Als Mittel aus diesen 10 Messungen ergibt sich für $\beta + 1$ der Wert 1,62. Die größte gemessene Abweichung von diesem Mittelwert beträgt rd. $4\frac{1}{2}$ vH. Die Genauigkeit einer Einzelmessung dürfte schätzungsweise etwa ± 3 bis 4 vH betragen. Der theoretische Wert von $\beta + 1$ für einen Flügel von dem vorliegenden Achsenverhältnis beträgt 1,71 (vergl. die Zahlentafel auf S. 332). Nach der elementaren Theorie ist, wie wir wissen, $\beta + 1 = 2$. Der experimentelle Wert von $\beta + 1$ ist, wie man sieht, um rd. 5,5 vH niedriger als der unter Zugrundelegung der Tragflügeltheorie erhaltene Wert. Die Ursachen für den geringeren experimentellen Wert können folgende sein:

1. Den theoretischen Entwicklungen liegt die Voraussetzung zugrunde, daß die Spannweite des Flügels klein ist gegenüber dem Radius der Flugbahn. Dies war bei den beschriebenen Versuchen nicht in hinreichendem Maße der Fall und es ist vielleicht möglich, daß aus diesem Grunde Abweichungen der beobachteten Art auftreten.

2. Bei dem dicken Flügel und der verhältnismäßig geringen Geschwindigkeit tritt vermutlich auf der Saugseite Ablösung der Strömung und Totwasserbildung ein. Dieses Totwasser wird durch die Zentrifugalkraft radial nach außen geschleudert und dadurch auf der Außenhälfte des Flügels die Ablösung begünstigt. Verstärkung der Ablösung bedingt Verkleinerung des Auftriebes der äußeren Flügelhälfte und somit kleineres Quermoment. Bei großen Geschwindigkeiten und großen Flügeltiefen (große Reynoldssche Zahlen) tritt erfahrungsgemäß die Totwasserbildung immer mehr in den Hintergrund, so daß dann $\beta + 1$ möglicherweise dem theoretischen Wert zustreben wird.

Die Versuche bestätigen mit ausreichender Sicherheit das theoretische Resultat, daß nämlich das wirkliche Quermoment kleiner ist als dasjenige, das auf Grund der einfachen geometrischen Vorstellung berechnet wird, bei der der Einfluß des ringförmigen Wirbelbandes auf dem Flügel außer acht gelassen wird.

170

Über die Spannungen in freitragenden gefüllten Rohren.

Von E. SCHWERIN in Charlottenburg.

In einer 1920 veröffentlichten Arbeit hat Thoma¹⁾ die Spannungen berechnet, die in einem freitragenden, gefüllten Rohr infolge des Gewichts der Flüssigkeit auftreten, und zwar unter der Voraussetzung, daß die Biegezugfestigkeit der Wandung selbst vernachlässigt werden kann. Hierbei ergab sich, daß die dann allein auftretenden Normal- und Schubspannungen aus den Gleichgewichtsbedingungen gefunden werden können und sich in geschlossener Form angeben lassen.

In der vorliegenden Arbeit soll nun der Einfluß der Biege- und Torsionsfestigkeit der Wandung eingehend verfolgt werden, und zwar nicht nur bei Belastung durch das Flüssigkeits-, sondern auch durch das Eigengewicht des Rohres selbst; ferner wird nicht nur das wagrecht liegende, sondern auch das geneigte Rohr in den Kreis der Betrachtung gezogen werden.

I. Spannungen infolge des Flüssigkeitsgewichts im wagrecht liegenden Rohr.

Abb 1

1. Aufstellung der Gleichungen. Das wagrecht gelagerte Rohr, mit Flüssigkeit vom spez. Gew. γ gefüllt, habe die Wandstärke δ , den Radius der Mittelfläche a und die Länge l ; das Material besitze das spez. Gew. γ_E und die Elastizitätszahl E . In der Zylinderachse sei eine Druckhöhe h vorhanden, so daß nach Abb. 1 der in Richtung des Radius wirkende Flüssigkeitsdruck p in einem Punkt P , durch den Zentriwinkel φ charakterisiert, beträgt:

$$p = \gamma(h + a \cos \varphi) \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Der Punkt P sei zum Anfangspunkt eines Koordinatensystems gewählt, dessen x -Achse in Richtung der Rohrachse nach links weist und dessen y - und z -Achse wie oben

¹⁾ Zeitschr. f. d. ges. Turbinenwesen, 1920.

angegeben gerichtet sind. Auf die nach wachsendem x und y hin gelegenen Seitenflächen des Zylinderelements wirken dann folgende, auf die ganze Wandstärke δ und die Längeneinheit bezogenen Resultanten von Kräften und Momenten:

längs des Querschnitts des Rohres:

gleichmäßig über die Wandstärke verteilte Normalspannungen als Zugspannungen positiv, mit der Resultierenden T_1 ; linear mit dem Abstand von der Mittelfläche wachsende Biegungsspannungen, statisch gleichwertig einem Kräftepaar vom Moment G_1 , positiv, wenn auf Zubiegung der Schale hinwirkend;

Schubspannungen in Richtung der z -Achse mit der Resultierenden N_1 ;

Torsionsspannungen statisch gleichwertig einem Torsionsmoment H_1 , positiv, wenn entgegengesetzt dem Uhrzeiger drehend;

Schubspannungen in Richtung der y -Achse mit der Resultierenden S_1 ;

längs der Zylindererzeugenden:

analoge Spannungsresultanten T_2 , N_2 und Spannungsmomente G_2 , gleichfalls als zubiegende Momente positiv;

Schubspannungen in Richtung der negativen x -Achse mit der Resultierenden S_2 ;

Torsionsspannungen, gleichwertig einem Torsionsmoment H_2 , positiv im Sinne des Uhrzeigers.

Die Formänderung der Schale sei in folgender Weise gekennzeichnet:

u, v, w die in die Richtungen der bezw. x, y, z -Achsen fallenden Verschiebungskomponenten von P .

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ in der Mittelfläche gemessene Dehnungen in Richtung der Erzeugenden bezw. senkrecht dazu.

ω Winkelverkleinerung des ursprünglich rechten, von den positiven x - und y -Richtungen eingeschlossenen Winkels.

κ_1, κ_2 Krümmungsänderungen in Richtung der Erzeugenden bezw. senkrecht dazu, als Aufbiegungen positiv.

τ der gegenseitige Verdrehungswinkel zweier auf derselben Erzeugenden im Abstand der Längeneinheit liegender Querschnittelemente, positiv im Sinne von H_1 .

Bezeichnet σ den Querkontraktionskoeffizienten und wird zur Abkürzung:

$$D = \frac{E \delta^3}{12 (1 - \sigma^2)}$$

gesetzt, so sind nach Love¹⁾ die Spannungsresultanten bezw. Spannungsmomente mit den Formänderungen in folgender Weise verbunden:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{12 D}{\delta^2} (\varepsilon_1 + \sigma \varepsilon_2) & G_1 &= -D (\kappa_1 + \sigma \kappa_2) + T_1 \frac{\delta^2}{12 a} \\ T_2 &= \frac{12 D}{\delta^2} (\varepsilon_2 + \sigma \varepsilon_1) & G_2 &= -D (\kappa_2 + \sigma \kappa_1) \\ S_1 &= \frac{12 D}{\delta^2} \frac{1 - \sigma}{2} \omega & H_1 &= D (1 - \sigma) \tau - S_1 \frac{\delta^2}{12 a} \\ & & H_2 &= -D (1 - \sigma) \tau \end{aligned} \right\} \quad (I).$$

Die Hinzufügung der T_1 und S_1 enthaltenden Korrektionsglieder in den Formeln für G_1 und H_1 ist deshalb notwendig, weil die Biegungsverzerrungen $\delta \kappa, \delta \tau$ klein gegen die Reckungen ε, ω sind.

Ferner ergeben sich aus den von Love angegebenen allgemeinen Beziehungen, wenn zur Abkürzung:

$$\xi = \frac{x}{a} \quad \frac{\partial U}{\partial \xi} = U' \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = U''$$

geschrieben wird, folgende Formänderungs-Verschiebungsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} a \varepsilon_1 &= u' & a^2 \kappa_1 &= w'' \\ a \varepsilon_2 &= v' + w & a^2 \kappa_2 &= w'' - v' \\ a \omega &= v' + u' & a^2 \tau &= w'' - v' \end{aligned} \right\} \quad (II),$$

¹⁾ A. E. H. Love, Lehrb. d. Elastizität, deutsch von A. Timpe, Teubner 1907, S. 604, 605, (36) u. (39).

während die Gleichgewichtsbedingungen am Zylinderelement lauten:

$$\begin{aligned} T_1' - S_2' &= 0 & H_1' - G_2' + N_2 a &= 0 \\ S_1' + T_2' + N_2 &= 0 & G_1' + H_2' - N_1 a &= 0 \\ N_1' + N_2' - T_2 + a \gamma (h + a \cos \varphi) &= 0 & -H_2 + (S_1 + S_2) a &= 0 \end{aligned}$$

oder auch, wenn S_2 mit Hilfe der letzten Gleichung und H_2 mittels (I.) eliminiert wird:

$$\left. \begin{aligned} T_1' + S_1' \left(1 + \frac{\delta^2}{12 a^2}\right) + \frac{H_1'}{a} &= 0 & H_1' - G_2' + N_2 a &= 0 \\ S_1' + T_2' + N_2 &= 0 & G_1' - H_1' - S_1' a \frac{\delta^2}{12 a^2} - N_1 a &= 0 \\ N_1' + N_2' - T_2 + a \gamma (h + a \cos \varphi) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III}).$$

Nun besteht die in diesen Gleichungen auftretende, von den äußeren Kräften abhängige »Störungsfunktion« $a \gamma (h + a \cos \varphi)$ aus den beiden Gliedern $a \gamma h$ und $a^2 \gamma \cos \varphi$ und es wird daher der schließlich resultierende Gesamtspannungszustand, da für das hier vorliegende lineare Gleichungssystem das Superpositionsgesetz gilt, als Ueberlagerung der den beiden Einflüssen $a \gamma h$ und $a^2 \gamma \cos \varphi$ entsprechenden Spannungszustände erhalten werden können. Man erkennt, daß das konstante Störungsglied $a \gamma h$ einen rotationssymmetrischen, das Glied $a^2 \gamma \cos \varphi$ hingegen einen in bezug auf φ sinus- bzw. cosinusförmig verlaufenden Spannungszustand hervorrufen wird, von denen der letztere, also der Fall $h = 0$, zunächst betrachtet werde.

