Ueber einen Fundamentalsatz aus der Theorie der elliptischen Functionen.

Von

ALFRED PRINGSHEIM in München.

Will man die Umkehrfunctionen des elliptischen Integrales erster Gattung durch Quotienten von Thetafunctionen darstellen, so ist es vor allem unerlässlich zu zeigen, dass das Verhältniss der beiden durch gewisse bestimmte Integrale definirten Perioden einen wesentlich positiven (d. h. auch von Null verschiedenen) imaginären Theil besitzt, da nur in diesem Falle die betreffenden Thetareihen, deren Modul durch obiges Periodenverhältniss definirt wird, überhaupt existiren, d. h. convergent sind. Da man indessen die Vorzeichen jener Perioden beliebig wählen kann, so kommt es offenbar wesentlich nur darauf an, nachzuweisen, dass das Periodenverhältniss *niemals reell* ist, worauf dann jene Vorzeichen nur noch so zu fixiren sind, dass die oben genannte Convergenzbedingung erfüllt ist.

Obschon nun mit diesem Satze die ganze Berechtigung jener Methode, welche die Theorie der elliptischen Functionen in der Hauptsache auf diejenige der Thetafunctionen basirt, geradezu steht und fällt, so zeigen nichtsdestoweniger zwei der besten und bekanntesten Compendien über diesen Gegenstand — dasjenige von Briot und Bouquet*) und das von Thomae**) — in dieser Beziehung eine empfindliche Beweislücke, von zahlreichen anderen nicht zu reden, welche über diesen wichtigen Punkt mit völligem Stillschweigen hinweggehen.

Der Gedankengang, welcher von den genannten Autoren eingeschlagen wird, ist nämlich folgender. Es werden zunächst doppelt periodische Functionen mit zwei willkürlich angenommenen Perioden ω , ω' betrachtet, und hierbei wird gezeigt, dass „eine eindeutige, doppelt-periodische Function mit reellem Periodenverhältniss nicht existirt“,

*) Briot et Bouquet, Théorie des fonctions elliptiques. Deuxième Édition 1875.

**) Thomae, Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen einer Veränderlichen. Zweite Auflage 1873.

oder vielmehr genauer gesagt, wenn man auf den wahren Sinn dieses „*Nicht-Existirens*“ zurückgeht: dass eine solche Function bei incommensurablem reellen Periodenverhältnisse entweder *constant oder total unstetig*, bei rationalem nur *scheinbar doppelt periodisch*, in Wahrheit aber *einfach periodisch* sein müsste.*)

Alsdann werden die elliptischen Functionen als eindeutige Umkehrungen des elliptischen Integrals erster Gattung eingeführt, und deren Perioden ω , ω' durch die bekannten bestimmten Integrale vollständig defnirt. Nun aber wird ohne weiteres folgendermaassen geschlossen: da nach dem oben erwähnten Satze eine eindeutige doppelt periodische Function mit reellem Periodenverhältniss überhaupt *nicht existirt*, muss nun auch dieses besondere $\frac{\omega'}{\omega}$ eo ipso imaginär sein.**)

Dieser Schluss ist indessen unzulässig. Denn zieht man die wahre Bedeutung jenes Satzes, wie sie oben ausdrücklich hervorgehoben wurde, in Betracht, so folgt daraus nur soviel, dass für die elliptischen Functionen $\frac{\omega'}{\omega}$ nicht reell und incommensurabel sein kann, da dieselben — wie man leicht ersieht — weder constant, noch total unstetig sind. Hingegen fehlt, um auch die Möglichkeit eines rationalen Periodenverhältnisses auszuschliessen, der Nachweis, dass jene Functionen auch *in Wahrheit und nicht bloss scheinbar doppelt periodisch* sind, d. h. dass zwischen den beiden vorhandenen Perioden ω , ω' keine homogene lineare Relation mit ganzzahligen Coefficienten besteht — was also schliesslich wiederum darauf hinausläuft, zu zeigen, dass $\frac{\omega'}{\omega}$ nicht reell und rational sein kann, sodass der oben gerügte Schluss thatsächlich einen vollkommenen circulus vitiosus enthält.

Mit anderen Worten: trotz der Existenz jenes allgemeinen Satzes über das Periodenverhältniss doppelt periodischer Functionen muss noch ganz speciell nachgewiesen werden, dass für die elliptischen Functionen jener Quotient $\frac{\omega'}{\omega}$ nicht reell oder zum mindesten nicht reell und rational ist.

