Die Grundgleichungen der Hyperflächen im Euklidischen R_{n+1} gegenüber den inhaltstreuen Affinitäten.

Von L. Berwald in Prag.

Bekanntlich ist die affine Differentialgeometrie der Flächen im Euklidischen R_3 von den Herren G. Pick¹⁾, W. Blaschke²⁾ und — unter Zugrundelegung allgemeiner Parameter auf der Fläche — von Herrn J. Radon³⁾ auf das Studium zweier simultanen Differentialformen zurückgeführt worden. In entsprechender Weise wird im ersten Abschnitt der vorliegenden Abhandlung die (inhaltstreu-) affine Differentialgeometrie der n -dimensionalen krummen Mannigfaltigkeiten oder Hyperflächen im Euklidischen R_{n+1} zurückgeführt auf ein System von zwei simultanen Differentialformen, einer quadratischen und einer kubischen⁴⁾. Die zugehörigen Grundgleichungen werden vollständig entwickelt und auch die Formeln für den Fall angegeben, daß die Hyperfläche in Hyperebenen-Koordinaten vorliegt. Der zweite Abschnitt verallgemeinert den Blaschkeschen Begriff des „Krümmungsbildes“ einer Fläche⁵⁾ und die gleichfalls von Herrn W. Blaschke entwickelte affine Krümmungstheorie der Flächen⁶⁾ auf die Hyperflächen im R_{n+1} .

Da das Folgende eine Reihe von Berührungspunkten mit den Untersuchungen des Herrn G. Fubini über die Grundlagen der projektiven Differentialgeometrie⁷⁾ besitzt, so mag hier noch der Zusammenhang mit diesen Untersuchungen angedeutet werden:

¹⁾ G. Pick, Über affine Geometrie IV: Differentialinvarianten der Flächen gegenüber affinen Transformationen. Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) 69 (1917), S. 107—136.

²⁾ W. Blaschke, a) Über affine Geometrie V: Kennzeichnende Eigenschaften des Ellipsoids. Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) 69 (1917), S. 166—206; b) Über affine Geometrie XII: Von den Eiflächen. Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) 70 (1918), S. 13—37.

³⁾ J. Radon, Über affine Geometrie XVI: Die Grundgleichungen der affinen Flächentheorie. Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) 70 (1918), S. 91—107.

⁴⁾ Daß dabei die Betrachtung auf solche Hyperflächen beschränkt bleibt, deren sämtliche metrische Hauptkrümmungsradien endlich und von Null verschieden sind, liegt in der Natur des Gegenstandes begründet, wofern man mit absolut-invarianten Differentialformen arbeiten will.

⁵⁾ W. Blaschke, a. a. O.^{2 a)}, S. 176 ff.

⁶⁾ W. Blaschke, ebenda, S. 182 ff., J. Radon, a. a. O., S. 100.

⁷⁾ Vgl. namentlich: G. Fubini, Fondamenti di geometria proiettivo-differenziale. Rend. Circ. mat. Palermo 43 (1919) 1—46, wo man in der Einleitung die weiteren in Betracht kommenden Arbeiten desselben Autors zitiert findet.

Ersetzt man in den beiden affinen Grundformen (I), (II) der vorliegenden Arbeit, und in ihrer Simultaninvariante I [I, Nr. 3, Gl. (b)] alle $(n+1)$ -reihigen Determinanten $(x_{rs} \ x_1 \ x_2 \dots x_n)$, $(x_{rst} \ x_1 \ x_2 \dots x_n)$ entsprechend durch $(n+2)$ -reihige $(\bar{x} \ \bar{x}_1 \ \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n \ \bar{x}_{rs})$, $(\bar{x} \ \bar{x}_1 \ \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n \ \bar{x}_{rst})$, indem man unter $\bar{x}$ die Zusammenfassung von $n+2$ homogenen Punktkoordinaten $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ versteht, so gehen (I), (II) in zwei neue Differentialformen $(\bar{I}), (\bar{II})$ und I in eine Funktion $\bar{I}$ der Parameter auf der Hyperfläche über. Unter der Voraussetzung $\bar{I} \neq C$ sind dann die beiden Differentialformen:

$$a) \quad \varphi_2 = \bar{I} \cdot (\bar{I}), \quad \varphi_3 = 2 \bar{I} \cdot (\bar{II})$$

von der Wahl der Parameter unabhängig und projektiv-invariant⁸⁾. Sie bilden genau das „projektive Linienelement“ der Hyperfläche im Sinne des Herrn G. Fubini⁹⁾. Man zeigt das am einfachsten durch Einführung normierter projektiver Koordinaten η vermöge der Substitution

$$b) \quad \eta = \bar{x} \sqrt{\bar{I}},$$

wodurch φ_2 und φ_3 die Gestalt

$$\varphi_2 = \frac{(\eta \ \eta_1 \ \eta_2 \dots \eta_n \ \eta_{rs}) \, du^r \, du^s}{\sqrt{\varepsilon \nabla}},$$

c).

$$\varphi_3 = \frac{2 (\eta \ \eta_1 \ \eta_2 \dots \eta_n \ \eta_{rst}) \, du^r \, du^s \, du^t}{\sqrt{\varepsilon \nabla}}$$

($\varepsilon^2 = 1$, ∇ Diskriminante von φ_2) annehmen, in der sie bei Fubini auftreten⁹⁾.

I. Die affine Differentialgeometrie der Hyperflächen im Euklidischen R_{n+1} als Theorie zweier simultanen Differentialformen.

1. Vorbemerkung.

Wir legen der folgenden Betrachtung einen Euklidischen R_{n+1} ($n > 1$) zu Grunde, den wir uns auf ein System von (zunächst rechtwinkligen)¹⁰⁾ Parallelkoordinaten $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ bezogen de

⁸⁾ Für $n=2$ hat schon Herr G. Pick diese Bemerkung gemacht. (Jhr. Dtsch. Math.-Ver. 28 (1919), II. Abt., S. 56 f.)

Ebenso sind die Differentialformen $\Phi_2 = I \cdot (I)$, $\Phi_3 = I \cdot (I \cdot I)$ gegenüber beliebigen Affinitäten des R_{n+1} invariant. Zur vollständigen Bestimmung der Hyperfläche (mit $I \neq 0$) bis auf eine allgemeine Affinität des R_{n+1} muß man noch eine dritte lineare Differentialform (etwa $d \log I$) hinzunehmen.

Über die Einordnung der affinen Differentialgeometrie der Flächen in projektive Differentialgeometrie vgl. G. Fubini, *Invarianti affini-differenziali una superficie*. Rend. Acc. Lincei (5) 29^I (1920) 87—89.

⁹⁾ Vgl. G. Fubini, a. a. O. ⁷⁾, S. 8, 13.