2. Der sinusförmige Spannungszustand infolge von $a^2 \gamma \cos \varphi$. Mit $h = 0$ kann wenn zur Abkürzung

$$\frac{\delta^2}{12 a^2} = \varepsilon \quad S_1 = S \quad H_1 = H$$

gesetzt wird, den Gleichungen (I), (II), (III) durch folgenden Ansatz genügt werden:

$$\begin{aligned} T_1 &= \overline{T}_1 \cos \varphi & G_1 &= \overline{G}_1 \cos \varphi & N_1 &= \overline{N}_1 \cos \varphi \\ T_2 &= \overline{T}_2 \cos \varphi & G_2 &= \overline{G}_2 \cos \varphi & N_2 &= \overline{N}_2 \sin \varphi \\ S &= \overline{S} \sin \varphi & H &= \overline{H} \sin \varphi \\ \varepsilon_1 &= \overline{\varepsilon}_1 \cos \varphi & \kappa_1 &= \overline{\kappa}_1 \cos \varphi & u &= \overline{u} \cos \varphi \\ \varepsilon_2 &= \overline{\varepsilon}_2 \cos \varphi & \kappa_2 &= \overline{\kappa}_2 \cos \varphi & v &= \overline{v} \sin \varphi \\ \omega &= \overline{\omega} \sin \varphi & \tau &= \overline{\tau} \sin \varphi & w &= \overline{w} \cos \varphi \end{aligned}$$

wo die überstrichenen Größen nur noch Funktionen von x darstellen. Hiermit gehen die Gleichgewichtsbedingungen (III), wenn wir die Querstriche nachträglich fortlassen, über in

$$\left. \begin{aligned} T_1' + S(1 + \varepsilon) + \frac{H}{a} &= 0 & H' + G_2 + N_2 a &= 0 \\ S' - T_2 + N_2 &= 0 & G_1' - H - S a \varepsilon - N_1 a &= 0 \\ N_1' + N_2 - T_2 + a^2 \gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III a}),$$

während die Formänderungsbedingungen lauten:

$$a \varepsilon_1 = u', \quad a \varepsilon_2 = v + w, \quad a \omega = v' - u, \quad a^2 \kappa_1 = w'', \quad a^2 \kappa_2 = -w - v, \quad a^2 \tau = -w' - v$$

$$T_1 = \frac{12 D}{\delta^4} (\varepsilon_1 + \sigma \varepsilon_2), \quad T_2 = \frac{12 D}{\delta^2} (\varepsilon_2 + \sigma \varepsilon_1), \quad S = \frac{12 D}{\delta^2} \frac{1 - \sigma}{2} \omega$$

$$G_1 = -D(\kappa_1 + \sigma \kappa_2) + T_1 a \varepsilon, \quad G_2 = -D(\kappa_2 + \sigma \kappa_1), \quad H = +D(1 - \sigma) \tau - S a \varepsilon.$$

Dieses Gleichungssystem läßt sich nun in folgender Weise zu einer einzigen Gleichung zusammenziehen. Die Addition der mit a multiplizierten ersten Gleichgewichtsbedingung zur letzten ergibt:

$$a T_1' + G_1' + a(S - N_1) = 0 \quad \dots \quad (3a),$$

ferner folgt aus der Subtraktion der zweiten von der dritten Gleichgewichtsbedingung:

$$N_1' - S' + a^2 \gamma = 0, \text{ somit } N_1 = S - a^2 \gamma \xi - c_1 \quad \dots \quad (2)$$

und zufolge (3a)

$$a T_1 + G_1 + a \left(a^2 \gamma \frac{\xi^2}{2} + c_1 \xi + c_2 \right) = 0 \quad \dots \quad (3).$$

Eliminiert man aus den Gl. (IIIa) zunächst N_1 und N_2 und zwar mittelst der Beziehungen:

$$N_1 = S - a^2 \gamma \xi - c_1, \quad N_2 = -\frac{1}{a} (H' + G_2) \quad \dots \quad (4),$$

so erhält man folgende drei Gleichgewichtsbedingungen:

$$\left. \begin{aligned} T_1' + S(1 + \varepsilon) + \frac{H}{a} &= 0, & S' - T_2 - \frac{H' + G_2}{a} &= 0, \\ a T_1 + G_1 + a \left(a^2 \gamma \frac{\xi^2}{2} + c_1 \xi + c_2 \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{IIIb)}.$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Aus diesen folgt: } G_1 &= -a T_1 - a \left(a^2 \gamma \frac{\xi^2}{2} + c_1 \xi + c_2 \right) \\ G_2 &= a [(2 + \varepsilon) S' - T_2 - T_1''], & H &= -a T_1' - a S(1 + \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad \text{IIIc)}.$$

Andererseits liefern die Formänderungsbedingungen (IIa) die Beziehungen:

$$\omega' + \varepsilon_1 = -a(\kappa_2'' + \kappa_1), \quad \varepsilon_2 = -a\kappa_2, \quad \tau = a\kappa_2' \quad \text{IIb)}.$$

Ersetzt man hierin mit Hilfe der Gl. (Ia) die Formänderungen durch die Spannungsergebnisse, so erhält man folgende weiteren Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} -G_1 + a\varepsilon T_1 + \sigma G_2 + (1 + \sigma)(H' + aS'\varepsilon) &= -a\varepsilon[2S'(1 + \sigma) + T_1 - T_2\sigma] \\ a\varepsilon(T_2 - T_1\sigma) &= G_2 - G_1\sigma + \sigma T_1 a\varepsilon \\ H + a\varepsilon S + \frac{a\varepsilon}{1 + \sigma}(T_2' - T_1'\sigma) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{IIc)}$$

und schließlich durch Einführung von (IIIc) in (IIc) drei Gleichungen für T_1 T_2 S :

$$\begin{aligned} -(1 + \sigma)(T_1'' + S') + T_1(1 + \varepsilon) + \sigma S'(2 + \varepsilon) - \sigma T_2 + \sigma T_1'' \\ + \varepsilon[2S'(1 + \sigma) + T_1 - T_2\sigma] + a^2 \gamma \frac{\xi^2}{2} + c_1 \xi + c_2 = 0 \end{aligned} \quad (5),$$

$$\varepsilon(T_2 - T_1\sigma) - S'(2 + \varepsilon) + T_2 - T_1'' - \sigma T_1 - \sigma \left(a^2 \gamma \frac{\xi^2}{2} + c_1 \xi + c_2 \right) = 0 \quad (6),$$

$$-T_1' - S + \frac{\varepsilon}{1 + \sigma}(T_2' - T_1'\sigma) = 0 \quad (7).$$

Aus der zweiten derselben folgt:

$$T_2 = \sigma T_1 + \frac{1}{1 + \varepsilon} [S'(2 + \varepsilon) + T_1'' + \sigma \left(a^2 \gamma \frac{\xi^2}{2} + c_1 \xi + c_2 \right)] \quad (8).$$

Setzt man dies in (5) und (7) ein und eliminiert schließlich noch S , so erhält man für die Längsspannungsergebnisse T_1 , wenn nur die erste Potenz der sehr kleinen Größe $\varepsilon = \frac{\delta^2}{12 a^2}$ beibehalten und:

$$\frac{1 - \sigma^2}{\varepsilon} = \frac{12 a^2}{\delta^2} (1 - \sigma^2) = \nu^4$$

$$\text{gesetzt wird: } T_1^{(IV)} + \alpha_1 T_1'' + \alpha_2 T_1 + \beta_1 \xi^2 + \beta_2 \xi + \beta_3 = 0 \quad \text{IV)},$$

wo:

$$\alpha_1 = -4 - 2\varepsilon \frac{2 + 3\sigma}{1 + \sigma}, \quad \alpha_2 = \nu^4 \left(1 + \varepsilon \frac{\sigma^2}{1 - \sigma^2} \right),$$

$$\beta_1 = \frac{\gamma}{2} a^2 \nu^4 \frac{1 + \varepsilon}{1 + 3\varepsilon} \sim \frac{\gamma}{2} a^2 \nu^4 (1 - 2\varepsilon), \quad \beta_2 = c_1 \nu^4 \frac{1 + \varepsilon}{1 + 3\varepsilon} \sim c_1 \nu^4 (1 - 2\varepsilon),$$

$$\beta_3 = c_2 \nu^4 \frac{1 + \varepsilon}{1 + 3\varepsilon} \sim c_2 \nu^4 (1 - 2\varepsilon).$$

Das Problem ist somit auf die Integration der Gl. (IV) zurückgeführt.

3. Integration. Das vollständige Integral der linearen Differentialgleichung (IV) mit konstanten Koeffizienten lautet:

$$\begin{aligned} T_1 &= C_1 \sin(\mu_2 \xi) \operatorname{Sh}(\mu_1 \xi) + C_2 \sin(\mu_2 \xi) \operatorname{Sh}(\mu_1 \xi) \\ &+ C_3 \cos(\mu_2 \xi) \operatorname{Sh}(\mu_1 \xi) + C_4 \cos(\mu_2 \xi) \operatorname{Sh}(\mu_1 \xi) + \mathfrak{I}_{12} \xi^2 + \mathfrak{I}_{11} \xi + \mathfrak{I}_{10} \end{aligned}$$

wo:

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{\nu^2}{2} \left(1 - \varepsilon \frac{\sigma^2}{1 - \sigma^2} \right) + 1 + \varepsilon \frac{2 + 3\sigma}{2(1 + \sigma)}}, \quad \mu_2 = \sqrt{\frac{\nu^2}{2} \left(1 - \varepsilon \frac{\sigma^2}{1 - \sigma^2} \right) - 1 - \varepsilon \frac{2 + 3\sigma}{2(1 + \sigma)}}$$

$$\text{so daß also } \mu_1^2 + \mu_2^2 = \nu^2 \left(1 - \varepsilon \frac{\sigma^2}{1 - \sigma^2} \right), \quad \mu_1^2 - \mu_2^2 = 2 + \varepsilon \frac{2 + 3\sigma}{1 + \sigma} \quad \text{IVa)}$$

$$\text{und ferner: } \mathfrak{I}_{12} = -\frac{\gamma}{2} a^2 \left(1 - \frac{2 - \sigma^2}{1 - \sigma^2} \varepsilon \right), \quad \mathfrak{I}_{11} = -c_1 \left(1 - \frac{2 - \sigma^2}{1 - \sigma^2} \varepsilon \right),$$

$$\mathfrak{I}_{10} = -c_2 \left(1 - \frac{2 - \sigma^2}{1 - \sigma^2} \varepsilon \right) - \gamma a^2 \varepsilon \frac{2 + \sigma}{1 - \sigma^2}$$

während $C_1 \dots C_4$ die vier willkürlichen Integrationskonstanten bezeichnen.