Thatsächlich existiren nun aber bereits verschiedene directe Beweise dieses Satzes: zunächst derjenige, welchen Riemann in einer der Theorie der Abel'schen Functionen angepassten, verallgemeinerten Form gegeben

*) Briot et Bouquet, p. 231. 232. Thomae, p. 56.

**) Bei Thomae — a. a. O. p. 137 — ist dieser Schluss wörtlich so ausgeführt. Bei Briot und Bouquet wird p. 366 ohne jeglichen Beweis gesagt: „le rapport $\frac{\omega'}{\omega} = r + si$ variant d'une manière continue avec k et *restant imaginaire*“ — eine Behauptung, deren Begründung auf Grund des Vorgehenden nicht wohl anders als wie bei Thomae verstanden werden kann.

hat*), und der späterhin von Neumann und Königsberger für elliptische Functionen specialisirt worden ist**). Obschon nun aber die Idee dieses Beweises vielleicht mit zu den bewunderungswürdigsten Einblendungen des Riemann'schen Geistes gehört, so wird man doch kaum umhin können zuzugestehen, dass derselbe in Wahrheit auf einem ziemlich unvermittelt auftretenden Kunstgriffe (nämlich der Betrachtung eines in der ganzen übrigen Theorie gar nicht weiter vorkommenden Randintegrals) beruht, und dass es wünschenswerth erscheinen muss, denselben — zunächst wenigstens für die Theorie der elliptischen Functionen — durch einen einfacheren und natürlicheren zu ersetzen.

Einen Beweis, der diesen letzteren Anforderungen mehr Rechnung trägt, liefert die Abbildungstheorie. Bildet man die zweiblättrige, durch zwei Querschnitte einfach zusammenhängend gemachte Riemann'sche z -Fläche, für welche das elliptische Integral erster Gattung

$$u = \int_{z_0}^z \frac{dz}{V(1-z^2)(1-k^2z^2)}$$

als eindeutige Function des Ortes erscheint, vermöge dieses Integrales auf die u -Ebene ab, so resultirt — wegen der beständigen Endlichkeit und Stetigkeit jenes Integrales — als Abbild ein völlig im Endlichen verlaufendes, einfach zusammenhängendes Flächenstück, und zwar in Folge der constanten Differenzen (Periodicitätsmoduln), ω und ω' , welche die Integralwerthe auf den beiden Ufern je eines Querschnittes darbieten, ein (im allgemeinen irgendwie krummlinig begrenztes) Parallelogramm, welches einen gewissen endlichen Inhalt besitzen muss und sich nicht etwa in eine Linie zusammenziehen kann (da eine Fläche niemals conform auf eine Linie abgebildet werden kann). Bezeichnet man dann etwa den einen Eckpunkt dieses Parallelogramms (d. h. das Abbild eines von den 4 Schnittpunkten der beiden Querschnitte) mit u_0 , so sind $u_0 + \omega$, $u_0 + \omega'$ die beiden benachbarten Ecken, und da diese drei Punkte, wie eben bemerkt, nicht in einer Geraden liegen, so folgt, dass $\frac{\omega'}{\omega}$ complex sein muss.***)

*) Riemann, Theorie der Abel'schen Functionen § 21. — Ges. Werke, p. 124.

**) Neumann, Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale. Erste Auflage, 1865. p. 368. 369. — Königsberger, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen. 1874. pag. 295—299. Dieser Riemann'sche Beweis lehrt übrigens zugleich auch, wie die Periodicitätsmoduln zu normiren sind, damit die Convergenzbedingung für die ϑ -Functionen erfüllt ist (d. h. also speciell für elliptische Functionen: damit der imaginäre Theil von $\frac{\omega'}{\omega}$ wesentlich positiv ist).

***) Diese Abbildung findet sich auch bei Thomae (pag. 106): nur wird daraus nicht der Schluss gezogen, auf den es hier ankommt.