¹⁰⁾ Der rein affine Teil des Folgenden ist von dieser besonderen Annahme natürlich unabhängig.

ken. Den Vektor mit den Koordinaten $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ nennen wir $\mathfrak{x}$. $\mathfrak{x} \mathfrak{y}$ bezeichnet, wie üblich, das skalare Produkt der Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, $(\mathfrak{x} \mathfrak{y} \dots \mathfrak{q})$ die $(n+1)$ -reihige Determinante $|x_1 y_2 \dots q_{n+1}|$. Aus dem R_{n+1} werde durch die Gleichungen

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (1)$$

ein reguläres Stück einer M_n — einer Hyperfläche, wie wir sagen wollen — herausgehoben¹¹⁾. Wie wir sehen werden, ist dieser Hyperfläche in unserer Theorie durch eine quadratische Differentialform — die erste affine Grundform (Nr. 2) —

$$d\sigma^2 = g_{rs} du^r du^s \quad (2)$$

eine Riemannsche Maßbestimmung aufgeprägt. Es erweist sich daher als zweckmäßig, von kovarianten Differentiationen in bezug auf diese Grundform Gebrauch zu machen. Wir bezeichnen mit:

$$\begin{aligned} \delta_r &= \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial u^r}, & \delta_{rs} &= \frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial u^r \partial u^s} - \left\{ \begin{matrix} r & s \\ p \end{matrix} \right\} \delta_p, \\ \delta_{rst} &= \frac{\partial^3 \mathfrak{z}}{\partial u^r \partial u^s \partial u^t} - \left\{ \begin{matrix} r & t \\ p \end{matrix} \right\} \delta_{ps} - \left\{ \begin{matrix} s & t \\ p \end{matrix} \right\} \delta_{rp} \end{aligned} \quad (3)$$

die ersten (zweiten, dritten) kovarianten Ableitungen des Vektors $\mathfrak{z}$ des R_{n+1} in bezug auf die Form (2). Bei Tensoren auf der Hyperfläche (1) trennen wir zur Erhöhung der Deutlichkeit die Differentiationszeiger durch einen Strich von den übrigen ab, z. B.:

$$a_{rs|t} = \frac{\partial a_{rs}}{\partial u^t} - \left\{ \begin{matrix} r & t \\ p \end{matrix} \right\} a_{ps} - \left\{ \begin{matrix} s & t \\ p \end{matrix} \right\} a_{rp}. \quad (4)$$

Wir erinnern ferner an die bekannten Formeln des absoluten Differentialkalküls¹²⁾

$$\left. \begin{aligned} g^{rs} g_{rs} &= n; & \sum_r g^{rs} g_{rt} &= \delta_t^s, & (\delta_t^s &= 0 \ (s \neq t), \ \delta_t^t = 1), \\ g_{rs|t} &= 0; & g^r_{s|t} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\mathfrak{x}_{rst} - \mathfrak{x}_{rts} = -R_{rst}^p \mathfrak{x}_p = -g^{pq} R_{pqst} \mathfrak{x}_p, \quad (6)$$

¹¹⁾ Wir setzen die Funktionen $x_i(u_1, u_2, \dots, u_n)$, ($i = 1, 2, \dots, n+1$) etwa als analytische Funktionen mit gemeinsamem Existenzbereich voraus, u. zw. mit Ausnahme von Nr. 8 als reelle analytische Funktionen.

¹²⁾ Nach A. Einstein unterdrücken wir die Summenzeichen: es ist nach jedem Zeiger, der doppelt auftritt, von 1 bis n zu summieren, ausgenommen bei δ_r^r, δ_{rr} . Wir schreiben ferner folgerichtig du^r, du^s , um den kontravarianten Charakter dieser Differentiale auszudrücken.

¹³⁾ Vgl. z. B. G. Ricci und T. Levi-Civita, Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. Math. Ann. 54 (1901), S. 125–201, insbes. S. 142 f.

wo $R_{r q s t} = (r q s t)$ und $R_{r s t}^p = \{r p s t\}$ die Vierzeigersymbole erster und zweiter Art für die Form (2) bedeuten:

$$\left. \begin{aligned} R_{r s t}^p &= \frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} r s \\ p \end{smallmatrix} \right\}}{\partial u^t} - \frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} r t \\ p \end{smallmatrix} \right\}}{\partial u^s} + \left\{ \begin{smallmatrix} r s \\ q \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} q t \\ p \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} r t \\ q \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} q s \\ p \end{smallmatrix} \right\}, \\ R_{r q s t} &= \frac{\partial \left[\begin{smallmatrix} r s \\ q \end{smallmatrix} \right]}{\partial u^t} - \frac{\partial \left[\begin{smallmatrix} r t \\ q \end{smallmatrix} \right]}{\partial u^s} + g^{lm} \left(\left[\begin{smallmatrix} r t \\ l \end{smallmatrix} \right] \left[\begin{smallmatrix} q s \\ m \end{smallmatrix} \right] - \left[\begin{smallmatrix} r s \\ l \end{smallmatrix} \right] \left[\begin{smallmatrix} q t \\ m \end{smallmatrix} \right] \right). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$\left[\begin{smallmatrix} r s \\ q \end{smallmatrix} \right]$ und $\left\{ \begin{smallmatrix} r s \\ q \end{smallmatrix} \right\}$ sind darin die Christoffelschen Dreizeigersymbole erster und zweiter Art für die Grundform (2).

Endlich tritt in unseren Gleichungen auch noch der einmal und der zweimal verjüngte Krümmungstensor dieser Grundform auf:

$$\left. \begin{aligned} R_{rs} &= R_{sr} = \frac{1}{n-1} R_{r q s t} g^{qt}, \\ R &= \frac{1}{n(n-1)} R_{r q s t} g^{qt} g^{rs} = \frac{1}{n} R_{rs} g^{rs}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

2. Die erste Grundform.

Um die erste Grundform (2) der inhaltstreuen Affinitäten für die Hyperfläche (1) wirklich aufzustellen, gehen wir von ihren beiden metrischen Grundformen aus:

$$d\mathfrak{E}^2 = c_{ik} du^i du^k; \quad \frac{(\bar{d}^2 \mathfrak{E} \mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_2 \dots \mathfrak{E}_n)}{\sqrt{c}} = \Lambda_{ik} du^i du^k. \quad (9)$$

Hierin bedeutet c die Determinante der c_{ik} , die auch dort, wo wir ausnahmsweise das komplexe Gebiet betrachten (Nr. 8), als von Null verschieden vorausgesetzt werden soll. Im reellen Gebiet soll ferner $\sqrt{c}$ die positive Quadratwurzel aus c sein. Weiter nehmen wir an, daß die Determinante Λ der Λ_{ik} von Null verschieden ist, daß also auf unserer Hyperfläche das reziproke Produkt der n (metrischen) Hauptkrümmungsradien oder das Kroneckersche Krümmungsmaß

$$\frac{1}{R_1 R_2 \dots R_n} = \frac{\Lambda}{c} \quad (10)$$

nirgends verschwindet. Um es auch noch in projektiver Form auszudrücken: auf der Hyperfläche soll in jedem Punkte der Kegel der Asymptoten nur gewöhnliche (einfache) Erzeugende besitzen.

