elastische Nachwirkung des Suspensionsdrahtes auf galvanometrische Messungen ausgeübt wird. Bezeichnet man den Winkel, um welchen zu irgend einer Zeit das untere Ende des Drahtes gedreht ist, durch φ , so sind die Verschiebungen, welche ein Theilchen des Drahtes erleidet:

$$\xi = -\frac{zy}{l} \cdot \varphi, \quad \eta = \frac{zx}{l} \cdot \varphi.$$

Es wird somit:

$$Y_z = -K \frac{x}{l} \varphi + K \frac{x}{l} \int_{-\infty}^t \varphi(\tau) \Phi(t - \tau) d\tau,$$

$$X_z = K \frac{y}{l} \varphi - K \frac{y}{l} \int_{-\infty}^t \varphi(\tau) \Phi(t - \tau) d\tau.$$

Das von diesen Kräften ausgeübte Drehungsmoment ist:

$$M = \int (Y_z x - X_z y) dx dy$$

$$= -K \frac{\pi r^4}{2l} \left\{ \varphi - \int_{-\infty}^t \varphi(\tau) \Phi(t - \tau) d\tau \right\}$$

$$= -D \cdot \varphi + D \int_{-\infty}^t \varphi(\tau) \Phi(t - \tau) d\tau.$$

Setzt man:

$$t - \tau = \omega,$$

so wird:

$$\int_{-\infty}^t \varphi(\tau) \Phi(t - \tau) d\tau = \int_0^{\infty} \varphi(t - \omega) \Phi(\omega) d\omega.$$

Mit Berücksichtigung der elastischen Nachwirkung ergibt sich somit für die Bewegung eines bei geschlossenem Multiplicator schwingenden Nadelpaares die Gleichung:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2q \frac{d\varphi}{dt} + p^2 \varphi = \frac{D}{K} \int_0^\infty \varphi(t-\omega) \Phi(\omega) d\omega,$$

wo jetzt K das Trägheitsmoment des astatischen Paares bezeichnet.

Wir betrachten zuerst den Fall einer periodisch gedämpften Schwingung. In diesem hat man, wenn elastische Nachwirkung nicht vorhanden ist, die Gleichungen:

$$\varphi = \frac{\omega_0}{\sqrt{p^2 - q^2}} \cdot e^{-qt} \sin \sqrt{p^2 - q^2} \cdot t$$

$$q = \frac{\lambda}{\tau}, \quad \tau = \frac{\pi}{\sqrt{p^2 - q^2}}.$$

Bei Berücksichtigung der elastischen Nachwirkung kann man setzen:

$$\varphi = \frac{\omega_0}{\sqrt{p^2 - q^2}} \cdot e^{-(q+x)t} \sin [\sqrt{p^2 - q^2} + \delta] t,$$

und erhält dann:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2q \frac{d\varphi}{dt} + p^2 \varphi = \\ - 2\delta \omega_0 e^{-(q+x)t} \sin [\sqrt{p^2 - q^2} + \delta] t \\ - 2x \omega_0 e^{-(q+x)t} \cos [\sqrt{p^2 - q^2} + \delta] t \end{aligned}$$

Substituirt man andererseits den Werth von $\varphi(t-\omega)$ in dem auf der rechten Seite der vorhergehenden Gleichung stehenden Integral, so ergibt sich durch Vergleichung der beiden Seiten:

$$\delta = - \frac{D}{2K\sqrt{p^2 - q^2}} \cdot \int_0^\infty \Phi(\omega) \cos \sqrt{p^2 - q^2} \cdot \omega d\omega$$

$$x = \frac{D}{2K\sqrt{p^2 - q^2}} \cdot \int_0^\infty \Phi(\omega) \sin \sqrt{p^2 - q^2} \cdot \omega d\omega.$$

Infolge der elastischen Nachwirkung erleidet die Schwingungsdauer und das logarithmische Decrement des astatischen Paares eine Veränderung; die neuen Werthe, welche diese beiden Grössen annehmen, sind bestimmt durch:

$$\tau' = \frac{\pi}{\sqrt{p^2 - q^2} + \delta}, \quad \lambda' = (q + x) \tau'.$$

Woraus:

$$p = \frac{\sqrt{\pi^2 + \lambda'^2}}{\tau} - \frac{\delta\pi + \kappa\lambda'}{\sqrt{\pi^2 + \lambda'^2}}, \quad q = \frac{\lambda'}{\tau} - \kappa.$$

Wir gehen über zu dem Fall der aperiodischen Bewegung, und zwar zu der Betrachtung derjenigen Bewegung, welche dem astatistischen Paare durch einen constanten den Multiplicator durchfliessenden Strom ertheilt wird. Es sei K das Trägheitsmoment des astatistischen Paares, C die Empfindlichkeitsconstante des Multiplicators, i die Stromstärke, φ der Winkel, welchen die magnetische Axe der Nadeln mit dem magnetischen Meridiane bildet. Wir erhalten dann die Gleichung:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2q \frac{d\varphi}{dt} + p^2\varphi = \frac{C}{K}i + \frac{D}{K} \int_0^t \varphi(\tau) \Phi(t-\tau) d\tau.$$

Wenn die Bewegung so weit vorgeschritten ist, dass $d^2\varphi/dt^2$ und $d\varphi/dt$ vernachlässigt werden können, so ergibt sich:

$$p^2\varphi = \frac{C}{K}i + \frac{D}{K} \int_0^t \varphi(\tau) \Phi(t-\tau) d\tau.$$

Bezeichnen wir die Zeit, zu welcher die schliessliche Ruhelage erreicht wird, durch t_∞ , den entsprechenden Werth des Ablenkungswinkels durch φ_∞ , so wird:

$$\frac{C}{K}i = p^2\varphi_\infty - \frac{D}{K} \int_0^{t_\infty} \varphi(\tau) \Phi(t_\infty - \tau) d\tau.$$

