

12. *Die Fortpflanzung des Lichtes in bewegten Medien nach der electrischen Lichttheorie; von R. Reiff.*

Die Theorie der Absorption und Dispersion, welche Hr. v. Helmholtz¹⁾ für die electromagnetische Lichttheorie gegeben hat, muss auch auf die Ausbreitung des Lichtes in bewegten Medien sich anwenden lassen, da wir die Einwirkung der Bewegung vermittels der Gleichungen der Electrodynamik für bewegte Körper in Rechnung ziehen können. Zu untersuchen, ob man vermittels dieser Theorie zum Fresnel'schen Ausdruck für die Lichtgeschwindigkeit in bewegten Medien kommen kann, ist der Zweck der nachfolgenden Zeilen.

Im Folgenden werde ich den einfachsten Fall eines bewegten durchsichtigen Mediums annehmen und behalte mir vor, in einer späteren Arbeit auf die allgemeineren Fälle einzugehen.

Es soll eine ebene Welle sich in der Richtung der z -Axe eines rechtwinkeligen Coordinatensystems fortpflanzen und der Körper selbst in der Richtung dieser Axe mit der (+ oder - genommenen) Geschwindigkeit γ fortgeführt werden; wir untersuchen die Frage, wie wird durch diese Bewegung die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes geändert?

Dabei müssen wir eine Festsetzung über die Eigenschaft des Aethers bei der Bewegung treffen. Es sind drei Möglichkeiten vorhanden:

1. Der Aether bewegt sich zugleich mit der Materie, er haftet an derselben;
2. der Aether bleibt während der Fortführung der Materie in Ruhe;
3. ein Theil des Aethers wird mit der Materie fortgeführt, ein Theil bleibt in Ruhe.

Dieser letzte Fall umfasst die beiden ersten als Specialfälle und wir wollen daher diesen Fall als den allgemeinsten

1) H. v. Helmholtz, Wied. Ann. 48. p. 339. 1893.

der Rechnung zu Grunde legen und sehen, welchen Werth man dem Bruchtheile des mitgeführten Aethers geben muss, um als erste Annäherung die Fresnel'sche Formel zu erhalten, welche von Hrn. Fizeau und den Hrn. Michelson und Morley¹⁾ experimentell bestätigt wurde.

Sind wie bei Hrn. v. Helmholtz x, y, z die electricischen Momente der Molecüle, α, β, γ die Geschwindigkeiten der Fortführung, so ist

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial t} + \alpha \sigma + \frac{\partial}{\partial y} (\beta x - \alpha y) + \frac{\partial}{\partial z} (\gamma x - \alpha z),$$

wo σ die Raumdichtigkeit der wahren Electricität der Molecül eist; wenn γ constant, $\alpha = 0, \beta = 0$ sind, wie im Folgenden, so folgt:

$$(1) \quad \frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial t} + \gamma \frac{\partial \bar{x}}{\partial z}$$

und hieraus:

$$(2) \quad \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial t^2} + 2\gamma \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial t \partial z} + \gamma^2 \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial z^2}.$$

Wenn nun bei der Bewegung des Körpers von der Volumeneinheit Aether nur der Theil δ (wo δ ein echter Bruch ist) mitgeführt ist, so gehen durch die Fläche $d\omega$ in der Zeiteinheit die Aethermengen $d\omega \cos(n, x) \cdot \alpha \delta, d\omega \cos(n, y) \cdot \beta \delta, d\omega \cos(n, z) \cdot \gamma \delta$ in der Richtung der x, y, z -Axen hindurch. Die Induction auf diesen Bruchtheil ist also dieselbe, als ob die ganze Menge des Aethers mit den Geschwindigkeiten $\alpha \delta, \beta \delta, \gamma \delta$ fortgeführt würde; und man hat darnach, wenn $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ die electricischen Momente des Aethers bedeuten:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial t} + \alpha \delta \cdot \sigma_1 + \delta \frac{\partial}{\partial y} (\beta \bar{x} - \alpha \bar{y}) + \delta \frac{\partial}{\partial z} (\gamma \bar{x} - \alpha \bar{z}),$$

und hieraus für $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = \text{const.}$:

$$(3) \quad \frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial t} + \gamma \delta \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial z}$$

und wie oben:

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial t^2} + 2\gamma \delta \cdot \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial t \partial z} + \gamma^2 \delta^2 \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial z^2}$$

mit den entsprechenden Gleichungen für \bar{y}, \bar{z} .