Dieser überaus einfache und anschauliche Beweis scheint mir (wie übrigens auch der zuerst erwähnte Riemann'sche) *das* gegen sich zu haben, dass er wesentlich auf der Einführung der Riemann'schen Flächen beruht. *) Ich bin nämlich der Ansicht, dass sich die Lehre von den elliptischen Functionen auch *ohne* dieses immerhin fremdartige geometrische Hilfsmittel mit ausreichender Strenge und Vollständigkeit functionentheoretisch behandeln lässt, und dass daher die Einführung der Riemann'schen Flächen — sofern es sich dabei nicht etwa mehr um eine Art Vorstudium für analoge Behandlung höherer Transcendenten oder um eine geeignete Grundlage für gewisse algebraische Untersuchungen (Modulargleichungen, Gleichungen fünften Grades etc.) handelt — als eine durchaus nicht gerechtfertigte Complication besser ganz zu vermeiden ist.

Hiernach bleibt also immer noch die Frage bestehen, ob der in Rede stehende Satz sich nicht auch ohne Anwendung der Riemann'schen Flächen beweisen lässt. Einen derartigen Beweis enthält nun eine im 83^{ten} Bande des Crelle'schen Journals publicirte Abhandlung des Herrn Fuchs über die Periodicitätsmoduln der elliptischen Integrale **). In dieser Abhandlung wird u. a. der Quotient $\frac{a_2 \omega + b_2 \omega'}{a_1 \omega + b_1 \omega'}$, wo ω, ω' als Functionen des variabel gedachten Integralmoduls κ zu betrachten sind und a_1, a_2, b_1, b_2 gewisse ganze Zahlen bedeuten, auf Grund einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, welcher ω und ω' als Functionen von κ Genüge leisten, eingehend untersucht, wobei dann unser Satz als ein specieller Fall des betreffenden Endresultates zum Vorschein kommt. Immerhin führt aber diese Untersuchung, wie schon aus dieser kurzen Andeutung ersichtlich sein dürfte, von der gewöhnlichen Theorie der elliptischen Functionen so weit ab, dass sich derselbe in den Rahmen einer Elementarvorlesung über diesen Gegenstand nicht eben leicht einfügen lassen würde.

Aus diesem Grunde habe ich versucht, jenen Satz noch auf einem mehr elementaren Wege zu erweisen, und in der That dürfte der von mir aufgefunden Beweis, der freilich nur ein apagogischer ist, in Bezug auf Kürze und Geringfügigkeit der dabei aufgewendeten Mittel wenig zu wünschen übrig lassen. Ich lasse denselben nunmehr folgen.

*) Wenigstens verliert er bei Anwendung der gewöhnlichen z -Ebene vollständig seine elegante und präcise Form.

**) Sur quelques propriétés des intégrales des équations différentielles, auxquelles satisfont les modules de périodicité des intégrales elliptiques des deux premières espèces. — A. a. O. p. 13 ff.

Es sei

$$(1) \quad u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} \quad R(z) = (1-z)^2 (1-x^2 z^2)$$

so ist bekanntlich

$$(2) \quad z = sn(u)$$

eine in der ganzen Ebene eindeutige Function von u , die sich mit Ausschluss der wesentlich singulären Stelle $u = \infty$ und gewisser anderer Punkte, wo sie von der ersten Ordnung unendlich wird, in Potenzreihen mit nicht durchweg verschwindenden Coefficienten entwickeln lässt: so ist also $sn(u)$ im allgemeinen stetig und *nicht* constant.

Aus der Untersuchung der verschiedenen Werthe, welche das Integral u für alle möglichen Arten von Integrationswegen und die nämliche obere Grenze z annimmt, folgt mit Hülfe der bekannten Cauchy'schen Integralsätze unmittelbar, dass $sn(u)$ die beiden Perioden

$$(3) \quad \omega = 4K, \quad \omega' = 2iK'$$

besitzt, wo K und iK' durch die geradlinig zu nehmenden Integrale

$$(4) \quad K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}, \quad iK' = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$$

definit sind*), und dass ausserdem

$$(5) \quad sn\left(\frac{\omega}{2} - u\right) = sn(u).$$

Was nun das zu untersuchende Periodenverhältniss $\frac{\omega'}{\omega}$ betrifft, so ist vor allem nach dem oben erwähnten Satze über doppelt periodische Functionen ersichtlich, dass dasselbe nicht reell und incommensurabel sein kann, da $sn(u)$ weder constant, noch total unstetig ist.