Aus T_1 lassen sich die übrigen Spannungs- und Formänderungsgrößen ohne Schwierigkeit bestimmen. Man erhält nach (5a), (7a) zunächst für S :

$$S = S^{(1)} \sin(\mu_2 \xi) \mathfrak{S} \sin(\mu_1 \xi) + S^{(2)} \sin(\mu_2 \xi) \mathfrak{S} \cos(\mu_1 \xi) \\ + S^{(3)} \cos(\mu_2 \xi) \mathfrak{S} \sin(\mu_1 \xi) + S^{(4)} \cos(\mu_2 \xi) \mathfrak{S} \cos(\mu_1 \xi) + \mathfrak{S},$$

wo mit der Abkürzung:

$$\frac{1 - \sigma + \varepsilon}{\gamma^2} \frac{2 - \sigma^2}{1 + \sigma} = \varrho_1, \\ \left. \begin{aligned} S^{(1)} &= C_2 \mu_1 \frac{\varrho_1 - 1}{1 - 2\varepsilon} + C_3 \mu_2 \frac{\varrho_1 + 1}{1 - 2\varepsilon} & S^{(3)} &= C_4 \mu_1 \frac{\varrho_1 - 1}{1 - 2\varepsilon} - C_1 \mu_2 \frac{\varrho_1 + 1}{1 - 2\varepsilon} \\ S^{(2)} &= C_1 \mu_1 \frac{\varrho_1 - 1}{1 - 2\varepsilon} + C_4 \mu_2 \frac{\varrho_1 + 1}{1 - 2\varepsilon} & S^{(4)} &= C_3 \mu_1 \frac{\varrho_1 - 1}{1 - 2\varepsilon} - C_2 \mu_2 \frac{\varrho_1 + 1}{1 - 2\varepsilon} \end{aligned} \right\} \quad (8) \\ \mathfrak{S} = (\gamma a^2 \xi + c_1) \left(1 - \varepsilon \frac{2 - \sigma}{1 - \sigma^2} \right)$$

Sodann folgt aus (8) für T_2 , wenn

$$2 + \sigma + \varepsilon \frac{5 + 16\sigma + 9\sigma^2}{1 + \sigma} = \varrho_2$$

eingeführt wird:

$$T_2 = T_2^{(1)} \sin(\mu_2 \xi) \mathfrak{S} \sin(\mu_1 \xi) + T_2^{(2)} \sin(\mu_2 \xi) \mathfrak{S} \cos(\mu_1 \xi) \\ + T_2^{(3)} \cos(\mu_2 \xi) \mathfrak{S} \sin(\mu_1 \xi) + T_2^{(4)} \cos(\mu_2 \xi) \mathfrak{S} \cos(\mu_1 \xi) + \mathfrak{T}_{22} \xi^2 + \mathfrak{T}_{21} \xi + \mathfrak{T}_{20}$$

$$\text{wo: } \begin{aligned} T_2^{(1)} &= -C_1 \varrho_2 + 2 C_4 \mu_1 \mu_2 (1 + 5\varepsilon), & T_2^{(2)} &= -C_2 \varrho_2 + 2 C_3 \mu_1 \mu_2 (1 + 5\varepsilon), \\ T_2^{(3)} &= -C_3 \varrho_2 - 2 C_2 \mu_1 \mu_2 (1 + 5\varepsilon), & T_2^{(4)} &= -C_4 \varrho_2 - 2 C_1 \mu_1 \mu_2 (1 + 5\varepsilon) \end{aligned}$$

und:

$$\mathfrak{T}_{22} = \varepsilon \frac{\sigma}{1 - \sigma^2} \gamma \frac{a^2}{2}, \quad \mathfrak{T}_{21} = \varepsilon \frac{\sigma}{1 - \sigma^2} c_1, \quad \mathfrak{T}_{20} = \gamma a^2 + \varepsilon \left(-2 \gamma a^2 \frac{1 + \sigma^2}{1 - \sigma^2} + c_2 \frac{\sigma}{1 - \sigma^2} \right).$$

Für das Torsionsmoment H_1 erhält man nach (IIIc):

$$H_1 = H_1^{(1)} \sin(\mu_2 \xi) \mathfrak{S} \sin(\mu_1 \xi) + H_1^{(2)} \sin(\mu_2 \xi) \mathfrak{S} \cos(\mu_1 \xi) + \mathfrak{H} \\ + H_1^{(3)} \cos(\mu_2 \xi) \mathfrak{S} \sin(\mu_1 \xi) + H_1^{(4)} \cos(\mu_2 \xi) \mathfrak{S} \cos(\mu_1 \xi)$$

$$\text{wo: } \begin{aligned} H_1^{(1)} &= C_2 \mu_1 [\varrho_1 - 3\varepsilon(1 - \varrho_1)] + C_3 \mu_2 [\varrho_1 + 3\varepsilon(1 + \varrho_1)] \\ H_1^{(2)} &= C_1 \mu_1 [\varrho_1 - 3\varepsilon(1 - \varrho_1)] + C_4 \mu_2 [\varrho_1 + 3\varepsilon(1 + \varrho_1)] \\ H_1^{(3)} &= C_4 \mu_1 [\varrho_1 - 3\varepsilon(1 - \varrho_1)] - C_1 \mu_2 [\varrho_1 + 3\varepsilon(1 + \varrho_1)] \\ H_1^{(4)} &= C_3 \mu_1 [\varrho_1 - 3\varepsilon(1 - \varrho_1)] - C_2 \mu_2 [\varrho_1 + 3\varepsilon(1 + \varrho_1)] \end{aligned}$$

$$\mathfrak{H} = -a(\gamma a^2 \xi + c_1) \varepsilon \frac{1 + 2\sigma}{1 + \sigma},$$

während die Spannungsmomente G_1 , G_2 und die Querkraft N_1 sich nach (IIIc), (IIc), (7) direkt bestimmen aus:

$$G_1 = -a T_1 - a \left(a^2 \gamma \frac{\xi^2}{2} + c_1 \xi + c_2 \right)$$

$$G_2 = -a \varepsilon T_2 - \sigma a T_1 (1 + 2\varepsilon) - a \sigma \left(a^2 \gamma \frac{\xi^2}{2} + c_1 \xi + c_2 \right)$$

$$N_1 = S - a^2 \gamma \xi - c_1.$$

Hiernach werden die Partikulärlösungen:

$$G_1 = \frac{a \varepsilon}{1 - \sigma^2} \left[- (2 - \sigma^2) \left(\gamma \frac{a^2}{2} \xi^2 + c_1 \xi + c_2 \right) + \gamma a^2 (2 + \sigma) \right]$$

$$G_2 = \frac{a \varepsilon}{1 - \sigma^2} \left[- \sigma \left(\gamma \frac{a^2}{2} \xi^2 + c_1 \xi + c_2 \right) + \gamma a^2 (1 + 2\sigma) \right]$$

$$\mathfrak{H}_1 = -\varepsilon \frac{2 - \sigma}{1 - \sigma^2} (\gamma a^2 \xi + c_1).$$

Für die Querkraft N_2 folgt nach (IIIa):

$$N_2 = N_2^{(1)} \sin(\mu_2 \xi) \mathfrak{S} \sin(\mu_1 \xi) + N_2^{(2)} \sin(\mu_2 \xi) \mathfrak{S} \cos(\mu_1 \xi) + \mathfrak{N}_{22} \xi^2 + \mathfrak{N}_{21} \xi + \mathfrak{N}_{20} \\ + N_2^{(3)} \cos(\mu_2 \xi) \mathfrak{S} \sin(\mu_1 \xi) + N_2^{(4)} \cos(\mu_2 \xi) \mathfrak{S} \cos(\mu_1 \xi)$$

wo mit

$$\varrho_3 = 1 + \varepsilon \frac{3 + 9\sigma + 5\sigma^2}{1 + \sigma},$$

$$\begin{aligned} N_2^{(1)} &= -C_1 \varrho_3 + 6 C_4 \mu_1 \mu_2 \varepsilon, & N_2^{(2)} &= -C_2 \varrho_3 + 6 C_3 \mu_1 \mu_2 \varepsilon, \\ N_2^{(3)} &= -C_3 \varrho_3 + 6 C_2 \mu_1 \mu_2 \varepsilon, & N_2^{(4)} &= -C_4 \varrho_3 - 6 C_1 \mu_1 \mu_2 \varepsilon, \end{aligned}$$

$$\mathfrak{N}_{22} = \mathfrak{T}_{22} = \varepsilon \frac{\sigma}{1 - \sigma^2} \gamma \frac{a^2}{2}, \quad \mathfrak{N}_{21} = \mathfrak{T}_{21} = \varepsilon \frac{\sigma}{1 - \sigma^2} c_1, \quad \mathfrak{N}_{20} = \varepsilon \sigma \left(-\gamma a^2 \frac{1 + 2\sigma}{1 - \sigma^2} + \frac{c_2}{1 - \sigma^2} \right)$$

Für die Verschiebungen u, v, w erhält man nach einigen Umformungen:

$$\frac{E \delta}{a} u = u^{(1)} \sin(\mu_2 \xi) \operatorname{Sin}(\mu_1 \xi) + u^{(2)} \sin(\mu_2 \xi) \operatorname{Cos}(\mu_1 \xi) + u_3 \xi^2 + u_2 \xi^2 + u_1 \xi + c_1' \\ + u^{(3)} \cos(\mu_2 \xi) \operatorname{Sin}(\mu_1 \xi) + u^{(4)} \cos(\mu_2 \xi) \operatorname{Cos}(\mu_1 \xi)$$

wo, wenn:

$$\frac{1 - \sigma^2}{2} - \sigma \varrho_1 (2 + 3 \varepsilon) + \sigma (1 + 4 \varepsilon) = \varrho_1',$$

$$\frac{1 - \sigma^2}{2} - \sigma \varrho_1 (2 + 3 \varepsilon) - \sigma (1 + 4 \varepsilon) = \varrho_1'',$$

$$u^{(1)} = \mu_1 C_2 \varrho_1' + \mu_2 C_3 \varrho_1'', \quad u^{(2)} = \mu_1 C_1 \varrho_1' + \mu_2 C_4 \varrho_1'',$$

$$u^{(3)} = \mu_1 C_4 \varrho_1' - \mu_2 C_1 \varrho_1'', \quad u^{(4)} = \mu_1 C_3 \varrho_1' - \mu_2 C_2 \varrho_1''$$

und:

$$u_3 = -\gamma \frac{a^2}{6} (1 - 2 \varepsilon), \quad u_2 = -\frac{c_1}{2} (1 - 2 \varepsilon), \quad u_1 = -c_2 (1 - 2 \varepsilon) - \gamma a^2 \left[\sigma + \varepsilon \frac{2 - \sigma - 2 \sigma^3}{1 + \sigma} \right],$$

während c_1' eine willkürliche Translationskonstante.