Zur Abkürzung setzen wir einen Augenblick:

$$(x_{rs} x_1 x_2 \dots x_n) = l_{(rs)}, \quad (11')$$

und verstehen unter l die Determinante der $l_{(rs)}$. Dann ist:

$$l_{(rs)} = \Lambda_{rs} \sqrt{c}; \quad l = \Lambda (\sqrt{c})^n. \quad (11)$$

Nun bilden die Λ_{rs} einen kovarianten Tensor zweiter Stufe, und ebenso die c_{rs} . $\sqrt{c}$ multipliziert sich daher bei Parametertransformation mit der Transformationsdeterminante, Λ mit ihrem Quadrat. Somit erhält $l_{(rs)}$ bei Transformation der Parameter die erste Potenz der Transformationsdeterminante als Faktor, l die $(n+2)^{\text{te}}$ Potenz.

Die Quotienten $\frac{l_{(ik)}}{\sqrt{l}}$ bilden also wieder einen kovarianten Tensor zweiter Stufe, der offenbar auch bei inhaltstreuen Affinitäten des R_{n+1} ungeändert bleibt. Um in jedem Falle, unabhängig vom Vorzeichen der Determinante l eine reelle Differentialform zu erhalten, modifizieren wir diesen Tensor noch ein wenig. Wir verstehen unter ε im Falle eines ungeraden n immer die positive Einheit, im Falle eines geraden n aber die Zahl $+1$ oder -1 , je nachdem l positiv oder negativ ist, und nehmen als erste affine Grundform¹⁴⁾ die folgende:

$$\left. \begin{aligned} d\sigma^2 &= g_{rs} du^r du^s = \frac{l_{(rs)} du^r du^s}{\sqrt{\varepsilon l}} = \frac{(d^2 x_1 x_2 \dots x_n)}{\sqrt{\varepsilon l}} = \\ &= \frac{\Lambda_{rs} du^r du^s}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{R_1 R_2 \dots R_n}}} \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Dabei sollen hier und weiterhin im Falle eines geraden n die auftretenden Wurzeln positiv gezogen werden. Die Differentialform (I) bleibt dann für ungerades n bei Parametertransformationen ungeändert. Für gerades n ist sie gegenüber Parametertransformationen mit positiver Transformationsdeterminante invariant, bei solchen mit negativer Determinante wechselt sie das Zeichen.

Die Determinante g der g_{ik} hat den Wert $\varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 l^2}$, so daß wir $\sqrt{\varepsilon g}$ durch

$$\sqrt{\varepsilon g} = \sqrt{\varepsilon l} = \sqrt{c} \sqrt{\frac{\varepsilon}{R_1 R_2 \dots R_n}} = \sqrt{c} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon \Lambda}{c}} \quad (12)$$

erklären können.

¹⁴⁾ Wir sagen kurz „affine Grundform“ für „inhaltstreu-affine Grundform“.

3. Die zweite Grundform.

Da die $\mathfrak{x}_{rst} = \mathfrak{x}_{rst}$ einen kovarianten Tensor dritter Stufe bilden, und die Differenz $\mathfrak{x}_{rst} - \mathfrak{x}_{rts}$ sich nach (6) linear und homogen durch die $\mathfrak{x}_i$ ausdrückt, so sind in der Determinante $(\mathfrak{x}_{rst} \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \dots \mathfrak{x}_n)$ die drei Zeiger r, s, t bei $\mathfrak{x}_{rst}$ vertauschbar, und die Differentialform dritten Grades $(\mathfrak{x}_{rst} \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \dots \mathfrak{x}_n) du^r du^s du^t$ multipliziert sich bei Parametertransformation nur mit der Transformationsdeterminante. Die Differentialform $\frac{(\mathfrak{x}_{rst} \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \dots \mathfrak{x}_n) du^r du^s du^t}{\sqrt{\varepsilon g}}$

verhält sich daher bei Parametertransformation ebenso wie die erste affine Grundform. Bei inhaltstreuen Affinitäten des R_{n+1} bleibt sie ungeändert, wie aus ihrer Bildungsweise unmittelbar folgt. Wir wählen sie als zweite affine Grundform der Hyperfläche:

$$\left. \begin{aligned} a_{rst} du^r du^s du^t &= \frac{(\mathfrak{x}_{rst} \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \dots \mathfrak{x}_n) du^r du^s du^t}{\sqrt{\varepsilon g}} = \\ &= \frac{(d^3 \mathfrak{x} \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \dots \mathfrak{x}_n)}{\sqrt{\varepsilon g}} - \frac{3}{2} d(g_{rs} du^r du^s), \end{aligned} \right\} \quad (\text{II})$$

($a_{rst} = a_{rts} = \text{usw.}$)

Der letzte Ausdruck in (II), in dem der Buchstabe d gewöhnliche Differentiale bezeichnet, geht aus dem mittleren durch eine einfache Umrechnung hervor.

Die zweite affine Grundform ist zur ersten apolar, d. h. es bestehen die n Identitäten:

$$a_{rst} g^{rs} = 0, \quad (t = 1, 2, \dots, n).^{15)} \quad (\alpha)$$

¹⁵⁾ Zum Nachweise der Apolarität drückt man etwa zunächst die Koeffizienten der Grundform (II) durch die der beiden metrischen Grundformen (9) aus. Wir bezeichnen mit $\left\{ \begin{smallmatrix} rs \\ t \end{smallmatrix} \right\}^{[c]}$ die Christoffelschen Dreizeigersymbole zweiter Art, mit $\Lambda_{rs}^{[c]}{}_t$ die kovarianten Ableitungen der Koeffizienten Λ_{rs} der zweiten metrischen Grundform in bezug auf die erste $c_{rs} du^r du^s$, mit $\mathfrak{g}^{rs}$ das durch die Determinante Λ der Λ_{rs} dividierte algebraische Komplement von Λ_{rs} in Λ , mit $\mathfrak{n}$ den Einheitsvektor der Normalen unserer Hyperfläche. Dann gelten die Gleichungen:

$$\left\{ \begin{aligned} \left\{ \begin{smallmatrix} is \\ i \end{smallmatrix} \right\}^{[c]} &= \frac{\partial \log \sqrt{c}}{\partial u^s}; \quad \mathfrak{g}^{rs} \Lambda_{rs} = n, \quad \sum_{r=1}^n \mathfrak{g}^{rs} \Lambda_{rt} = \delta_t^s (\delta_t^s = 0, (s \neq t); \delta_t^t = 1); \\ &(\mathfrak{n} \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \dots \mathfrak{x}_n) = \sqrt{c}; \end{aligned} \right\} \quad (\alpha)$$

$$\frac{\partial \Lambda_{rs}}{\partial u^t} = \Lambda_{rs}^{[c]}{}_t + \left\{ \begin{smallmatrix} rt \\ p \end{smallmatrix} \right\}^{[c]} \Lambda_{ps} + \left\{ \begin{smallmatrix} st \\ p \end{smallmatrix} \right\}^{[c]} \Lambda_{rp}, \quad (\beta)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^r \partial u^s} &= \left\{ \begin{smallmatrix} rs \\ q \end{smallmatrix} \right\}^{[c]} \mathfrak{x}_q + \Lambda_{rs} \cdot \mathfrak{n}, \\ \frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial u^r} &= -\Lambda_{rp} c^{pq} \mathfrak{x}_q. \end{aligned} \right. \quad (\gamma)$$