Um jetzt auch zu zeigen, dass $\frac{\omega'}{\omega}$ auch nicht reell und rational sein kann, bedarf ich lediglich der bekannten Relationen für $sn(u + \frac{\omega}{2})$, $sn(\frac{\omega}{2})$, $sn(\frac{\omega'}{2})$ — deren Ableitungsweise ich aber an dieser Stelle ausdrücklich angeben muss, um die einfache Grundlage, auf welcher dieser ganze Beweis beruht, hinlänglich klar hervortreten zu lassen. Ich vermeide hierbei absichtlich die Anwendung des Additionstheorems der elliptischen Integrale erster Gattung, weil dasselbe bei dieser ganzen Behandlungsweise besser als eine Folgerung aus den Additionsformeln der Thetafunctionen erscheint.

*) Ueber die hier nicht weiter in Betracht kommende Bestimmung des Vorzeichens der Quadratwurzel sehe man z. B. Briot und Bouquet, p. 366.

Mit Hülfe der Substitution von $-z$ für z in Gl. (1) liefert Gl. (2) die Beziehung:

$$\operatorname{sn}(-u) = -\operatorname{sn}(u)$$

sodass nach Gl. (5)

$$\operatorname{sn}\left(u - \frac{\omega}{2}\right) = -\operatorname{sn}(u)$$

und durch Vermehrung des Arguments um die Periode ω die erste der gesuchten Beziehungen sich ergibt:

$$(A) \quad \operatorname{sn}\left(u + \frac{\omega}{2}\right) = -\operatorname{sn}(u).$$

Hieraus folgt für $u = 0$ — wenn man berücksichtigt, dass auf Grund der Definitionsgleichungen (1) und (2) $\operatorname{sn}(0) = 0$ resultirt:

$$(B) \quad \operatorname{sn}\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0.$$

Um schliesslich noch die dritte der zu benützenden Relationen abzuleiten, transformire ich das Integral für iK' durch die Substitution

$$z^2 = \frac{1 - \xi^2}{1 - k^2 \xi^2},$$

wodurch sich

$$\frac{\omega'}{2} = \int_1^{\frac{1}{z}} \frac{dz}{V R(z)} = - \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{V R(\xi)}$$

ergiebt. Folglich ist

$$(C) \quad \operatorname{sn}\left(\frac{\omega'}{2}\right) = \infty.$$

Angenommen nun $\frac{\omega'}{\omega}$ wäre ein rationaler Bruch, dessen Zähler und Nenner wir dann als relativ prim voraussetzen dürfen, so müsste, wenn m und n ganze Zahlen bedeuten, einer der drei Fälle stattfinden

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{2m+1}{2n}, \quad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{2m+1}{2n+1}, \quad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{2m}{2n+1}$$

oder anders geschrieben, wenn man jede der betreffenden Gleichungen noch durch 2 dividirt:

$$n\omega' = \left(m + \frac{1}{2}\right)\omega,$$

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega' = \left(m + \frac{1}{2}\right)\omega,$$

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega' = m\omega$$

woraus mit Berücksichtigung der Periodicität von $\operatorname{sn}(u)$ — wenn man noch in der ersten dieser Gleichungen auf beiden Seiten u addirt — folgen würde:

$$\operatorname{sn}\left(u + \frac{\omega}{2}\right) = \operatorname{sn}(u),$$

$$\operatorname{sn}\left(\frac{\omega'}{2}\right) = \operatorname{sn}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

$$\operatorname{sn}\left(\frac{\omega'}{2}\right) = 0.$$

Da aber diese Gleichungen durchweg mit den oben gefundenen Relationen (A), (B), (C) im Widerspruche stehen, so ist also die Annahme eines reellen rationalen Periodenverhältnisses unzulässig und daher der betreffende Satz vollständig bewiesen. —

München, October 1885.

Nachtrag.

Das während der Drucklegung dieses Aufsatzes erschienene Heft der Acta Mathematica (Bd. 7, Heft 2) enthält (S. 197 ff.) unter dem Titel: „Beweis eines Satzes aus der Theorie der Elliptischen Functionen von M. Falk in Upsala“ einen ebenfalls sehr einfachen und zwar directen Beweis des vorstehenden Satzes — unter Ausschluss des Falles, dass κ^2 reell negativ oder positiv und ≥ 1 . Uebrigens ergibt sich alsdann — wie zur Vervollständigung des Falk'schen Beweises bemerkt werden möge — die Richtigkeit des Satzes ganz unmittelbar aus der blossen Betrachtung der beiden Perioden-Integrale (natürlich abgesehen von dem Specialfalle $\kappa^2 = +1$, für welchen das betreffende Integral überhaupt aufhört ein elliptisches zu sein). —

München, Januar 1886.