Für v folgt der gleiche Ausdruck, nur daß an Stelle der $u^{(1)}, u^{(2)} \dots, u_1, u_2 \dots$ mit

$$2 + \sigma + 2 \varepsilon \frac{1 + 3 \sigma + \sigma^2}{1 + \sigma} = \varrho_5$$

die Werte treten:

$$v^{(1)} = -C_1 \varrho_5 + 2 \varepsilon C_4 \mu_1 \mu_2 \frac{3 + \sigma}{1 + \sigma}, \quad v^{(2)} = -C_2 \varrho_5 + 2 \varepsilon C_3 \mu_1 \mu_2 \frac{3 + \sigma}{1 + \sigma},$$

$$v^{(3)} = -C_3 \varrho_5 - 2 \varepsilon C_2 \mu_1 \mu_2 \frac{3 + \sigma}{1 + \sigma}, \quad v^{(4)} = -C_4 \varrho_5 - 2 \varepsilon C_1 \mu_1 \mu_2 \frac{3 + \sigma}{1 + \sigma},$$

$$v_4 = \frac{u_3}{4}, \quad v_3 = \frac{u_2}{3}, \quad v_2 = \frac{u_1}{2} + (1 + \sigma) \gamma a^2 \left(1 - \varepsilon \frac{2 - \sigma}{1 - \sigma^2} \right),$$

$$v_1 = c_1' + 2 (1 + \sigma) \left(1 - \varepsilon \frac{2 - \sigma}{1 - \sigma^2} \right) c_1.$$

Auch hier tritt eine weitere, willkürliche Translationskonstante c_2' auf.

Die radiale Verschiebung w ist endlich gegeben durch:

$$w = \frac{T_2 - T_1 \sigma}{E \delta} - v.$$

Von Wichtigkeit ist ferner die Größe $w' = \frac{dw}{d\left(\frac{x}{a}\right)}$, die die Drehung der Erzeugenden bei der Deformation darstellt. Für diese folgt aus (IIa):

$$w' = -a^2 \tau - v' = -a^2 \tau - a \omega - u$$

und somit nach (Ia):

$$w' = -\frac{a^2}{D(1 - \sigma)} (H + 3 a \varepsilon S) - u.$$

Durch die im vorstehenden angegebenen Werte sämtlicher Spannungs- und Deformationsgrößen ist der Spannungszustand vollständig und eindeutig bestimmt und es läßt sich jetzt folgendes erkennen:

Die $C_1 \dots C_4$ enthaltenden Teile der Lösungen, die die Integrale des homogenen Gleichungssystems darstellen, nehmen von den Rohrenden aus rasch ab, sind jedoch für die Spannungsverteilung an den letzteren bzw. den Versteifungsringen von Bedeutung. Gegen die Mitte jeder Rohröffnung hin werden jedoch die durch die deutschen Buchstaben gekennzeichneten Partikulärlösungen fast allein maßgebend sein. Nun liefern die letzteren für die Biegemomente G_1, G_2, H , sowie für N_1, N_2 Werte von der Größenordnung $\varepsilon a T$ bzw. εT , d. h. da $\varepsilon = \frac{\delta^2}{12 a^2}$ meist sehr klein, ist der Einfluß der Biegesteifigkeit der Rohrwandung selbst sehr gering.

Noch deutlicher wird dies, wenn man den Quotienten $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{L}}$ bildet, der das Herausrücken der Stützlinie aus der Mittelfläche angibt. Man erhält z. B. in der Mitte eines an seinen beiden Enden frei gestützten Rohres, wenn

$$\mathfrak{L}_{1(0)} = \gamma \frac{r^2}{8}, \quad \mathfrak{L}_{2(0)} = \gamma a^2$$

die Längsspannungen ohne Berücksichtigung der Biegezugfestigkeit bezeichnen:

$$\frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{I}_{1(0)}} = \delta \frac{\delta}{12a} \left(\frac{2 - \sigma^2}{1 - \sigma^2} + 8 \frac{a^2}{l^2} \frac{2 + \sigma}{1 - \sigma^2} \right); \quad \frac{\mathfrak{G}_2}{\mathfrak{I}_{2(0)}} = \delta \frac{\delta}{12a} \left(\frac{1 + 2\sigma + \sigma^3}{1 - \sigma^2} \frac{l^2}{8a^2} \right)$$

d. h. für das schon verhältnismäßig dickwandige Rohr von $\frac{\delta}{a} = \frac{1}{20}$ wird bei $\frac{a}{l} = \frac{1}{5}$, $\sigma = 0,3$:

$$\frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{I}_{1(0)}} \approx \frac{1}{80} \delta = \frac{\mathfrak{G}_2}{\mathfrak{I}_{2(0)}}.$$

Es ist jedoch bemerkenswert, daß mit wachsender Rohrlänge unter sonst gleichen Umständen der Einfluß von $\mathfrak{G}_2$ zu-, der von $\mathfrak{G}_1$ hingegen abnimmt.

4. Auflagerbedingungen. Die für die Bestimmung der 8 Konstanten $C_1, C_2, C_3, C_4, c_1, c_2, c_1', c_2'$ maßgebenden Randbedingungen lauten für die praktisch vorkommenden Stützungen eines Rohrendquerschnitts wie folgt:

In einem vollkommen eingespannten Endquerschnitt muß sein:

$$u = 0 \quad v = 0 \quad w = 0 \quad w' = \frac{dw}{dx} \bigg|_a = 0.$$

Ist hingegen die Stützung derart, daß das Rohr durch einen starren Deckel abgeschlossen ist, der nur vertikal gestützt ist, jedoch sich ungehindert in der Längsrichtung verschieben und sich auch neigen kann, so lauten bei gelenkigem Anschluß des Rohrs an den Deckel die Bedingungen im Endquerschnitt:

$$G_1 = 0 \quad T_1 = 0 \quad w = 0 \quad v = 0$$

hingegen bei biegezugfestem Anschluß des Rohrs an den Deckel:

$$G_1 + a T_1 = 0 \quad w' = 0 \quad w = 0 \quad v = 0.$$

Eine besondere Betrachtung erfordert der Fall des kontinuierlichen Rohrstranges, der mittels starrer Versteifungsringe unsenkbar gelagert ist. Bei diesem sind an jeder Mittelstütze folgende Bedingungen zu befriedigen, wenn die an derselben zusammenstoßenden Öffnungen den Index m bzw. $m+1$ ebenso wie die zugehörigen Spannungs- und Deformationsgrößen erhalten:

$$\begin{aligned} T_1(m) &= T_1(m+1) & u(m) &= u(m+1) & v(m) &= 0 & w(m) &= 0 \\ G_1(m) &= G_1(m+1) & w(m) &= w(m+1) & v(m+1) &= 0 & w(m+1) &= 0 \end{aligned}$$

Man erhält also an jeder Mittelstütze 8, an jeder Endstütze 4, im ganzen also bei n Öffnungen: $8(n-1) + 2 \cdot 4 = 8n$ Gleichungen, denen in jeder Öffnung 8 zu bestimmende Konstanten, im ganzen also $8n$ Unbekannte gegenüberstehen; die Zahl der letzteren reduziert sich jedoch bei Symmetrie auf die Hälfte.

5. Der rotationssymmetrische Spannungszustand infolge von $h\gamma$. Zu den in 2 bis 4 berechneten Spannungen sind nun nach 1 noch die sich infolge des Störungsgliedes γh ergebenden Spannungen zu überlagern. Da dieselben in bezug auf die Rohrachse gleichmäßig verteilt sind, fallen in den Gl. (I), (II), (III) alle Ableitungen nach φ fort; ebenso verschwinden auch $N_2, H, S, \omega, \tau, \kappa_2$. Wir erhalten daher in diesem Falle folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{12D}{\delta^2} (\varepsilon_1 + \sigma \varepsilon_2) & G_1 &= -D(\kappa_1 + \sigma \kappa_2) + T_1 a \varepsilon \\ T_2 &= \frac{12D}{\delta^2} (\varepsilon_2 + \sigma \varepsilon_1) & G_2 &= -D(\kappa_2 + \sigma \kappa_1) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(Id).} \end{array} \right.$$

$$a \varepsilon_1 = u', \quad a \varepsilon_2 = w'; \quad a^2 \kappa_1 = w'', \quad \kappa_2 = 0. \quad \text{(II d).}$$

$$T_1' = 0, \text{ somit } T_1 = c, \quad N_1' - T_2 + a \gamma h = 0, \quad G_1' - N_1 a = 0. \quad \text{(III d)}$$

Mit Rücksicht auf $\kappa_2 = 0$ (nach II d) folgt für Gl. (Id):

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{12D}{\delta^2} (\varepsilon_1 + \sigma \varepsilon_2) = c & G_1 &= -D\kappa_1 + T_1 a \varepsilon = -D\kappa_1 + c a \varepsilon \\ T_2 &= \frac{12D}{\delta^2} (\varepsilon_2 + \sigma \varepsilon_1) & G_2 &= -D\sigma \kappa_1. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem läßt sich in folgender Weise auf eine Gleichung zusammenziehen.