1) Michelson u. Morley, Am. Journ of Sc. 31. p. 377. 1886.

Diese Werthe hat man in die Gleichungen für die electrischen Schwingungen einzusetzen und aus denselben den Werth der Fortpflanzungsgeschwindigkeit V des Lichtes zu berechnen. In erster Annäherung musste sich dann ergeben:

$$V = C - \gamma \left(1 - \frac{1}{n^2} \right),$$

wo C die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im unbewegten Medium, n der Brechungsindex des unbewegten Mediums ist.

Indem wir die Formeln des Hrn. v. Helmholtz benutzen, schreiben wir den Werth der electrischen Energie in etwas allgemeinerer Form:

$$(4) \quad \Psi_\epsilon = \iiint dx dy dz \left\{ \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2\epsilon} - \eta \frac{xy + yz + zx}{\epsilon} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2\vartheta} \right\}.$$

Die Formel geht in die v. Helmholtz'sche über für $\eta = 1$ (vgl. l. c. Gleichung (11b)).

Mit dieser Veränderung werden die Formeln (12)....(12f) l. c., wenn wir überdies statt der partiellen $\partial/\partial t$ die totalen d/dt setzen:

$$(5) \quad \frac{x - \eta x}{\epsilon} = A \frac{dU}{dt}$$

$$(6) \quad A \frac{dQ}{dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z - \eta z}{\epsilon} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y - \eta y}{\epsilon} \right)$$

$$(7) \quad A \frac{dX + x}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M}{\mu} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{N}{\mu} \right)$$

$$(8) \quad x \frac{1 + \eta}{\epsilon} = x \frac{\epsilon + \vartheta \eta}{\epsilon \vartheta} + m_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + k_1 \frac{dx}{dt}$$

$$(9) \quad a^2 = \frac{\epsilon + \vartheta \eta}{(1 + \eta) \vartheta}, \quad m = m_1 \frac{\epsilon}{1 + \eta}, \quad k = k_1 \frac{\epsilon}{1 + \eta}$$

$$(10) \quad x = a^2 x + m \frac{d^2 x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt}.$$

Um die Rechnung zu vereinfachen, nehmen wir an, das Medium sei nicht absorbirend, wir setzen also $k = 0$, dann wird die letzte Gleichung:

$$(10a) \quad x = a^2 x + m \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Aus den Gleichungen (6) und (7) erhält man:

$$(11) \quad A^2 \frac{d^2 (X + x)}{dt^2} = \frac{1}{\mu \epsilon} \Delta (X - \eta x) + \frac{1}{\mu \epsilon} \eta \frac{\partial \sigma}{\partial x}.$$

(Es ist vielleicht nicht unnütz, zu bemerken, dass wegen der Constanz von α , β , γ die Gleichung gilt:

$$\frac{\partial}{\partial l} \frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial l},$$

wo P irgend ein Vector, l eine Coordinate des Vectors ist.)

Aehnliche Gleichungen wie (5) bis (11) gelten auch für \mathfrak{U} , \mathfrak{B} , η , \mathfrak{z} , \mathfrak{M} , \mathfrak{R} .

Nimmt man nun eine Welle, deren electricische Schwingungen parallel der x -Axe sind und welche längs der z -Axe abläuft, so erhält man, wenn man setzt:

$$(12) \quad \mathfrak{X} = B e^{in(t+pz)}, \quad \mathfrak{r} = b e^{in(t+pz)}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{X}}{dt} &= in(1 + \gamma \delta \cdot p) \mathfrak{X}, & \frac{d\mathfrak{r}}{dt} &= in(1 + \gamma p) \mathfrak{r} \\ \frac{d^2\mathfrak{X}}{dt^2} &= -n^2(1 + \gamma \delta \cdot p)^2 \mathfrak{X}, & \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} &= -n^2(1 + \gamma p)^2 \mathfrak{r}, \end{aligned}$$

und hiernach aus (10a):

$$(13) \quad B = b(a^2 - mn^2(1 + \gamma p)^2)$$

und aus (11):

$$(14) \quad B(1 + \gamma \delta \cdot p)^2 + b(1 + \gamma p)^2 = C_0^2(p^2 B - \eta p^2 b)$$

$$(15) \quad B(C_0^2 p^2 - (1 + \gamma \delta \cdot p)^2) = b(\eta p^2 C_0^2 + (1 + \gamma p)^2)$$

und aus (13) und (15):

$$(16) \quad (a^2 - mn^2(1 + \gamma p)^2)(C_0^2 p^2 - (1 + \gamma \delta \cdot p)^2) = C_0^2 \eta p^2 + (1 + \gamma p)^2$$

eine biquadratische Gleichung in p . Dabei ist p die reciproke Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im bewegten Mittel.

