Les tangentes doubles à une courbe du quatrième ordre avec un point double.

Par FR. BRIOSCHI à MILAN.

La recherche des tangentes doubles à une courbe du quatrième degré avec un point double, présente une application très-intéressante de la théorie des covariants et des invariants simultanés des formes binaires.

Soient u, v deux formes binaires en x, y ; la première biquadratique, quadratique la seconde. Si le point double est déterminé par $x = 0, y = 0$, on pourra donner à l'équation de la courbe du quatrième degré la forme suivante:

$$U = 6z^2v - u;$$

et si l'on suppose que la droite $z + px + qy = 0$ soit une tangente double de la courbe, on aura:

$$6(px + qy)^2 v - u = f^2$$

f étant une forme quadratique en x, y . L'équation $f = 0$ donne deux droites passantes par le point double, et les autres points d'intersection avec la courbe sont les points de contact des deux tangentes doubles:

$$z + px + qy = 0; \quad -z + px + qy = 0.$$

On a huit fonctions f ; et l'on voit tout-de-suite la liaison que la recherche des tangentes doubles a avec la bissection des fonctions hyperelliptiques de première espèce.

Soient φ, ψ deux formes binaires des degrés n, m ; en posant:

$$\frac{1}{n} \frac{d\varphi}{dx} = \varphi_1; \quad \frac{1}{n(n-1)} \frac{d^2\varphi}{dx^2} = \varphi_{11} \dots \frac{1}{m} \frac{d\psi}{dx} = \psi_1 \dots$$

et:

$$(\varphi\psi) = \varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1; \quad (\varphi\psi)^2 = \varphi_{11}\psi_{22} - 2\varphi_{12}\psi_{12} + \varphi_{22}\psi_{11};$$

$$(\varphi\psi)^3 = \varphi_{111}\psi_{222} - 3\varphi_{112}\psi_{221} + 3\varphi_{122}\psi_{211} - \varphi_{222}\psi_{111};$$

les fonctions $(\varphi\psi), (\varphi\psi)^2, (\varphi\psi)^3 \dots$ sont des covariants ou des invariants simultanés des formes φ, ψ .

Les formes u, v donnent lieu aux formes simultanées suivantes*):

$$u; v; h = \frac{1}{2}(uu)^2; w = (uv)^2; t = (uw)^2 \\ k = \frac{1}{2}(vv)^2; i = \frac{1}{2}(uu)^4; j = \frac{1}{3}(uh)^4; I = (vw)^2; J = \frac{1}{2}(ww)^2 = \frac{1}{2}(vt)^2$$

$$K = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{22} \\ w_{11} & w_{12} & w_{22} \\ t_{11} & t_{12} & t_{22} \end{vmatrix}.$$

L'invariant K est gauche; c'est-à-dire son carré peut s'exprimer en fonction des autres invariants. En posant:

$$A = 4kJ - I^2; B = IJ - ikI - 4k^2j; C = k(iJ + jI) - J^2$$

on a:

$$K^2k = AC - B^2.$$

J'ajoute aux invariants supérieurs le discriminant simultané:

$$\Delta = I^2 - 16k(J - ki)$$

et en posant:

$$D = \frac{1}{2}(I + \sqrt{\Delta}) \quad E = \frac{1}{2}(I - \sqrt{\Delta})$$

j'observe qu'on a:

$$4k^2i = A + ID + E^2 = A + IE + D^2$$

$$16k^3j = E(A + ID) - (AE + 4Bk) = D(A + IE) - (AD + 4Bk)$$

et les:

$$(AD + 4Bk)(AE + 4Bk) = -16K^2k^3$$

$$ADE + 4Bk(D + E) + 16Ck^2 = 0.$$

Les formes biquadratiques u, h peuvent s'exprimer, comme il est connu, en fonctions quadratiques des covariants v, w, t ; et l'on a entre ces covariants une équation identique du second degré. Ces relations, qui peuvent prendre des formes différentes, se déduisent des trois suivantes:

$$Iu + 4kh = w^2 - iv^2 + 2vt$$

$$(1) \quad Ju + Ih = jv^2 + wt$$

$$(iI + 4kj)u + 4Jh = iw^2 + t^2 + 4jvw.$$

Par exemple, en multipliant ces dernières par $A + ID, 4kE, -4k^2$ et en les ajoutant, on trouve:

$$4k^2u = -\frac{1}{AE + 4Bk} \left[(A + ID)v + 2kEw - 4k^2t \right]^2 - Ev^2 + 4kvw;$$

par conséquent si l'on pose:

$$(2) \quad (A + ID)v + 2kEw - 4k^2t = \theta \sqrt{AE + 4Bk}$$

l'on a:

$$(3) \quad 4k^2u = -\theta^2 - Ev^2 + 4kvw.$$

*) On peut consulter à ce propos les mémoires de MM. Harbordt, Bessel et Gordan, *Mathematische Annalen*. Band 1.