Wenn die zweite affine Grundform nicht im betrachteten Punkte γ identisch verschwindet, so gibt sie, gleich Null gesetzt, den (einzigen) Kegel, der dort gleichzeitig

Nach der Regel für die Differentiation einer Determinante hat man ferner, bei Benützung von (α) und (β), wenn ε die in Nr. 2 des Textes festgesetzte Bedeutung hat:

$$\frac{\partial \log \varepsilon \Lambda}{\partial u^t} = \frac{\partial \log \Lambda}{\partial u^t} = \partial^{rs} \frac{\partial \Lambda_{rs}}{\partial u^t} = \partial^{rs} \Lambda_{rs|t}^{[c]} + \left\{ \begin{matrix} rt \\ r \end{matrix} \right\}^{[c]} + \left\{ \begin{matrix} st \\ s \end{matrix} \right\}^{[c]},$$

oder, wenn man abermals (α) heranzieht:

$$\frac{\partial \log \left(\varepsilon \frac{\Lambda}{c} \right)}{\partial u^t} = \partial^{rs} \Lambda_{rs|t}^{[c]}. \quad (\delta)$$

Der letzte Ausdruck in (II) ergibt jetzt nach einiger Rechnung:

$$\left. \begin{aligned} a_{rst} du^r du^s du^t = & - \frac{1}{n+2} \left\{ \Lambda_{rs|t}^{[c]} du^r du^s du^t - \right. \\ & \left. 2 \cdot \sqrt{\varepsilon \frac{\Lambda}{c}} \right. \\ & \left. - \frac{3}{n+2} du^r du^s d \log \left(\varepsilon \frac{\Lambda}{c} \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II}^*)$$

also:

$$\left. \begin{aligned} a_{rst} = & - \frac{1}{n+2} \left\{ \Lambda_{rs|t}^{[c]} - \frac{1}{n+2} \left(\frac{\partial \log \left(\varepsilon \frac{\Lambda}{c} \right)}{\partial u^t} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial \log \left(\varepsilon \frac{\Lambda}{c} \right)}{\partial u^s} + \Lambda_{st} \frac{\partial \log \left(\varepsilon \frac{\Lambda}{c} \right)}{\partial u^r} \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (\varepsilon)$$

Hier ergibt sich die Symmetrie der a_{rst} in bezug auf alle drei Zeiger aus den verallgemeinerten Mainardi-Codazzischen Gleichungen:

$$\Lambda_{rs|t}^{[c]} = \Lambda_{rt|s}^{[c]}.$$

Endlich hat man aus (10) und dem letzten Ausdruck (I):

$$g^{rs} = \sqrt{\varepsilon \frac{\Lambda}{c}} \cdot \partial^{rs}.$$

Aus (ε) folgt jetzt leicht, wegen (α) und (δ):

$$g^{rs} a_{rst} = - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \log \left(\varepsilon \frac{\Lambda}{c} \right)}{\partial u^t} - \frac{\partial \log \left(\varepsilon \frac{\Lambda}{c} \right)}{\partial u^t} \right\} = 0, \text{ w. z. b. w.}$$

Eine ähnliche Rechnung hat bereits Herr G. Fubini durchgeführt, um die Apolarität der beiden ersten projektiven Grundformen nachzuweisen (a. a. O.), S. 6, 7, 10).

1. den Schnitt der gegebenen Hyperfläche mit einer in $\mathfrak{x}$ oskulierenden Hyperfläche zweiter Ordnung berührt, und
2. zum Asymptotenkegel des Punktes $\mathfrak{x}$ apolar ist¹⁶⁾.

Für uns kommt noch die folgende absolute Simultaninvariante der beiden affinen Grundformen in Betracht:

$$I = -\frac{1}{n(n-1)} a_{ikl} a_{rst} g^{ir} g^{ks} g^{lt}. \quad (b)$$

4. Der Affinnormalvektor.

Um die Metrik auf der Hyperfläche, die durch die erste affine Grundform bestimmt ist, auf inhaltstreu-affin invariante Weise mit dem umgebenden R_{n+1} in Verbindung zu setzen, führen wir den Affinnormalvektor $\mathfrak{x}^*$ im Punkte $\mathfrak{x}$ der Hyperfläche ein vermöge:

$$\mathfrak{x}^* = \frac{1}{n} \Delta_{\mathfrak{x}} \mathfrak{x} = \frac{1}{n} \bar{g}^{rs} \mathfrak{x}_{rs}. \quad (c)$$

Die Gerade, auf welcher der im Punkte $\mathfrak{x}$ angebrachte Affinnormalvektor $\mathfrak{x}^*$ liegt, nennen wir die Affinnormale der Hyperfläche im Punkte $\mathfrak{x}$.

Aus (c) folgt wegen (5), (11), (I), (12):

$$(\mathfrak{x}^* \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \dots \mathfrak{x}_n) = \sqrt{\varepsilon} g. \quad (d)$$

$\mathfrak{x}^*, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \dots, \mathfrak{x}_n$ bilden also ein System von $n+1$ linear unabhängigen Vektoren im R_{n+1} . Durch kovariante Differentiation ergibt sich aus (c) bei Berücksichtigung von (5):

$$\mathfrak{x}_i^* = \frac{1}{n} g^{rs} \mathfrak{x}_{rst}, \quad (13)$$

und hieraus, wegen (II) und (b):

$$(\mathfrak{x}_i^* \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \dots \mathfrak{x}_n) = 0. \quad (14)$$

Der Vektor $\mathfrak{x}_i^*$ ist somit parallel zur Tangentenebene unserer Hyperfläche im betrachteten Punkte.

5. Die Grundgleichungen.

Die Vektoren $\mathfrak{x}_{rs}$ des R_{n+1} lassen sich durch die $n+1$ linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{x}^*, \mathfrak{x}_t$ linear ausdrücken:

$$\mathfrak{x}_{rs} = A_{rsp} g^{pq} \mathfrak{x}_q + B_{rs} \mathfrak{x}^*. \quad (15)$$

¹⁶⁾ Vgl. G. Fubini, Il problema della deformazione proiettiva delle iper superficie. Le varietà a un qualsiasi numero di dimensioni. Rend. Acc. Lincei (5) 27 II (1918) 147–155, insb. S. 151, sowie Nr. 13 dieser Arbeit.

¹⁷⁾ Für $n=2$ geht diese Invariante in die gleichbezeichnete des Herrn J. Radon (a. a. O., S. 93) über.