Die Elimination von N_1 aus (III) ergibt:

$$G_1'' - a T_2 + a^2 \gamma h = 0 \quad \text{III c),}$$

hierzu mit $T_1 = c$ und (II d)

$$\varepsilon_2'' = a \kappa_1; \quad \kappa_2 = 0 \quad \text{II c).}$$

Ersetzt man in (II c) Dehnungen und Krümmungsänderungen mittels (Id), so erhält man:

$$\varepsilon_2'' = \frac{T_2'' - T_1'' \sigma}{E \delta} = \frac{G_1^{(IV)}}{E \delta a} = a \kappa_1 = \frac{a}{D} (c a \varepsilon - G_1),$$

mithin:

$$G_1^{(IV)} + \frac{12 a^2}{\delta^2} (1 - \sigma^2) G_1 - c a (1 - \sigma^2) = 0.$$

Das vollständige Integral dieser Gleichung lautet:

$$G_1 = C_1 \sin(\mu \xi) \mathfrak{S} \sin(\mu \xi) + C_2 \sin(\mu \xi) \mathfrak{S} \cos(\mu \xi) + C_3 \cos(\mu \xi) \mathfrak{S} \sin(\mu \xi) + C_4 \cos(\mu \xi) \mathfrak{S} \cos(\mu \xi) + c a \varepsilon,$$

wobei

$$\mu = \frac{\nu}{\sqrt{2}}, \quad \frac{12 a^2}{\delta^2} (1 - \sigma^2) = \nu^4.$$

Nach Bestimmung von G_1 folgt für T_2 nach (III c):

$$\begin{aligned} T_2 &= G_1'' + a \gamma h \\ &= \frac{\nu^2}{a} [-C_1 \sin(\mu \xi) \mathfrak{S} \sin(\mu \xi) - C_2 \sin(\mu \xi) \mathfrak{S} \cos(\mu \xi) + C_3 \cos(\mu \xi) \mathfrak{S} \sin(\mu \xi) + C_4 \cos(\mu \xi) \mathfrak{S} \cos(\mu \xi)], \\ &\quad + a \gamma h \end{aligned}$$

ferner für G_2 nach (Id):

$$\begin{aligned} G_2 &= \sigma G_1 - \sigma c a \varepsilon \\ &= \sigma [C_1 \sin(\mu \xi) \mathfrak{S} \sin(\mu \xi) + C_2 \sin(\mu \xi) \mathfrak{S} \cos(\mu \xi) + C_3 \cos(\mu \xi) \mathfrak{S} \sin(\mu \xi) + C_4 \cos(\mu \xi) \mathfrak{S} \cos(\mu \xi)]. \end{aligned}$$

Für die Querkraft N_1 liefert die letzte der Gleichgewichtsbedingungen (III d):

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{\nu}{a \sqrt{2}} [(C_2 - C_3) \sin(\mu \xi) \mathfrak{S} \sin(\mu \xi) + (C_1 - C_4) \sin(\mu \xi) \mathfrak{S} \cos(\mu \xi) + (C_1 + C_4) \cos(\mu \xi) \mathfrak{S} \sin(\mu \xi) \\ &\quad + (C_2 + C_3) \cos(\mu \xi) \mathfrak{S} \cos(\mu \xi)], \end{aligned}$$

während man für die Verschiebungen erhält:

$$\begin{aligned} w &= a \varepsilon_2 = \frac{a}{E \delta} (T_2 - T_1 \sigma) \\ u &= a \int \varepsilon_1 d\xi = \frac{a}{E \delta} \int (T_1 - T_2 \sigma) d\xi = \frac{a}{E \delta} \int \{c - \sigma (N_1' + \gamma a h)\} d\xi \\ &= -\frac{a \sigma}{E \delta} N_1 + \frac{a}{E \delta} (c - \sigma a \gamma h) \xi + c' \quad (c' = \text{willk. Konst.}) \end{aligned}$$

und die Tangendrehung w' sich ergibt zu:

$$\begin{aligned} w' &= \frac{a}{E \delta} T_2' \\ &= \frac{\nu^3}{E \delta \sqrt{2}} [- (C_2 + C_3) \sin(\mu \xi) \mathfrak{S} \sin(\mu \xi) - (C_1 + C_4) \sin(\mu \xi) \mathfrak{S} \cos(\mu \xi) \\ &\quad + (C_1 - C_4) \cos(\mu \xi) \mathfrak{S} \sin(\mu \xi) + (C_2 - C_3) \cos(\mu \xi) \mathfrak{S} \cos(\mu \xi)] \end{aligned}$$

Hiermit sind sämtliche Spannungen und Formänderungen bestimmt, sobald noch die Werte der 6 Konstanten $C_1 C_2 C_3 C_4 c c'$ aus den im folgenden angegebenen Randbedingungen ermittelt sind.

Die Bedingungen, denen die Spannungen und Formänderungen in einem Endquerschnitt genügen müssen, sind die folgenden:

In einem eingespannten Endquerschnitt muß sein:

$$u = 0 \quad w = 0 \quad w' = 0.$$

Bei Abschluß durch starre, nur vertikal gestützte, drehbare, in der Längsrichtung frei verschiebbare Deckel hat man, wenn das Rohrende gelenkig an den Deckel angeschlossen ist:

$$G_1 = 0 \quad T_1 = 0 \quad w = 0,$$

während bei biegezugfestem Anschluß des Rohres an den Deckel die Bedingungen lauten:

$$w' = 0 \quad T_1 = 0 \quad w = 0.$$

¹⁾ Diese sind natürlich nicht identisch mit den in Lösungen unter 2. auftretenden Konstanten.

Bei kontinuierlichen Rohrsträngen sind über jeder Mittelstütze folgende 6 Bedingungen zu erfüllen:

$$\begin{aligned} T_1(m) &= T_1(m+1) & u(m) &= u(m+1) & w_m &= 0 \\ G_1(m) &= G_1(m+1) & w'(m) &= w'(m+1) & w_{m+1} &= 0, \end{aligned}$$

so daß man also bei n Öffnungen: $6(n-1) + 2 \cdot 3 = 6n$ Gleichungen für die $6n$ Konstanten — bei Symmetrie nur die Hälfte — erhält.

Nach Bestimmung der Konstanten und Einsetzung derselben in die obigen Spannungen und Deformationen können die unter 2. und 3. bestimmten Spannungszustände überlagert und so die Gesamtspannungen infolge des Flüssigkeitsgewichtes und Ueberdruckes erhalten werden, wobei bemerkt sei, daß, wenn kein Ueberdruck vorhanden, in den Formeln unter 3. $h = a$ einzusetzen ist.

II. Spannungen infolge des Rohreigengewichts im wagerecht liegenden Rohr.

Die Spannungen des Rohreigengewichts selbst werden im allgemeinen gegenüber denen des Flüssigkeitsgewichtes und Ueberdrucks zurücktreten.

Immerhin besitzt z. B. ein Rohrstück von 1 cm Länge bei einer Wandstärke δ einem Radius a , spez. Gew. γ_E ein Gewicht $2\pi a \delta \gamma_E$, die eingeschlossene Flüssigkeit vom spez. Gew. γ_F hingegen ein solches von $\pi a^2 \gamma_F$. Die Gewichte verhalten sich also wie

$$\frac{G_E}{G_F} \sim \frac{2\pi a \delta \gamma_E}{\pi a^2 \gamma_F} \sim \frac{2\delta}{a} \frac{\gamma_E}{\gamma_F} = 15,6 \frac{\delta}{a}$$

für ein eisernes ($\gamma_E = 7,8 \text{ t/m}^3$) Rohr mit Wasserfüllung ($\gamma_F = 1 \text{ t/m}^3$).

Für $\frac{\delta}{a} = \frac{1}{40}$ würde hiernach das Rohrgewicht

etwa 39 vH des Flüssigkeitsgewichtes und für $\frac{\delta}{a} = \frac{1}{100}$ noch etwa 16 vH des letzteren betragen. Es sind also infolge des Rohrgewichts immerhin nicht ganz unbedeutliche Spannungen zu erwarten, die wir im folgenden untersuchen wollen.

Abb. 2

1. Aufstellung der allgemeinen Gleichungen. Aus einem wagerecht liegenden Rohr von der Wandstärke δ , dem Radius a , dem spez. Gew. γ_E sei ein unendlich schmaler Ring von der Breite dx herausgeschnitten. (Abb. 2.)

Dann besitzt ein Bogenelement desselben von der Länge $a d \varphi$ das Gewicht $\gamma_E \delta a d \varphi dx$, dessen Komponenten in der Y - bzw. Z -Richtung sind:

$$\begin{aligned} Y &= -\gamma_E \delta a d \varphi dx \sin \varphi = -\gamma_E' a^2 d \varphi dx \sin \varphi \\ Z &= +\gamma_E \delta a d \varphi dx \cos \varphi = +\gamma_E' a^2 d \varphi dx \cos \varphi, \end{aligned}$$

wenn $\gamma_E \frac{\delta}{a} = \gamma_E'$ gesetzt wird.

Nach S. 342 lauten daher die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\left. \begin{aligned} T_1' - S_2' &= 0 & H_1' - G_2' + N_2 a &= 0 \\ S_1' + T_2' + N_2 - a^2 \gamma_E' \sin \varphi &= 0 & G_1' + H_2 - N_1 a &= 0 \\ N_1' + N_2' - T_2 + a^2 \gamma_E' \cos \varphi &= 0 & -H_2 + (S_1 + S_2) a &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (III),$$

während die Formänderungsgleichungen (I) (II) unverändert bleiben.

Man überzeugt sich nun leicht, daß die obigen Gleichungen ebenfalls durch den sinus- bzw. cosinusförmigen Ansatz befriedigt werden können und daß dann die Gleichgewichtsbedingungen die Form annehmen¹⁾:

$$\begin{aligned} T_1 + S(1 + \varepsilon) + \frac{H}{a} &= 0 \\ S' - T_2 + N_2 - a^2 \gamma_E' &= 0 & H_1' + G_2 + N_2 a &= 0 \\ N_1' + N_2 - T_2 + a^2 \gamma_E' &= 0 & G_1' - H - S a \varepsilon - N_1 a &= 0 \end{aligned}$$

während die Formänderungen sich wieder nach (Ia) (IIa) bestimmen.

¹⁾ Wiederum unter Fortlassung der Striche über den Buchstaben.

Im folgenden soll nun der Einfluß des in der zweiten Gleichgewichtsbedingung auftretenden Störungsgliedes getrennt von dem der dritten Gleichung verfolgt werden.