Si avec la forme ternaire U et son hessien :

$$H = -3kvs^4 + (3vw - 4ku)s^2 + hv$$

on forme l'équation du quatorzième degré trouvée par M^r. Hesse pour la courbe dont les points d'intersection avec $U = 0$ sont les points de contact des tangentes doubles; en éliminant z entre cette équation et l'équation $U = 0$, on obtient l'équation du seizième degré suivante :

$$[2k^2u^2 + (Iv - 4kw)uv + 8khv^2]^2 - \Delta u^2v^4 = 0$$

le premier membre de laquelle sera le produit des huit fonctions quadratiques f . Or cette équation se décompose évidemment dans les deux :

$$2k^2u^2 + (Iv - 4kw)uv + 8khv^2 \pm uv^2\sqrt{\Delta} = 0,$$

desquelles à cause de la première des relations (1) on déduit :

$$(ku - vw)^2 - (Eu + iv^2 - 2vf)v^2 = 0,$$

et l'autre en substituant D à E . Mais en multipliant cette dernière par $4k^2$ on a :

$$4k^2(ku - vw)^2 - 4kE(ku - vw)v^2 - [(A + ID + E^2)v + 4kEv - 8k^2t]v^3 = 0$$

ou en substituant θ à t au moyen de la relation (2), on obtient :

$$4k^2(ku - vw)^2 - 4kE(ku - vw)v^2 - 2N\theta v^3 + (A + ID - E^2)v^4 = 0$$

ayant posé :

$$N = \sqrt{AE + 4Bk} = \sqrt{-E^3 + 4k^2iE - 16k^2j}.$$

Enfin en observant que l'expression (3) de u donne :

$$4k(ku - vw) = -(\theta^2 + Ev^2)$$

l'équation supérieure deviendra :

$$(\theta^2 + Ev^2)^2 + 4Ev^2(\theta^2 + Ev^2) - 8N\theta v^3 + 4(A + ID - E^2)v^4 = 0$$

ou :

$$(\theta - \varrho_1v)(\theta - \varrho_2v)(\theta - \varrho_3v)(\theta - \varrho_4v) = 0$$

$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$ étant les racines de l'équation du quatrième degré :

$$(4) \quad \varrho^4 + 6E\varrho^2 - 8N\varrho - 3E^2 + 16k^2i = 0.$$

Quatre fonctions f sont en conséquence données par l'équation :

$$(5) \quad 2kf = \theta - \varrho v$$

et les deux tangentes doubles correspondantes par la :

$$24k^2z^2 - (\varrho^2 - E)v + 2\theta\varrho - 4kw = 0$$

dans laquelle on posera pour θ l'expression (2).

En permutant E, D on aura une seconde équation du quatrième degré, les autres fonctions f , et les tangentes doubles relatives.

Ces deux équations du quatrième degré sont douées d'une propriété très-remarquable; leurs invariants quadratique et cubique sont égaux et en les désignant par S, T , on trouve :

$$S = 16k^2i \quad T = 4E(A + ID) - 4N^2 = 64k^3j.$$

Les deux fonctions anharmoniques des quatre racines des deux équations supérieures et de la $u = 0$ auront donc la même valeur; c'est-à-dire les deux premières peuvent se déduire de la troisième au moyen d'une substitution linéaire.

La résolution de l'équation du sixième degré de la bissection des fonctions hyperelliptiques de la première espèce se réduit par conséquent à celle de deux équations du quatrième degré et de huit équations du second degré; et seulement à la résolution de ces dernières, lorsque les racines de l'équation $u = 0$ sont connues.

J'ajouterai enfin une remarque relative à la forme de l'équation en φ . Cette forme correspond à celle qu'on obtient par la substitution linéaire qui annule le coefficient du second terme dans la transformation d'une biquadratique. En effet en supposant:

$$u = (a_0, a_1 \dots a_4)(x, y)^4$$

et

$$x = \frac{1}{a_0}(\xi - a_1) \quad , \quad y = 1$$

on trouve:

$$a_0^3 u = \xi^4 + 6e\xi^2 - 8n\xi - 3e^2 + a_0^2 i$$

étant:

$$e = a_0 a_2 - a_1^2$$

et:

$$2n = 3a_0 a_1 a_2 - a_0^2 a_3 - 2a_1^3 = \sqrt{-4e^3 + a_0^2 i e - a_0^3 j}.$$

La transformée a évidemment la même forme de l'équation en φ , et ses coefficients sont fonctions de e, i, j ; comme ceux de l'équation en φ de E, S, T . L'équation en φ s'obtiendra par conséquent de l'équation en ξ par la substitution $\xi = \frac{a\varphi - \alpha}{\beta - b\varphi}$, étant:

$$\varphi(a, b) = a^4 + 6ea^2b^2 + 8nab^3 + (a_0^2 i - 3e^2)b^4$$

$$\alpha = -\frac{1}{4} \frac{d\varphi}{db} \quad ; \quad \beta = \frac{1}{4} \frac{d\varphi}{da}$$

et les a, b déterminées par les deux relations:

$$a_0 \varphi = 4k \quad ; \quad \frac{1}{4}(\varphi \varphi)^2 = E;$$

propriétés qu'on déduit facilement de la théorie des covariants associés.

Milan, avril 1871.