Setzt man $\gamma = 0$, so ergibt sich für den Werth der Fortpflanzungsgeschwindigkeit C im unbewegten Körper:

$$(17) \quad C^2 = C_0^2 \frac{a^2 - mn^2 - \eta}{a^2 - mn^2 + 1}$$

und für den Brechungscoefficienten:

$$(18) \quad n^2 = \frac{a^2 - mn^2 + 1}{a^2 - mn^2 - \eta}.$$

Um die Gleichung (16) aufzulösen, setzen wir $(1/p) = V$, nennen also V die Lichtgeschwindigkeit im bewegten Mittel. Dann erhalten wir ausführlich geschrieben für V folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
 & V^4(a^2 - m n^2 + 1) + V^3 \cdot 2 \gamma (1 - m n^2 + \delta a^2 - \delta m n^2) \\
 & - V^2 \{ C_0^2 (a^2 - m n^2 - \eta) - \gamma^2 (1 - m n^2 - 2 \delta m n^2 + \delta^2 - \delta^2 m n^2) \} \\
 & + V 2 \gamma \{ m n^2 C_0^2 - \delta \cdot \gamma^2 - \delta^2 \gamma^2 m n^2 \} - \delta^2 \gamma^4 - m n^2 C_0^2 \gamma^2 = 0.
 \end{aligned}$$

Dividirt man diese Gleichung mit $C^4(a^2 - m n^2 + 1)$ und setzt $(V/C) = \lambda$, so erhält man mittels der Gleichungen (17) und (18):

$$\begin{aligned}
 & \lambda^4 + \lambda^3 \frac{2 \gamma}{C} \frac{1 - m n^2 + \delta a^2 - \delta m n^2}{a^2 - m n^2 + 1} \\
 & - \lambda^2 \left\{ 1 - \frac{\gamma^2}{C^2} \frac{1 - m n^2 - 2 \delta m n^2 + \delta^2 - \delta^2 m n^2}{a^2 - m n^2 + 1} \right\} \\
 & + \lambda \frac{2 \gamma}{C} \left\{ \frac{m n^2 n^2}{a^2 - m n^2 + 1} - \frac{\gamma^2}{C^2} \frac{\delta + \delta^2 m n^2}{a^2 - m n^2 + 1} \right\} \\
 & - \frac{\gamma^2}{C^2} \left\{ \frac{n^2 m n^2}{a^2 - m n^2 + 1} + \frac{\gamma^2 \cdot \delta^2}{C^2 (a^2 - m n^2 + 1)} \right\} = 0.
 \end{aligned}$$

Nun ist γ/C im allgemeinen, d. h. bei terrestrischen Geschwindigkeiten, eine sehr kleine Grösse, sodass man die Quadrate in höheren Potenzen von γ/C vernachlässigen kann. Thut man dies, so verschwindet das Absolutglied, und die letzte Gleichung wird, wenn man mit λ durchdividirt:

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} & \lambda^3 + \lambda^2 \cdot \frac{2 \gamma}{C} \frac{1 - m n^2 + \delta (a^2 - m n^2)}{a^2 - m n^2 + 1} - \lambda \\ & + \frac{2 \gamma}{C} \frac{m n^2 n^2}{a^2 - m n^2 + 1} = 0. \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichung vom dritten Grade hat drei reelle Wurzeln. Für $x = -\infty$ wird der Ausdruck linker Hand negativ, für $\lambda = 0$ positiv; eine Wurzel liegt also zwischen $-\infty$ und 0, die zweite liegt nahe bei 0, denn für

$$\lambda = \frac{2 \gamma}{C} \left(\frac{m n^2 n^2}{a^2 - m n^2 + 1} + k \right),$$

wo k eine endliche positive Zahl bedeutet, ist der Ausdruck negativ, und die dritte Wurzel endlich ist wegen der Kleinheit der Coefficienten von λ^2 und λ^0 in der Nähe von 1.