Für die Koeffizienten B_{rs} folgt aus (15) und (d):

$$B_{rs} = \frac{(\mathfrak{x}_{rs} \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \dots \mathfrak{x}_n)}{(\mathfrak{x}^* \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \dots \mathfrak{x}_n)} = g_{rs}. \quad (16)$$

Um die Koeffizienten A_{rsp} zu berechnen, differenzieren wir (15) kovariant nach dem Zeiger t und erhalten bei Benützung von (5), (15) und (16):

$$\mathfrak{x}_{rst} = (A_{rsp|t} + A_{rsl} A_{mtp} g^{lm}) g^{pq} \mathfrak{x}_q + g_{rs} \mathfrak{x}^t + A_{rst} \mathfrak{x}^*, \quad (17)$$

also wegen (14) und (d):

$$A_{rst} = \frac{(\mathfrak{x}_{rst} \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \dots \mathfrak{x}_n)}{(\mathfrak{x}^* \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \dots \mathfrak{x}_n)} = a_{rst}. \quad (18)$$

Man erhält somit aus (15) das erste System von Grundgleichungen:

$$\mathfrak{x}_{rs} = a_{rsp} g^{pq} \mathfrak{x}_q + g_{rs} \mathfrak{x}^*, \quad (r, s = 1, 2, \dots, n). \quad (A)$$

Es besteht aus $\frac{n(n+1)}{2}$ Gleichungen.

Aus (A), (c) und (d) ergeben sich für die Koeffizienten der kubischen Grundform die Ausdrücke:

$$a_{rst} = \frac{1}{n} \frac{\sum_{q=1}^n g_{qt} g^{qk} (\mathfrak{x}_{rk} \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \dots \mathfrak{x}_{q-1} \mathfrak{x}_{q+1} \dots \mathfrak{x}_n)}{\sqrt{\varepsilon g}}, \quad (\text{II } a)$$

zu deren Berechnung man nur zweite Ableitungen zu bilden braucht¹⁸⁾.

Das zweite System von Grundgleichungen drückt die Vektoren $\mathfrak{x}_r^*$ des R_n linear durch die Vektoren $\mathfrak{x}_t$ aus. Es besteht aus n Gleichungen:

$$\mathfrak{x}_r^* = a_{rs} g^{st} \mathfrak{x}_t \quad (r = 1, 2, \dots, n). \quad (B)$$

Wegen (14) tritt hier kein Glied mit $\mathfrak{x}^*$ auf. Die Werte der Koeffizienten a_{rs} werden sich uns bei Bildung der Integrabilitätsbedingungen ergeben.

6. Die Integrabilitätsbedingungen.

Setzt man in (17) für $\mathfrak{x}_t^*$ die Werte (B) ein, bildet dann die Differenz $\mathfrak{x}_{rst} - \mathfrak{x}_{rts}$ und berücksichtigt (6), so erhält man nach Herunterziehen eines Zeigers als erste Reihe von Integrabilitätsbedingungen die $\frac{n^2(n^2-1)}{3}$ Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} & a_{rsp|t} - a_{rtp|s} + (a_{irs} a_{mtp} - a_{irt} a_{msp}) g^{lm} + \\ & + a_{tp} g_{rs} - a_{sp} g_{rt} + R_{rpst} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (e')$$

¹⁸⁾ Die entsprechende Bemerkung für die zweite projektive Grundform bei G. Fubini, a. a. O. ⁷⁾, S. 8.

Die zweite Reihe von Integrabilitätsbedingungen $\mathfrak{L}_{tr}^* - \mathfrak{L}_{rt}^* = 0$ reduziert sich mit Hilfe von (A) auf die $\frac{n^2(n-1)}{2}$ Gleichungen:

$$\alpha_{qp|r} - \alpha_{rp|q} + (\alpha_{ql} a_{mrp} - \alpha_{rl} a_{mqp}) g^{lm} = 0, \quad (f')$$

und auf die Symmetriebedingungen für die α_{pq} :

$$\alpha_{pq} = \alpha_{qp}. \quad (f'')$$

Aus (e') kann man jetzt die α_{pq} berechnen. Durch Multiplikation von (e') mit g^{rt} und Summation über r und t kommt nach leichter Änderung der Bezeichnung:

$$\alpha_{pq} = \frac{1}{n-1} \left\{ a_{pqr|t} g^{rt} + a_{r|t} a_{qtm} g^{rt} g^{lm} \right\} - R_{pq}. \quad (19')$$

Durch Verjüngung folgt hieraus wegen (8), (a) und (b):

$$\frac{1}{n} \alpha_{pq} g^{pq} = -(I + R). \quad (20)$$

Hier steht links die durch n dividierte Summe der Koeffizienten, die auf der rechten Seite der Grundgleichungen (B) in der Hauptdiagonale (links oben $\rightarrow$ recht unten) auftreten. Die geometrische Bedeutung dieser Invariante wird in Nr. 12 erörtert werden.

Mittels (20) läßt sich für α_{pq} noch ein einfacherer Ausdruck angeben als (19'). Vertauschung von r und p in (e') und Addition der erhaltenen Gleichungen zu (e') gibt wegen $R_{rpst} + R_{prst} = 0$

$$2(a_{rsp|t} - a_{rtp|s}) + \alpha_{tp} g_{rs} - \alpha_{sp} g_{rt} + \alpha_{tr} g_{ps} - \alpha_{sr} g_{pt} = 0. \quad (21)$$

Multipliziert man (21) mit g^{rs} und summiert über r und s , so erhält man wegen (c) und (20) nach leichter Änderung der Bezeichnung

$$\alpha_{pq} = -(I + R) g_{pq} + \frac{2}{n} a_{pqr|s} g^{rs}. \quad (19)$$

Hieraus folgt für die Koeffizienten der Grundgleichungen (B):

$$\alpha_{pq} g^{qt} = -(I + R) \delta_p^t + \frac{2}{n} a_{pqr|s} g^{rs} g^{qt}. \quad (22)$$

Führen wir endlich die Werte (19) der α_{pq} in (e'), (f') ein so erhalten die Integrabilitätsbedingungen der Grundgleichungen (A), (B) die Gestalt:

$$\left. \begin{aligned} & a_{rsp|t} - a_{rtp|s} + \frac{2}{n} (g_{rs} a_{tp|lm} - g_{rt} a_{sp|lm}) g^{lm} + \\ & + (a_{lrs} a_{mtp} - a_{lrt} a_{msp}) g^{lm} + (I + R) (g_{sp} g_{rt} - g_{tp} g_{rs}) + \\ & + R_{rpst} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

$$(I+R)_q g_{pr} - (I+R)_r g_{pq} + \frac{2}{n} \left\{ a_{pqs|tr} - a_{prs|tq} + \right. \\ \left. + (a_{mrp} a_{qls|t} - a_{pql} a_{mrs|t}) g^{lm} \right\} g^{st} = 0. \quad (f)$$

[Zusatz bei der Korrektur.] Wie ich nachträglich bemerke, sind die Integrabilitätsbedingungen (f) für $n > 2$ eine Folge der Integrabilitätsbedingungen (e).