2. Diskussion der Spannungen. a) Einfluß des Störungsgliedes $+a^2\gamma_E'$ der dritten Gleichgewichtsbedingung. Wenn, wie wir jetzt zunächst annehmen, das Störungsglied $-a^2\gamma_E'$ in der Y-Richtung nicht vorhanden ist und nur in der Z-Richtung ein solches von der Größe $+a^2\gamma_E'$, so stimmen die Gl. (IIIf) vollkommen mit den Gl. (IIIa) überein, wenn in den letzteren statt γ das reduzierte spez. Gew. des Rohrmaterials $\gamma_E' = \gamma_E \frac{\delta}{a}$ eingesetzt wird. Hieraus geht hervor, daß das Störungsglied in der Z-Richtung $+a^2\gamma_E'$ Spannungen hervorruft, die aus den im I. Abschnitt angegebenen Spannungen durch Multiplikation mit dem Verhältnis $\frac{\gamma_E'}{\gamma}$ abgeleitet werden können. Die Konstanten $C_1 \dots C_4$ c_1 c_2 c_1' c_2' verkleinern sich also im Verhältnis $\frac{\gamma_E'}{\gamma}$ und in den Partikularlösungen ist statt γ_E' statt γ einzusetzen.

b) Einfluß des Störungsgliedes $-a^2\gamma_E'$ der zweiten Gleichgewichtsbedingung. Dieser Einfluß ist zwar nicht mehr so einfach zu übersehen, wie der des Gliedes in der Z-Richtung. Nimmt man jedoch mit den Gl. (IIIf) sowie den Formänderungsgleichungen (Ia) (IIa) die gleichen Transformationen vor, die S. 342 bis 343 zur Aufstellung der Hauptgleichung für T_1 geführt haben, so ergibt sich für T_1 genau dieselbe Gl. (IV) wie oben, so daß also das Störungsglied $-a^2\gamma_E'$ der Y-Richtung dem Sinne und der Größe nach genau die gleichen Spannungen T_1 hervorruft wie $+a^2\gamma_E'$ der Z-Richtung. Dasselbe ergibt sich für die Größen S_1 G_1 N_1 H_1 da die Gleichungen, aus denen sie nach Bestimmung von T_1 gefunden werden, dieselben bleiben.

Anders verhält es sich jedoch mit den Größen T_2 N_2 G_2 , u_1 v w für die zwar die homogenen Lösungen dieselben bleiben, die in deutschen Buchstaben geschriebenen Lösungen jedoch folgende Werte annehmen¹⁾:

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{2E} &= -\gamma_E' \frac{a^2}{1+\varepsilon} + \frac{\varepsilon\sigma}{1-\sigma^2} \left(\frac{\gamma_E'}{2} a^2 \xi^2 + c_1^* + c_2^* \right) + \gamma_E' a^2 \left(1 - 2\varepsilon \frac{1+\sigma^2}{1-\sigma^2} \right) \\ \mathfrak{N}_{2E} &= -\gamma_E' \frac{a^2 \varepsilon}{1+\varepsilon} + \frac{\varepsilon\sigma}{1-\sigma^2} \left(\frac{\gamma_E'}{2} a^2 \xi^2 + c_1^* \xi^2 + c_2^* \right) - \gamma_E' a^2 \varepsilon \sigma \frac{1+2\sigma}{1-\sigma^2} \\ \mathfrak{G}_{2E} &= -\gamma_E' \frac{a^2 \varepsilon}{1+\varepsilon} + \frac{a\varepsilon}{1-\sigma^2} \left[-\sigma \left(\frac{\gamma_E'}{2} a^2 \xi^2 + c_1^* \xi + c_2^* \right) + \gamma_E' a^2 (1+2\sigma) \right] \\ \frac{E\delta}{a} \mathfrak{u}_E &= \mathfrak{u}_{3E} \xi^3 + \mathfrak{u}_{2E} \xi^2 + \mathfrak{u}_{1E} \xi + c_1'^* \\ &= \sigma \gamma_E' \frac{a^2 \xi}{1+\varepsilon} - (1-2\varepsilon) \left(\gamma_E' \frac{a^2}{6} \xi^3 + \frac{c_1^*}{2} \xi^2 + c_2^* \xi \right) - \gamma_E' a^2 \xi \left[\sigma + \varepsilon \frac{2-\sigma-2\sigma^3}{1+\sigma} \right] + c_1'^* \\ \frac{E\delta}{a} \mathfrak{v}_E &= \mathfrak{v}_{4E} \xi^4 + \mathfrak{v}_{3E} \xi^3 + \mathfrak{v}_{2E} \xi^2 + \mathfrak{v}_{1E} \xi + c_2'^* \\ &= \sigma \gamma_E' \frac{a^2 \xi^2}{2(1+\varepsilon)} - (1-2\varepsilon) \left(\gamma_E' \frac{a^2 \xi^4}{24} + \frac{c_1^* \xi^3}{6} + \frac{c_2^* \xi^2}{2} \right) \\ &\quad - \gamma_E' a^2 \xi^2 \left[-1 - \frac{\sigma}{2} + \varepsilon \left(\frac{2-\sigma}{1-\sigma} + \frac{2-\sigma-\sigma^3}{2(1+\sigma)} \right) \right] + 2(1+\sigma) \left(1 - \varepsilon \frac{2-\sigma}{1-\sigma^2} \right) c_1^* \xi + c_1'^* \xi + c_2'^* \\ \frac{E\delta}{a} \mathfrak{w}_E &= \mathfrak{T}_{2E} - \mathfrak{T}_{1E} - \mathfrak{v}_E \frac{E\delta}{a} \end{aligned}$$

c) Gesamtspannungen und Formänderungen infolge des Rohrgewichts. Nach vorstehendem lassen sich nun die Gesamtspannungen und Formänderungen infolge des Rohrgewichts, die durch den Index g gekennzeichnet seien, durch einfache Superposition der den beiden Störungsgliedern entsprechenden Spannungszustände ermitteln. Man findet auf diesem Wege folgende Werte:

$$\mathfrak{T}_{1g} = \mathfrak{T}_{12} \xi^2 + \mathfrak{T}_{11} \xi + \mathfrak{T}_{10},$$

wo

$$\mathfrak{T}_{12} = -\gamma_E' a^2 \left(1 - \frac{2-\sigma^2}{1-\sigma^2} \varepsilon \right), \quad \mathfrak{T}_{11} = -c_{1g} \left(1 - \frac{2-\sigma^2}{1-\sigma^2} \varepsilon \right),$$

$$\mathfrak{T}_{10} = -c_{2g} \left(1 - \frac{2-\sigma^2}{1-\sigma^2} \varepsilon \right) - 2\gamma_E' a^2 \varepsilon \frac{2+\sigma}{1-\sigma^2};$$

¹⁾ Der Index E soll andeuten, daß es sich um Teillösungen infolge Eigengewicht des Rohres handelt.

$$\mathfrak{S}_g = (2\gamma_{E'} a^2 \xi + c_{1g}) \left(1 - \varepsilon \frac{2-\sigma}{1-\sigma^2}\right), \quad \mathfrak{Z}_{2g} = \mathfrak{Z}_{22} \xi^2 + \mathfrak{Z}_{21} \xi + \mathfrak{Z}_{20}$$

wo

$$\mathfrak{Z}_{22} = \varepsilon \frac{\sigma}{1-\sigma^2} \gamma_{E'} a^2, \quad \mathfrak{Z}_{21} = \frac{\varepsilon \sigma}{1-\sigma^2} c_{1g}, \quad \mathfrak{Z}_{20} = \gamma_{E'} a^2 + \varepsilon \left(-\gamma_{E'} a^2 \frac{1+3\sigma^2}{1-\sigma^4} + c_{2g} \frac{\sigma}{1-\sigma^2} \right),$$

$$\mathfrak{G}_{1g} = \frac{-a\varepsilon}{1-\sigma^2} \left[-(2-\sigma^2) (\gamma_{E'} a^2 \xi^2 + c_{1g} \xi + c_{2g}) + 2\gamma_{E'} a^2 (2+\sigma) \right]$$

$$\mathfrak{G}_{2g} = \frac{-a\varepsilon}{1-\sigma^2} \left[-\sigma (\gamma_{E'} a^2 \xi^2 + c_{1g} \xi + c_{2g}) + \gamma_{E'} a^2 (1+4\sigma+\sigma^2) \right]$$

$$\mathfrak{H}_g = -a (2\gamma_{E'} a^2 \xi + c_{1g}) \varepsilon \frac{1+2\sigma}{1+\sigma}$$

$$\mathfrak{H}_{1g} = -\varepsilon \frac{2-\sigma}{1-\sigma^2} (2\gamma_{E'} a^2 \xi + c_{1g}), \quad \mathfrak{H}_{2g} = \frac{\varepsilon \sigma}{1-\sigma^2} (\gamma_{E'} a^2 \xi^2 + c_{1g} \xi + c_{2g}) + \varepsilon \gamma_{E'} a^2 \frac{1-2\sigma-5\sigma^2}{1-\sigma^2}$$

und schließlich für die Verschiebungen:

$$\frac{E\delta}{a} u_g = -(1-2\varepsilon) \left(\gamma_{E'} \frac{a^2}{3} \xi^3 + \frac{c_{1g}}{2} \xi^2 + c_{2g} \xi \right) - \gamma_{E'} a^2 \xi \left[\sigma(1+\varepsilon) + 2\varepsilon \frac{2-\sigma-\sigma^3}{1+\sigma} \right]$$

$$\frac{E\delta}{a} v_g = v_{4g} \xi^4 + v_{3g} \xi^3 + v_{2g} \xi^2 + v_{1g} \xi + c_g' \xi + c_{2g},$$

wo

$$v_{4g} = \frac{-\gamma_{E'} a^2}{12} (1-2\varepsilon), \quad v_{3g} = \frac{-c_{1g}}{6} (1-2\varepsilon)$$

$$v_{2g} = \frac{-c_{2g}}{2} (1-2\varepsilon) + \frac{\gamma_{E'} a^2}{2} \left[4 + 3\sigma + \varepsilon \frac{-12 + \sigma + 2\sigma^2 + 3\sigma^3 - 2\sigma^4}{1-\sigma^2} \right]$$

$$v_{1g} = 2(1+\sigma) \left(1 - \varepsilon \frac{2-\sigma}{1-\sigma^2} \right) c_{1g}$$

$$\frac{E\delta}{a} w_g = \mathfrak{Z}_{2g} - \mathfrak{Z}_{1g} - v_g \frac{E\delta}{a},$$

sowie für die Tangendrehung (vergl. S. 345)

$$\frac{E\delta}{a} w' = -\frac{12a(1+\sigma)}{\delta^2} \mathfrak{H}_g - 3(1+\sigma) \mathfrak{S}_g - v_g \frac{E\delta}{a},$$

Abb. 3

während die homogenen Lösungen formal ungeändert bleiben, da nur die in denselben auftretenden Konstanten $C_1 \dots C_4$ durch $C_{1g} \dots C_{4g}$ zu ersetzen sind.