Diese Wurzel ist es, welche wir berechnen müssen. Wir setzen also:

$$\lambda = 1 + y.$$

Dann wird y von der Ordnung γ/C , und wenn wir λ nur bis auf Glieder erster Ordnung in γ/C berechnen wollen, so können wir die Producte von y und γ/C und die Quadrate von y vernachlässigen und erhalten:

$$(20) \quad y = -\frac{\gamma}{C} \frac{1 + m n^2 (n^2 - 1) + \delta (a^2 - m n^2)}{a^2 - m n^2 + 1},$$

also:

$$(20a) \quad V = C - \gamma \frac{1 + m n^2 (n^2 - 1) + \delta (a^2 - m n^2)}{a^2 - m n^2 + 1}.$$

Diese Gleichung lässt sich noch vermittels des Werthes

$$n^2 = \frac{a^2 - m n^2 + 1}{a^2 - m n^2 - \eta}$$

umformen. Man erhält nämlich:

$$(21) \quad V = C - \gamma \frac{\frac{n^2}{n^2 - 1} = \frac{a^2 - m n^2 + 1}{1 + \eta}}{\frac{n^2 - 1}{n^2}} \frac{1 + m n^2 (n^2 - 1) + \delta (a^2 - m n^2)}{1 + \eta}.$$

Setzt man in dieser Formel $\eta = 1$, so erhält man denjenigen Werth von V , welcher der Theorie des Hrn. v. Helmholtz entspricht; also:

$$(21a) \quad V = C - \gamma \frac{n^2 - 1}{n^2} \frac{1 + m n^2 (n^2 - 1) + \delta (a^2 - m n^2)}{2}.$$

Der erste Factor ist derjenige, der in der Fresnel'schen Formel auftritt. Da diese Formel

$$V = C - \gamma \frac{n^2 - 1}{n^2}$$

durch die Versuche von Fizeau und der Hrn. Michelson und Morley experimentell als erste Annäherung nachgewiesen ist, so müsste in erster Annäherung der zweite Factor = 1 werden, d. h. es müsste

$$\delta (a^2 - m n^2) = 1 - m n^2 (n^2 - 1)$$

sein. δ könnte also nicht Null sein, es müsste eine gewisse Menge Aether mitgeführt werden:

$$\delta = \frac{1 + m n^2 (n^2 - 1)}{a^2 - m n^2},$$

oder in v. Helmholtz'scher Bezeichnungweise

$$(22) \quad \delta = \frac{\frac{1}{m} + n^2 (n^2 - 1)}{N^2 - n^2}.$$

Es wäre also δ abhängig von der Schwingungszahl, was an sich nichts wunderbares ist, und zwar wurde δ um so grösser, je grösser die Schwingungszahl. Immerhin aber ist für nicht

absorbirende Medien n^2 wesentlich $< N^2$ und $1/m$ und man kann daher in erster Annäherung schreiben:

$$\delta = \frac{1}{m} N^2 = \frac{1}{a^2}.$$

Dies gibt für Terpentinöl (vgl. v. Helmholtz, Wied. Ann. 48. p. 723)

$$\delta = \frac{1}{3} \text{ ungefähr.}$$

Zu einem einfacheren Resultate würde man gelangen, wenn man $\eta = 0$ setzte, d. h. wenn man die electriche Energie des Körpers

$$\Phi_e = \iiint dx dy dz \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2\varepsilon} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2\vartheta} \right)$$

annehmen würde. Dann würde folgen:

$$V = C - \gamma \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) (1 + m n^2 (n^2 - 1) + \delta (a^2 - m n^2))$$

und $m n^2$ ist ein kleiner Bruch, a^2 eine endliche Zahl; damit also näherungsweise die Fresnel'sche Formel erfüllt wäre, müsste man

$$\delta = 0$$

setzen und erhielte

$$(23) \quad V = C - \gamma \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) (1 + m n^2 (n^2 - 1)),$$

oder in erster Annäherung:

$$V = C - \gamma \left(1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

Man hätte also dann nicht nöthig, eine Mitführung des Aethers zu Hülfe zu nehmen. Bemerket sei noch, dass die Annahme $\eta = 0$ die Resultate der Theorie des Hrn. v. Helmholtz nicht beeinflusst.¹⁾

Heilbronn, den 3. Juni 1893.

1) Die vorliegende Rechnung setzt voraus, dass das Volumen der Materie verhältnissmässig klein gegen das Aethervolumen ist. Für den allgemeineren Fall verweise ich auf eine spätere Abhandlung.