7. Bestimmung einer Hyperfläche durch die beiden Grundformen bis auf inhaltstreue Affinitäten.

Sind zwei Differentialformen $g_{rs} du^r du^s$ und $a_{rst} du^r du^s du^t$ ($g_{rs} = g_{sr}$; $a_{rst} = a_{rts} = \dots$ usw.) den Bedingungen (a), (e), (f) gemäß vorgegeben und ist die Diskriminante g der ersten Form von Null verschieden, so existiert stets eine bis auf inhaltstreue Affinitäten des R_{n+1} eindeutig bestimmte Hyperfläche, welche diese Differentialformen als Grundformen im Sinne von Nr. 2 und Nr. 3 besitzt.

Der Beweis dieses Satzes ist im wesentlichen nur eine der veränderten Dimensionenzahl angepaßte Wiederholung des Beweises, den Herr J. Radon für $n=2$ gegeben hat. Wir dürfen uns daher hier mit einem Hinweise auf die Abhandlung Radons begnügen¹⁹⁾.

8. Identisches Verschwinden der zweiten Grundform.

Bisher haben wir uns ausschließlich auf das reelle Gebiet beschränkt. Für die unmittelbar folgenden Ausführungen erweist es sich als bequem, diese Beschränkung aufzuheben, also komplexe Hyperflächen und komplexe inhaltstreue Affinitäten zuzulassen. Man wird dann an Stelle der Grundform (I) zweckmäßig die bei Parametertransformationen vollkommen invariante Differentialform:

$$g_{rs} du^r du^s = \frac{l_{(rs)} du^r du^s}{\sqrt[n+2]{l}} = \frac{\Lambda_{rs} du^r du^s}{\sqrt[n+2]{\frac{\Lambda}{c}}} \quad (23)$$

als erste affine Grundform wählen, was darauf herauskommt, durchwegs $\varepsilon=1$ zu setzen. Im übrigen bleibt alles unverändert. Insbesondere ist auch jetzt durch Angabe der beiden Grundformen gemäß dem Satze von Nr. 7 eine Hyperfläche bis auf (komplexe) inhaltstreue Affinitäten eindeutig bestimmt.

Nach dieser Vorbemerkung beweisen wir zunächst den Satz:

Für jede Hyperfläche zweiter Ordnung, deren Kroneckersches Krümmungsmaß nicht Null ist, hat

¹⁹⁾ J. Radon, a. a. O.³⁾, S. 99 f.

die erste affine Grundform konstantes Riemannsches Krümmungsmaß und die zweite verschwindet identisch.

Ist nämlich erstens der Mittelpunkt der Hyperfläche uneigentlich, so lassen sich ihre Gleichungen durch eine inhaltstreue Affinität des R_{n+1} und eventuelle Parametertransformation auf die Form:

$$x_p = u_p, (p = 1, 2, \dots, n); x_{n+1} = \frac{1}{2} a \cdot \delta_{rs} u_r u_s; \quad (24)$$

$$(a \neq 0; \delta_{rs} = 0 \ (r \neq s); \delta_{rr} = 1; r, s = 1, 2, \dots, n),$$

bringen, so daß sich die erste affine Grundform auf:

$$d\sigma^2 = \delta_{rs} du^r du^s \quad (25)$$

reduziert, also das Krümmungsmaß Null hat. Für die Koeffizienten der zweiten affinen Grundform erhält man aus (24) den Wert Null.

Zweitens sei der Mittelpunkt der Hyperfläche eigentlich. Dann läßt sich diese durch eine (komplexe) inhaltstreue Affinität des R_{n+1} in eine Hypersphäre überführen. Nun aber ist für eine Hypersphäre die zweite metrische Grundform $\Lambda_{rs} du^r du^s$ proportional zur ersten $c_{rs} du^r du^s$, und zwar, wenn r der Halbmesser der Hypersphäre ist:

$$\Lambda_{rs} du^r du^s = \frac{1}{r} \cdot c_{rs} du^r du^s, \quad (26)$$

also $\Lambda = \frac{1}{r^n} \cdot c$. Nach Nr. 2 und (26) wird die erste affine Grundform der Hypersphäre:

$$g_{rs} du^r du^s = \frac{c_{rs} du^r du^s}{\frac{n+2}{n+1} \sqrt{r^2}} \quad (27)$$

Sie unterscheidet sich somit von der ersten metrischen Grundform nur um einen konstanten Faktor. Daher ist ihr Riemannsches Krümmungsmaß konstant und von Null verschieden:

$$K_o = \sqrt{\frac{n+2}{\left(\frac{1}{r^2}\right)^{n+1}}} \quad (28)$$

Zum Beweise der zweiten Hälfte unseres Satzes benützen wir diesem Falle die Gestalt $(II^*)^{15)}$ der zweiten affinen Grundform. Nach (26) ist bei der betrachteten Hypersphäre:

$$\Lambda_{rs|t}^{[c]} = \frac{1}{r} \cdot c_{rs|t}^{[c]} = 0, \quad d \log \frac{\Lambda}{c} = d \log \left(\frac{1}{r^n} \right) = 0.$$

Also verschwindet die zweite Grundform in der Tat identisch.

Der soeben bewiesene Satz ist umkehrbar:

Verschwindet für eine Hyperfläche die zweite affine Grundform identisch, so hat die erste Grundform konstantes Riemannsches Krümmungsmaß und die Hyperfläche ist eine Hyperfläche zweiter Ordnung²⁰⁾.

In der Tat! Sind alle a_{rst} , also auch I Null, so gibt (f):

$$R_r g_{pq} - R_q g_{pr} = 0. \quad (29)$$

Multiplikation mit g^{pq} und Summation über p und q liefert $R_r = 0$ oder $R = \text{const.}$ Weiter gibt jetzt (e):

$$R_{rpst} = R(g_{ip}g_{rs} - g_{sp}g_{rt}), \quad (30)$$

d. h. die erste affine Grundform $g_{rs} du^r du^s$ hat das konstante Riemannsche Krümmungsmaß R ²¹⁾.

Nun lassen sich zwei n -äre quadratische Differentialformen von nicht verschwindender Diskriminante und demselben konstanten Krümmungsmaß stets (komplex) ineinander transformieren. Die Hyperfläche hat demnach nach geeigneter Transformation der Parameter dieselben affinen Grundformen wie eine Hyperfläche zweiter Ordnung mit eigentlichem ($R \neq 0$) oder uneigentlichem ($R = 0$) Mittelpunkt, und ist somit durch eine inhaltstreue Affinität des R_{n+1} in eine solche überführbar. Sie ist also selbst von zweiter Ordnung.