III. Das geneigt liegende Rohr.

1. Spannungen infolge des Flüssigkeitsgewichts. Nachdem im vorstehenden die Spannungen infolge des Flüssigkeits- und Eigengewichts für das wagerecht liegende Rohr ermittelt worden sind, soll nunmehr angenommen werden, daß die Rohrachse unter dem Winkel α gegen die Horizontale geneigt liegt. In diesem Falle beträgt nach Abb. 3 der Flüssigkeitsdruck für die Flächeneinheit in der jetzt schräg gemessenen Entfernung x vom unteren Rohrende, an dem — auf der Achse — die Druckhöhe h_0 vorhanden sei,

$$p = \gamma h_\varphi = \gamma [h_0 - x \sin \alpha + a \cos \varphi \cos \alpha] = \gamma [h_0 - h_1 \xi + a \cos \varphi \cos \alpha],$$

wenn $h_1 = a \sin \alpha$ die Druckhöhenänderung in der Rohrachse auf eine schräge Länge gleich dem Rohrradius darstellt. Demnach lauten dann die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\left. \begin{aligned} T_1' - S_2' &= 0 & H_1' - G_2' + N_2 a &= 0 \\ S_1' + T_2' + N_2 &= 0 & G_1' + H_2' - N_1 a &= 0 \\ N_1' + N_2' - T_2 + a\gamma(h_0 - h_1 \xi + a \cos \alpha \cos \varphi) &= 0 & -H_2 + (S_1 + S_2) a &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{IIIg}),$$

während die Formänderungsbedingungen (I) (II) ungeändert bleiben.

Man erkennt nun aus der Form des Störungsgliedes in (IIIg), daß die Gesamtspannungen sich auch hier wieder aus einem rotationssymmetrischen und einem sinus- bzw. cosinusförmigen Spannungszustand additiv zusammensetzen werden.

Bezüglich des letzteren zeigt der Vergleich des ihm entsprechenden Störungsgliedes $a^2 \gamma \cos \alpha$ mit dem des bereits unter 2 bis 4 untersuchten Spannungszustandes $a^2 \gamma$, daß die gesuchten Spannungen durch genau die gleichen Formeln wie oben sich bestimmen, wofür nur in denselben überall $\gamma \cos \alpha$ statt γ gesetzt wird; eine besondere Betrachtung erübrigt sich daher. Für die rotationssymmetrisch verteilten Spannungen hingegen lauten jetzt die Gleichgewichts- und Formänderungsbedingungen:

$$T_1' = 0 \text{ somit: } T_1 = c, \quad N_1' - T_2 + a \gamma (h_0 - h_1 \xi) = 0, \quad G_1' - N_1 a = 0 \quad (\text{IIIh})$$

$$a \varepsilon_1 = u', \quad a \varepsilon_2 = w, \quad a^2 \kappa_1 = u'', \quad \kappa_2 = 0 \quad (\text{Ih}).$$

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{12D}{\delta^2} (\varepsilon_1 + \sigma \varepsilon_2) = c & G_1 &= -D \kappa_1 + T_1 a \varepsilon = -D \kappa_1 + c a \varepsilon \\ T_2 &= \frac{12D}{\delta^2} (\varepsilon_2 + \sigma \varepsilon_1) & G_2 &= -D \sigma \kappa_1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{Ib}).$$

Eliminiert man wieder zunächst N_1 aus (IIIh), so folgt

$$G_1'' - a T_2 + a^2 \gamma (h_0 - h_1 \xi) = 0,$$

und mit $T_1 = c$, wenn in den aus (IIh) folgenden Beziehungen $\varepsilon_2'' = a \kappa_1$; $\kappa_2 = 0$ mittels (Ih) Dehnungen und Krümmungsänderungen durch die Spannungsergebnisse ausgedrückt werden:

$$\varepsilon_2'' = \frac{T_2' - T_1''}{E \delta} = \frac{G_1' (IV)}{E \delta a} = a \kappa_1 = \frac{a}{D} (-G_1 + c a \varepsilon),$$

mithin wie S. 347¹⁾:

$$G_1 a (IV) + \frac{12 a^2}{\delta^2} (1 - \sigma^2) G_1 a - c a (1 - \sigma^2) = 0$$

Es bleibt also außer $T_1 = c$ auch G_1 wie S. 347 berechnet, nämlich:

$$G_{1a} = C_{1a} \sin(\mu \xi) \mathfrak{S} \sin(\mu \xi) + C_{2a} \sin(\mu \xi) \mathfrak{C} \cos(\mu \xi) + C_{3a} \cos(\mu \xi) \mathfrak{S} \sin(\mu \xi) + C_{4a} \cos(\mu \xi) \mathfrak{C} \cos(\mu \xi) + c a \varepsilon,$$

wo

$$\mu = \frac{r}{\sqrt{2}}, \quad \nu^2 = \frac{12 a^2}{\delta^2} (1 - \sigma^2).$$

Hingegen ergibt sich jetzt für T_2 :

$$T_{2a} = \frac{G_1''}{a} + a \gamma (h_0 - h_1 \xi) \xi = \frac{\nu^2}{a} [-C_{1a} \sin(\mu \xi) \mathfrak{S} \sin(\mu \xi) - C_{2a} \sin(\mu \xi) \mathfrak{C} \cos(\mu \xi) + C_{2a} \cos(\mu \xi) \mathfrak{S} \sin(\mu \xi) + C_{1a} \cos(\mu \xi) \mathfrak{C} \cos(\mu \xi)] + a \gamma (h_0 - h_1 \xi),$$

ferner für G_2 und N_1 wie S. 347:

$$G_{2a} = \sigma G_1 - \sigma c a \varepsilon = \sigma [C_{1a} \sin(\mu \xi) \mathfrak{S} \sin(\mu \xi) + C_{2a} \sin(\mu \xi) \mathfrak{C} \cos(\mu \xi) + C_{2a} \cos(\mu \xi) \mathfrak{S} \sin(\mu \xi) + C_{1a} \cos(\mu \xi) \mathfrak{C} \cos(\mu \xi)]$$

$$N_{1a} = \frac{r}{a \sqrt{2}} \left[(C_{2a} - C_{3a}) \sin(\mu \xi) \mathfrak{S} \sin(\mu \xi) + (C_{1a} - C_{4a}) \sin(\mu \xi) \mathfrak{C} \cos(\mu \xi) \right] + \frac{r}{a \sqrt{2}} \left[(C_{1a} + C_{4a}) \cos(\mu \xi) \mathfrak{S} \sin(\mu \xi) + (C_{2a} + C_{3a}) \cos(\mu \xi) \mathfrak{C} \cos(\mu \xi) \right],$$

während sich für die Verschiebungen ergibt:

$$w_a = a \varepsilon_{2a} = \frac{a}{E \delta} (T_{2a} - \sigma T_{1a})$$

$$\begin{aligned} u_a &= a \int \varepsilon_1 d\xi = \frac{a}{E \delta} \int (T_{1a} - T_{2a} \sigma) d\xi = \frac{a}{E \delta} \int \{c_a - \sigma [N_{1a}' + a \gamma (h_0 - h_1 \xi)]\} d\xi \\ &= -\frac{a \sigma}{E \delta} N_{1a} + \frac{a}{E \delta} \left[(c_a - \sigma a \gamma h_0) \xi + \sigma h_1 a \gamma \frac{\xi^2}{2} \right] + c_a' (c_a' = \text{willk. Konst.}) \end{aligned}$$

und für die Tangendrehung:

$$\begin{aligned} w_a' &= \frac{a}{E \delta} T_{2a}' = \frac{\nu^2}{E \delta \sqrt{2}} [- (C_{2a} + C_{3a}) \sin(\mu \xi) \mathfrak{S} \sin(\mu \xi) - (C_{1a} + C_{4a}) \sin(\mu \xi) \mathfrak{C} \cos(\mu \xi) \\ &\quad + (C_{1a} - C_{4a}) \cos(\mu \xi) \mathfrak{S} \sin(\mu \xi) + (C_{2a} - C_{3a}) \cos(\mu \xi) \mathfrak{C} \cos(\mu \xi) - a \gamma h_1 \xi]. \end{aligned}$$

2. Spannungen infolge des Rohreigengewichts. In ebenso übersichtlicher Weise wie für das Flüssigkeitsgewicht lassen sich auch für das Rohreigengewicht die Spannungen im schräg liegenden Rohr auf die des horizontalen Rohrs zurückführen.

¹⁾ Der Index α kennzeichnet Spannungs- und Deformationsgrößen des unter α geneigten Rohres.