Setzen wir: $\psi = \varphi_\infty - \varphi$,
so kann die Bewegungsgleichung auf die Form gebracht werden:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\psi}{dt^2} + 2q \frac{d\psi}{dt} + p^2\psi \\ &= \frac{D}{K} \int_0^{t_\infty} [\varphi_\infty - \psi(\tau)] \Phi(t_\infty - \tau) d\tau, \\ & - \frac{D}{K} \int_0^t [\varphi_\infty - \psi(\tau)] \Phi(t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Machen wir die Substitution $t - \tau = \omega$, so wird:

$$\int_0^t [\varphi_\infty - \psi(\tau)] \Phi(t-\tau) d\tau = \varphi_\infty \int_0^t \Phi(\omega) d\omega - \int_0^t \psi(t-\omega) \Phi(\omega) d\omega.$$

Ist keine elastische Nachwirkung vorhanden, so ist das Integral der Gleichung:

$$\psi = \varphi_0 \frac{\alpha_1 e^{\alpha_2 t} - \alpha_2 e^{\alpha_1 t}}{\alpha_1 - \alpha_2},$$

wo: $\alpha_1 + \alpha_2 = -2q, \quad \alpha_1 \alpha_2 = p^2,$

und wo der Winkel φ_0 bestimmt ist durch:

$$\frac{C}{K} i = p^2 \varphi_0.$$

Mit Berücksichtigung der elastischen Nachwirkung setzen wir:

$$\psi = \varphi_0 \frac{\alpha_1 e^{(\alpha_2 + \nu_2)t} - \alpha_2 e^{(\alpha_1 + \nu_1)t}}{\alpha_1 - \alpha_2} + \chi.$$

Für: $t = 0$ ist $\chi_0 = \varphi_\infty - \varphi_0,$

für: $t = \infty$ $\chi_\infty = 0.$

Aus dem gemachten Ansatz ergibt sich mit Vernachlässigung der Differentialquotienten von χ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi}{dt^2} + 2q \frac{d\psi}{dt} + p^2 \psi = \\ - \varphi_0 \alpha_2 e^{(\alpha_1 + \nu_1)t} \nu_1 - \varphi_0 \alpha_1 e^{(\alpha_2 + \nu_2)t} \nu_2 + p^2 \chi. \end{aligned}$$

Wenn man ferner auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung für $\psi(t-\omega)$ seinen Werth substituirt, so ergeben sich die folgenden Ausdrücke für die neu eingeführten Grössen:

$$\nu_1 = \frac{D}{2K\sqrt{q^2 - p^2}} \int_0^\infty e^{-\alpha_1 \omega} \Phi(\omega) d\omega,$$

$$\nu_2 = - \frac{D}{2K\sqrt{q^2 - p^2}} \int_0^\infty e^{-\alpha_2 \omega} \Phi(\omega) d\omega,$$

$$\chi = \frac{D}{p^2 K} \varphi_\infty \left[\int_0^\infty \Phi(\omega) d\omega - \int_0^t \Phi(\omega) d\omega \right],$$

Die für $(C/K)i$ aufgestellte Gleichung reducirt sich auf:

$$\frac{C}{K} i = p^2 \varphi_\infty - \frac{D}{K} \varphi_\infty \int_0^\infty \Phi(\omega) d\omega = p^2 (\varphi_\infty - \chi_0) = p^2 \varphi_0.$$

Für χ ergibt sich der zweite Ausdruck:

$$\chi = \chi_0 - \frac{D}{p^2 K} \varphi_\infty \int_0^t \Phi(\omega) d\omega.$$

Setzen wir: $\alpha'_1 = \alpha_1 + \nu_1$, $\alpha'_2 = \alpha_2 + \nu_2$,
so wird: $p^2 = \alpha'_1 \alpha'_2 - (\alpha'_1 \nu_2 + \alpha'_2 \nu_1)$,
 $2q = -(\alpha'_1 + \alpha'_2) + \nu_1 + \nu_2$,

$$i \frac{C}{K} = \alpha'_1 \alpha'_2 \varphi_\infty - (\alpha'_1 \nu_2 + \alpha'_2 \nu_1) \varphi_\infty - \alpha'_1 \alpha'_2 \chi_0.$$

Gleichungen, durch welche in Verbindung mit den für ν_1 , ν_2 und χ gegebenen Ausdrücken der Einfluss der elastischen Nachwirkung auf die zu messenden Constanten bestimmt wird.

VIII. *Ueber wässerige Lösungen;* *von J. A. Groshans.*

I. Allgemeine Betrachtungen.

Die Dichte einer Lösung, in welcher p Theile irgend eines löslichen Körpers in $(100 - p)$ Theilen Wassers gelöst sind, kann man mit grosser Annäherung nach der folgenden Interpolationsformel:

$$d = 1 + \frac{\frac{\alpha}{100 - p}}{\frac{p}{\beta} + 1}$$

berechnen. Setzt man $p = 1$ und führt für $100 - p$ die Bezeichnung aq (aqua) ein, so gilt also die vereinfachte Formel

$$d = 1 + \frac{\alpha}{aq + \beta}$$

für eine Lösung, welche einen Theil (ein Gramm) in der durch aq bezeichneten Anzahl von Grammen Wasser gelöst enthält. Gewöhnlich nimmt man als Einheit der Dichte die des Wassers bei der Versuchstemperatur t an.

In den Beobachtungen von Kremers ist die Wassermenge constant = 100; man hat demnach bei Anwendung der obigen Formel:

$$aq = \frac{100}{p} \quad \text{zu setzen.}$$