9. Formeln für Hyperebenenkoordinaten²²⁾.

Die Tangentenhyperebene einer Hyperfläche sei (in vektorieller Schreibweise):

$$\alpha \xi = w. \quad (g)$$

Wir normieren die Koordinaten der Hyperebene, d. h. die Komponenten des Vektors α und w durch die Festsetzung:

$$\alpha \xi^* = 1. \quad (h)$$

Dann berechnen sich die Komponenten von α aus (h) und:

$$\alpha \xi_r = 0, \quad (i)$$

da die Determinante $(\xi^* \xi_1 \xi_2 \dots \xi_n)$ dieses Gleichungssystems nach (d) nicht Null ist. Kovariante Differentiation von (h) und (i) ergibt bei Berücksichtigung der Grundgleichungen (A) und (B):

$$\alpha_r \xi_s = -g_{rs}, \quad \alpha_r \xi^* = 0. \quad (31)$$

²⁰⁾ Für $n = 2$ hat zuerst Herr G. Pick, a. a. O.¹⁾, S. 130, den entsprechenden Satz aufgestellt und bewiesen.

²¹⁾ Siehe z. B. L. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Autorisierte deutsche Übersetzung von M. Lukat, 1. Aufl., Leipzig 1899, S. 574, § 320.

²²⁾ Für $n = 2$ hat Herr J. Radon, a. a. O.²⁾, § 7, auf dieselbe Weise die entsprechenden Formeln aufgestellt. Vgl. auch W. Blaschke, a. a. O.²⁶⁾, § 10.

Durch nochmalige kovariante Differentiation kommt ebenso mittels (A), (B) und (31):

$$a_{rs} \xi_i = a_{rst}, \quad a_{rs} \xi^* = a_{rs}. \quad (32)$$

Wegen (h), (i) und (31) ist:

$$(a \, a_1 \, a_2 \dots a_n) \cdot (\xi^* \, \xi_1 \, \xi_2 \dots \xi_n) = (-1)^n g,$$

also nach (d) $(a \, a_1 \, a_2 \dots a_n) \neq 0$. Somit kann man ansetzen:

$$a_{rs} = A_{rsi} g^{im} a_m + A_{rs} a,$$

und erhält bei Verwendung von (h), (i), (31) und (32):

$$a_{rs} = -a_{rsi} g^{im} a_m + a_{rs} a. \quad (j)$$

Mit Benützung der vorstehenden Gleichungen folgt jetzt leicht:

$$w_{rs} = -a_{rsi} g^{im} w_m + a_{rs} w - g_{rs}. \quad (k)$$

Schließlich seien noch die aus (j) und (k) entspringenden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{n} \Delta_2 a &\equiv \frac{1}{n} g^{rs} a_{rs} = -(I + R) \cdot a; \\ \frac{1}{n} \Delta_2 w &\equiv \frac{1}{n} g^{rs} w_{rs} = -(I + R) w - 1 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

angemerkt, in denen wir die Invariante $g^{rs} a_{rs}$ durch ihren aus (20) folgenden Wert ersetzt haben.

II. Krümmungsbild einer Hyperfläche und affine Krümmungstheorie.

10. Das Krümmungsbild.

Wir nennen den Ort der Punkte ξ^* das Krümmungsbild der Orthsypberfläche der Punkte ξ und gebrauchen für das Krümmungsbild, wenn es eine Hyperfläche ist, genau dieselben Bezeichnungen wie für die ursprüngliche Hyperfläche, nur mit einem Sterne versehen.

Das Krümmungsbild ist dann und nur dann eine Hyperfläche, wenn die Determinante $(\xi \, \xi_1^* \, \xi_2^* \dots \xi_n^*)$, in der ξ einen willkürlichen Vektor bezeichnet, von Null verschieden ist. Nun folgt aus (B):

$$(\xi \, \xi_1^* \, \xi_2^* \dots \xi_n^*) = \frac{\alpha}{g} (\xi \, \xi_1 \, \xi_2 \dots \xi_n), \quad (34)$$

wo α die Determinante der α_{ik} bedeutet. Da $\frac{(\xi \, \xi_1 \, \xi_2 \dots \xi_n)}{g} \neq 0$ ist, so ist die Bedingung $(\xi \, \xi_1^* \, \xi_2^* \dots \xi_n^*) \neq 0$ mit $\alpha \neq 0$ äquivalent.

In dieser Nummer wird durchwegs vorausgesetzt, daß die Determinante α der α_{ik} beständig von Null verschieden, also das Krümmungsbild eine Hyperfläche ist.

Zunächst soll in Verallgemeinerung eines Satzes von W. Blaschke²³⁾ eine metrische Konstruktion des Krümmungsbildes angegeben werden:

Man errichte zur Tangentenhyperebene in jedem Punkte der gegebenen Hyperfläche eine parallele Hyperebene, deren Abstand w^* vom Koordinatenursprung gleich ist der $(n+2)^{\text{ten}}$ Wurzel aus dem Kroneckerschen Krümmungsmaß der Hyperfläche in $\mathfrak{x}$ selbst oder aus seinem Absolutwerte, je nachdem die Dimensionenzahl n der Hyperfläche ungerade oder gerade ist:

$$w^* = \sqrt[n+2]{\frac{\varepsilon}{R_1 R_2 \dots R_n}} \quad (35)$$

Durchläuft der Punkt $\mathfrak{x}$ die Hyperfläche, so umhüllt die Hyperebene deren Krümmungsbild $\mathfrak{x}^*$.

Die Wurzel ist dabei entsprechend der in Nr. 2 getroffenen Vereinbarung zu ziehen. In der Tat sind nach (14) die Tangentenhyperebenen der Hyperfläche und ihres Krümmungsbildes in entsprechenden Punkten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}^*$ parallel. Bezeichnet also $\mathfrak{n}$ den Einheitsvektor der Normalen der Hyperfläche in $\mathfrak{x}$, so hat man nach (d) und (12):

$$w^* = \mathfrak{x}^* \mathfrak{n} = \frac{(\mathfrak{x}^* \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \dots \mathfrak{x}_n)}{\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{\varepsilon g}}{\sqrt{c}} = \sqrt[n+2]{\frac{\varepsilon}{R_1 R_2 \dots R_n}}.$$

Wir berechnen ferner die erste affine Grundform des Krümmungsbildes. Aus (B) folgt zunächst:

$$\mathfrak{x}_{rs}^* = \alpha_{rl} g^{lm} \mathfrak{x}_{ms} + \alpha_{rl|s} g^{lm} \mathfrak{x}_m,$$

also wegen (I), (12) und (34)

$$l_{(rs)}^* = (\mathfrak{x}_{rs}^* \mathfrak{x}_1^* \mathfrak{x}_2^* \dots \mathfrak{x}_n^*) = \frac{\varepsilon \alpha}{\sqrt{\varepsilon g}} \cdot \alpha_{rs}; \quad l^* = \frac{\varepsilon^n \alpha^{n+1}}{(\sqrt{\varepsilon g})^n}.$$

Hieraus folgt die erste affine Grundform des Krümmungsbildes, wenn ε^* für das Krümmungsbild die entsprechende Bedeutung hat wie ε für die gegebene Hyperfläche (Nr. 2):

$$g_{rs}^* du^r du^s = \frac{l_{(rs)}^* du^r du^s}{\sqrt[n+2]{\varepsilon^* l^*}} = \sqrt[n+2]{\frac{\varepsilon^* \alpha}{\varepsilon g}} \cdot (\alpha_{rs} du^r du^s), \quad (36)$$

²³⁾ W. Blaschke, a. a. O.^{2a)}, S. 170.

so daß

$$\sqrt{\varepsilon^* g^*} = \sqrt{\varepsilon g} \cdot \sqrt[n+2]{\left(\frac{\varepsilon^* \alpha}{\varepsilon g}\right)^{n+1}} \quad (36')$$

ist. Die Gleichung $\alpha_{rs} du^r du^s = 0$ gibt also die Asymptotenrichtungen des Krümmungsbildes.