Für das letztere lauten nämlich, wie man leicht sieht, die Gleichgewichtsbedingungen bei Beanspruchung allein durch Rohreigengewicht:

$$\begin{aligned} T_1' - S_2' - a^2 \gamma_E' \sin \alpha &= 0 & H_1' - G_2' + N_2 a &= 0 \\ S_1' + T_2' + N_2 - a^2 \gamma_E' \cos \alpha \sin \varphi &= 0 & G_1' + H_2' - N_1 a &= 0 \\ N_1' + N_2' - T_2 + a^2 \gamma_E' \cos \alpha \cos \varphi &= 0 & -H_2 + (S_1 + S_2) a &= 0 \end{aligned}$$

Vergleicht man diese mit den oben angegebenen Gleichungen für das horizontale Rohr, so erkennt man, daß dieselben sich, wenn man von dem Störungsglied $-a^2 \gamma_E' \sin \alpha$ der X-Richtung zunächst absieht, nur um den konstanten Faktor $\cos \alpha$ in den beiden Störungsgliedern der Y- und Z-Richtung unterscheiden. Hieraus geht hervor, daß die Gesamtspannungen sich wieder aus einem sinus- bzw. cosinusförmigen Spannungszustand zusammensetzen, der sich einfach aus den früheren Werten dadurch ergibt, daß überall $\gamma_E' \cos \alpha$ statt γ_E' geschrieben wird, sowie einem rotationssymmetrischen Zustand für den die Gleichgewichtsbedingungen lauten:

$$T_1' = a^2 \gamma_E' \sin \alpha; \quad \text{mithin: } T_1 = a^2 \gamma_E' \xi \sin \alpha + c_a^* \\ N_1' - T_2 = 0, \quad G_1' - N_1 a = 0 \quad \dots \quad \text{(IIIi)}$$

ferner:

$$\begin{aligned} a \varepsilon_1 &= u' & a \varepsilon_2 &= w & a^2 \kappa_1 &= w'' & \kappa_2 &= 0 & \dots & \text{(IIi)} \\ T_1 &= \frac{12D}{\delta^2} (\varepsilon_1 + \sigma \varepsilon_2) & & & G_1 &= -D \kappa_1 + T_1 a \varepsilon & & & & \\ T_2 &= \frac{12D}{\delta^2} (\varepsilon_2 + \sigma \varepsilon_1) & & & G &= -D \sigma \kappa_1 & & & & \end{aligned} \quad \text{(IIi)} \quad \dots \quad \text{(Ii)}$$

Die Elimination von N_1 aus (IIIi) ergibt:

$$G_1'' - a T_2 = 0,$$

hierzu mit $T_1 = \xi a^2 \gamma_E' \sin \alpha + c_a^*$ und $\varepsilon_2'' = a \kappa_1$; $\kappa_2 = 0$,
mit Benutzung von (Ii):

$$\varepsilon_2'' = \frac{T_2'' - T_1'' \sigma}{E \delta} = \frac{G_1^{(IV)}}{E \delta a} = a \kappa_1 = \frac{a}{D} [-G_1 + a \varepsilon (c_a^* + \xi a^2 \gamma_E' \sin \alpha)].$$

Hieraus:

$$G_1^{(IV)} + \frac{12a^2}{\delta^2} (1 - \sigma^2) G_1 - a (1 - \sigma^2) (c_a^* + \xi a^2 \gamma_E' \sin \alpha) = 0.$$

Das Integral lautet:

$$G_{1\alpha} = C_{1\alpha}' \sin(\mu \xi) \mathfrak{S} \sin(\mu \xi) + C_{2\alpha}' \sin(\mu \xi) \mathfrak{S} \cos(\mu \xi) + C_{3\alpha}' \cos(\mu \xi) \mathfrak{S} \sin(\mu \xi) + C_{4\alpha}' \cos(\mu \xi) \mathfrak{S} \cos(\mu \xi) \\ + a \varepsilon (c_a^* \xi a^2 \gamma_E' \sin \alpha).$$

Für die übrigen Spannungen und Formänderungen findet man:

$$T_{2\alpha} = \frac{G_1''}{a} = \frac{\nu^2}{a} [-C_{4\alpha}' \sin(\mu \xi) \mathfrak{S} \sin(\mu \xi) - C_{3\alpha}' \sin(\mu \xi) \mathfrak{S} \cos(\mu \xi) + C_{2\alpha}' \cos(\mu \xi) \mathfrak{S} \sin(\mu \xi) \\ + C_{1\alpha}' \cos(\mu \xi) \mathfrak{S} \cos(\mu \xi)].$$

$$G_{2\alpha} = \sigma G_{1\alpha} - \sigma a \varepsilon T_{1\alpha} = [C_{1\alpha}' \sin(\mu \xi) \mathfrak{S} \sin(\mu \xi) + C_{2\alpha}' \sin(\mu \xi) \mathfrak{S} \cos(\mu \xi) \\ + C_{3\alpha}' \cos(\mu \xi) \mathfrak{S} \sin(\mu \xi) + C_{4\alpha}' \cos(\mu \xi) \mathfrak{S} \cos(\mu \xi)]$$

$$N_{1\alpha} = \frac{\nu}{a \sqrt{2}} \left[(C_{1\alpha}' - C_{3\alpha}') \sin(\mu \xi) \mathfrak{S} \sin(\mu \xi) + (C_{1\alpha}' - C_{4\alpha}') \sin(\mu \xi) \mathfrak{S} \cos(\mu \xi) \right] + a^2 \gamma_E' \sin \alpha$$

$$w_\alpha = a \varepsilon_2 = \frac{a}{E \delta} (T_{2\alpha} - \sigma T_{1\alpha})$$

$$u_\alpha = a \int \varepsilon_1 d\xi = \frac{a}{E \delta} \int (T_{1\alpha} - T_{2\alpha} \sigma) d\xi = \frac{a}{E \delta} \int \{ \xi a^2 \gamma_E' \sin \alpha + c_a^* - \sigma N_{1\alpha}' \} d\xi$$

$$= -\frac{a \delta}{E} N_{1\alpha} + \frac{a}{E \delta} (c_a^* \xi + \frac{\xi^2}{2} \{ a^2 \gamma_E' \sin \alpha \} + c_{a^*}^{**} (c_{a^*}^{**} = \text{willk. Konst.})$$

$$w_\alpha' = \frac{a}{E \delta} (T_{2\alpha}' - T_{1\alpha}')$$

$$= \frac{\nu^2}{E \delta \sqrt{2}} \left[-(C_{2\alpha}' + C_{3\alpha}') \sin(\mu \xi) \mathfrak{S} \sin(\mu \xi) - (C_{1\alpha}' + C_{4\alpha}') \sin(\mu \xi) \mathfrak{S} \cos(\mu \xi) \right] - a^2 \gamma_E' \sin \alpha$$

Dieser Spannungszustand ist dem in II, 2, c gegebenen (mit $\gamma_E' \cos \alpha$ statt γ_E') zu überlagern, womit dann die Berechnung des schräg liegenden Rohres vollständig auf die des horizontalen zurückgeführt ist.

Zusammenfassung.

Die in der vorliegenden Arbeit gegebenen theoretischen Grundlagen ermöglichen es, die in schrägen oder horizontalen freitragenden Rohrleitungen beliebiger Stützung — insbesondere auch Walzenkesseln — auftretenden Spannungen genauer als bisher zu berechnen und insbesondere sich über die beträchtlichen Spannungen in der Nähe der Auflager ein der Wirklichkeit näher kommendes Bild zu machen.

Die für dünnwandige zylindrische biegezugsfeste Schalen gültigen Gleichgewichts- und Formänderungsbedingungen werden zunächst für den Fall des horizontalen, durch Flüssigkeitsdruck beanspruchten Rohres aufgestellt und in geschlossener Form vollständig integriert, wobei in der Weise vorgegangen wird, daß der Einfluß der einzelnen Störungsglieder getrennt verfolgt wird.

Hierbei ergibt sich, daß die im Rohr auftretenden Gesamtspannungen sich aus der Ueberlagerung zweier Spannungszustände zusammensetzen, von denen der eine in bezug auf die Rohrachse symmetrisch, der andere sinus- bzw. cosinusförmig verteilte Spannungen hervorruft.

Die für jeden dieser Spannungszustände getrennt anzusetzenden Randbedingungen werden für alle praktisch wichtigen Stützungsarten, insbesondere auch für kontinuierliche Leitungsstränge angegeben.

Nachdem sodann auch der Einfluß des Rohreigengewichts für das horizontale Rohr vollständig ermittelt ist, wird das biegezugsfeste, geneigt liegende Rohr gleichfalls auf Flüssigkeits- und Eigengewichtsbelastung untersucht und gezeigt, daß sich bei wiederum getrennter Verfolgung des Einflusses der einzelnen Störungsglieder die Spannungen in geneigt liegenden Rohren in sehr einfacher und übersichtlicher Weise auf die im horizontalen Rohr auftretenden zurückführen lassen.

80

Über die Wurzeln der charakteristischen Gleichungen von Schwingungsproblemen.

Von GEORG PICK in Prag.¹⁾

Die Gleichungen, welche entstehen, wenn man von den Diagonalelementen einer gegebenen quadratischen Matrix die Unbekannte t subtrahiert, und die erhaltene Determinante gleich Null setzt, haben lauter reelle Wurzeln in dem Falle, daß die gegebene Matrix symmetrisch ist. Es liegt deshalb nahe, für den allgemeinen Fall eine Abschätzung des Imaginärteils der Wurzel zu suchen, der diesen Teil in Abhängigkeit setzt von der Abweichung der Matrix von der Symmetrie. Von diesem Gedanken ausgehend hat Bendixson solche Gleichungen untersucht, und Hirsch hat die Untersuchung auf Matrizen mit komplexen Elementen ausgedehnt²⁾.

Wenn diese Frage nun hier zunächst unter Beschränkung auf reelle Matrizen wieder aufgenommen wird, so geschieht das, weil die von Bendixson erzielte Abschätzung des Imaginärteils erheblich verbessert, nämlich durch eine scharfe Abschätzung ersetzt werden kann. Sind $a_{\mu\nu}$ die Elemente der gegebenen n -zeiligen Matrix, und bezeichnet man den größten unter den Werten

$$\left| \frac{a_{\mu\nu} - a_{\nu\mu}}{2} \right|$$

mit g , so findet Bendixson für den Imaginärteil der Wurzel $t = r + si$ die Beziehung

$$-g \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} \leq s \leq +g \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

¹⁾ Die gewöhnlichen Schwingungsprobleme der Mechanik führen auf ein System von linearen Gleichungen, die eine etwas allgemeinere Form haben, als die vom Verfasser hier vorausgesetzten. Da man nämlich stets Differentialgleichungen zweiter Ordnung hat, tritt der Exponent λ nicht linear, sondern quadratisch in dem Koeffizientenschema (Matrix) der linearen Gleichungen auf. Eine unmittelbare Anwendung der Ergebnisse der nachstehenden Arbeit auf die Entscheidung der Stabilitätsfrage bei derartigen Schwingungsproblemen wird daher kaum möglich sein. Wohl aber kommen hier andere als mechanische Schwingungsvorgänge in Frage, vor allem Temperaturschwankungen und elektrische Schwingungen, bei denen der Einfluß der Selbstinduktion vernachlässigt wird. (Anmerkung des Herausgebers.)

²⁾ Bendixson, Acta mathematica XXV, S. 359—365, Hirsch, ebenda S. 367—370.