Die affine Differentialinvariante $\frac{\alpha}{g}$, die in (35) und (36) auftritt:

$$\frac{(\xi^* \xi_1^* \xi_2^* \dots \xi_n^*)}{(\xi^* \xi_1 \xi_2 \dots \xi_n)} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^*} \sqrt[n+2]{\left(\frac{\varepsilon^* g^*}{\varepsilon g}\right)^{n+2}} = \frac{\alpha}{g} \quad (37)$$

soll in Analogie zu der entsprechend gebildeten der metrischen Differentialgeometrie die totale Affinkrümmung der Hyperfläche $\mathfrak{r}$ heißen. Sie wird uns in der folgenden Nummer wieder begegnen, in der wir die affine Krümmungstheorie entwickeln.

11. Affine Krümmungstheorie.

Als Affinkrümmungslinien bezeichnen wir die Kurven auf der gegebenen Hyperfläche, längs deren sich konsekutive Affinnormalen schneiden. Der Schnittpunkt ist der zugehörige affine Hauptkrümmungsmittelpunkt. Ferner heiße die Länge der Strecke auf der Affinnormalen von einem affinen Hauptkrümmungsmittelpunkt $\mathfrak{o}$ nach dem Punkte $\mathfrak{r}$ der Hyperfläche, gemessen in bezug auf den Vektor ξ^* als Einheitsvektor, der entsprechende affine Hauptkrümmungsradius ρ .

Dann ist:

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{r} - \rho \xi^*. \quad (38)$$

Führt man diesen Wert für $\mathfrak{o}$ in die Gleichung

$$d\mathfrak{o} = \mu \xi^* \quad (39)$$

ein und benutzt die Grundgleichungen (B) sowie die lineare Unabhängigkeit der Vektoren ξ^* , ξ_r , so zerspaltet sich (39) in die Gleichungen:

$$(\delta_r^q - \rho \alpha_{rp} g^{pq}) du^r = 0, \quad \mu - d\rho = 0.$$

Multipliziert man noch die erste Reihe dieser Gleichungen mit g_{qs} und summiert über q , so kommt:

$$(g_{rs} - \rho \alpha_{rs}) du^r = 0. \quad (40)$$

Elimination der du^r ergibt für ρ die Gleichung n^{ten} Grades:

$$|g_{rs} - \rho \alpha_{rs}| = 0. \quad (41)$$

Sind $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ die Wurzeln dieser Gleichung und sind diese alle verschieden, so gibt:

$$(g_{rs} - \rho_p \alpha_{rs}) du^r = 0, \quad (p = 1, 2, \dots, n) \quad (41')$$

die Differentialgleichungen der p^{ten} Affinkrümmungslinie.

Die affine Krümmungstheorie erscheint also als Theorie der algebraischen Simultaninvarianten der beiden quadratischen Differentialformen

$$d\sigma^2 = g_{rs} du^r du^s \quad \text{und} \quad \alpha_{rs} du^r du^s.$$

Wenn die affinen Hauptkrümmungsradien im betrachteten Punkte $\mathfrak{x}$ sämtlich voneinander verschieden sind, so liegen demnach die Richtungen der Affinkrümmungslinien dort paarweise konjugiert sowohl zu den Asymptotenrichtungen der gegebenen Hyperfläche, als auch zu den Richtungen dieser Hyperfläche, die den Asymptotenrichtungen des Krümmungsbildes entsprechen.

Schließlich merken wir noch die Gleichungen an:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \dots + \frac{1}{\rho_n} \right) &= \frac{1}{n} \alpha_{rs} g^{rs} = -(I + R), \\ \frac{1}{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_n} &= \frac{\alpha}{g}. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Damit ist die geometrische Bedeutung der Invariante $-(I + R)$ als „mittlere Affinkrümmung“ aufgewiesen und eine geometrische Erklärung für die totale Affinkrümmung der Hyperfläche gegeben.

12. Geometrische Bedeutung der Affinnormalen.

Um einigermaßen vollständig zu sein, geben wir anhangsweise ohne Beweis noch einen Satz über die geometrische Bedeutung der Affinnormalen.

Unter den Hyperflächen zweiter Ordnung, welche die gegebene Hyperfläche im Punkte $\mathfrak{x}$ oskulieren, gibt es entweder keine hyperoskulierende oder es gibt deren ∞^1 ²⁴⁾.

²⁴⁾ Nimmt man den Punkt $\mathfrak{x}$ zum Anfangspunkt eines Parallelkoordinatensystems und hat die Hyperfläche in der Umgebung dieses Punktes die Entwicklung:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} a_{rs} x_r x_s + \frac{1}{6} b_{rst} x_r x_s x_t + \dots, \quad (r, s, t = 1, 2, \dots, n),$$

so ist der zweite Fall durch:

$$b_{rst} x_r x_s x_t \equiv (a_{rs} x_r x_s) \cdot (\alpha_t x_t)$$

gekennzeichnet, wo $\alpha_t x_t$ irgend eine Linearform bedeutet, die auch identisch Null sein kann.

Im ersten Falle existieren unter den in $\mathfrak{x}$ oskulierenden Hyperflächen zweiter Ordnung ∞^1 von der Eigenschaft, daß der $(n-1)$ -dimensionale Kegel der Tangenten an ihren Schnitt mit der Hyperfläche zum Asymptotenkegel der Hyperfläche mit dem(selben) Scheitel $\mathfrak{x}$ apolar ist. Die Affinnormale der Hyperfläche im Punkte $\mathfrak{x}$ ist der Ort der Mittelpunkte dieser oskulierenden Hyperflächen zweiter Ordnung.

Im zweiten Falle liegen die Mittelpunkte der ∞^1 in $\mathfrak{x}$ hyperoskulierenden Hyperflächen zweiter Ordnung auf der Affinnormalen der gegebenen Hyperfläche im Punkte $\mathfrak{x}$ ²⁵⁾.

²⁵⁾ Für $n=2$ hat Verf. diese Sätze schon früher ausgesprochen und bewiesen [L. Berwald, Über affine Geometrie XXX: Die oskulierenden Flächen zweiter Ordnung in der affinen Flächentheorie. Mathematische Zeitschr. 10 (1921), S. 160—172].