12. *Bemerkungen*
zur Abhandlung des Hrn. H. Reissner:
„Anwendungen der Statik und Dynamik mono-
zyklischer Systeme auf die Elastizitätstheorie“;
von P. Ehrenfest.

Hr. Reissner führt im ersten Teil dieser Abhandlung¹⁾ folgenden Gedanken durch: Man kann Monozykel mit *einer* zyklischen Koordinate p und *einer* nichtzyklischen Koordinate p angeben, die folgende Eigenschaft besitzen: Man lasse auf die beiden Koordinaten immer nur solche Kräfte angreifen, daß die Änderung der nichtzyklischen Koordinate außerordentlich langsam erfolgt und daß somit der Ausdruck für die kinetische Energie des Monozykels

$$(1) \quad \mathfrak{E} = \frac{A}{2} \dot{p}^2 + B \dot{p} \dot{p} + \frac{C}{2} \dot{p}^2$$

sich merklich auf

$$\mathfrak{E} = \frac{A}{2} \dot{p}^2$$

reduziert. Es liefert dann bekanntlich bei passender Wahl des Koeffizienten A als Funktion von p das Monozykel eine Analogie zum Verhalten idealer Gase bei enorm langsamer Änderung des Volumens. p entspricht dem Volumen, die zugehörige Lagrangekraft P dem Druck, die zyklische Bewegung der Wärmebewegung und einer direkten Arbeitsleistung entlang der zyklischen Koordinate entspricht Wärmezufuhr. (Im Speziellen wird also die Bedingung der Adiabasie bei den Änderungen des Gaszustandes abgebildet durch die Forderung, daß auf die zyklische Koordinate keine Kraft angreife.)

Erfolgt die Dilatation oder Kompression des Gases mit beträchtlicher Geschwindigkeit, so stellt sich neben anderen Effekten vor allem innere Reibung des Gases ein. Die Wirkung

1) H. Reissner, Ann. d. Phys. 9. p. 44. 1902.

dieser inneren Reibung wird besonders gut überblickbar, wenn die Volumänderung adiabatisch erfolgt, wenn man also ohne Wärmezufuhr ein Gasquantum z. B. von einem Teil des Gefäßes sich über das ganze Gefäß frei ausbreiten läßt. Es entstehen dann zunächst turbulente Bewegungen, die mindestens durch die innere Reibung des Gases schließlich vernichtet werden.

Der Hr. Verfasser hat nun versucht zu zeigen, daß das Monozykel bei beträchtlicher Änderungsgeschwindigkeit der nichtzyklischen Koordinate p dieses nicht konservative Verhalten der Gase bei raschen adiabatischen Volumänderungen abbilde. In welchem Sinne diese Abbildung gemeint ist, wird die folgende Rechnung klar machen; zugleich aber zeigt sie, soviel ich sehen kann, daß bei direkter Ausrechnung der betreffenden *Schlußgleichung* des Hrn. Reissner *jenes der Reibung analoge Glied gar nicht vorhanden ist, da sein Koeffizient identisch Null ist.*

Hr. Reissner untersucht die Lagrangekraft der nichtzyklischen Koordinate p im Fall beträchtlicher Geschwindigkeit und Beschleunigung von p und zwar dann, wenn keine Kraft auf die zyklische Koordinate p angreift (Adiabasie). Der Autor gelangt so zu seiner Gleichung (4 f) die folgenden Bau besitzt:

$$(2) \quad P = D(p) - \dot{p} E(p) + \dot{p}^2 F(p) - \ddot{p} G(p).$$

D, E, F, G sind vollständig angeschriebene Funktionen von p .

Und nun bezeichnet Hr. Reissner *das in $\dot{p}$ lineare Glied $-\dot{p} E(p)$ als „Reibungs“-Glied.* Da der Hr. Verfasser nicht alle Zwischenrechnungen angibt, ist nicht genau ersichtlich, wieso er zu diesem Glied gelangt. Die direkte Ausrechnung der Kraft P liefert jedenfalls kein derartiges Glied, wie man sofort zeigen kann.

Es ist

$$(3) \quad P = \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial p} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \dot{p}} \right)$$

(vgl. Gleichung (2) l. c.).

Ferner, da die Kraft auf die zyklische Koordinate $\mathfrak{P} = 0$ angenommen wird:

$$(4) \quad 0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \dot{p}} \right)$$

(vgl. Gleichungen (2), (4) und p. 57 l. c.).

Gleichung (3) liefert bei Ausführung der Differentiationen (die Koeffizienten in (1) sind nur Funktionen von p):

$$P = \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial p} \dot{p}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial p} \dot{p}^2 + \frac{\partial B}{\partial p} \dot{p} \ddot{p} \\ - \frac{\partial B}{\partial p} \dot{p} \ddot{p} - \frac{\partial C}{\partial p} \dot{p}^2 - B \ddot{p} - C \ddot{p},$$

also

$$(5) \quad P = \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial p} \dot{p}^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial p} \dot{p}^2 - B \ddot{p} - C \ddot{p} \\ \text{(Gleichung (4c) l. c.).}$$

Zur Elimination von $\dot{p}$ und $\ddot{p}$ verwenden wir die Gleichung (4)

$$\frac{d}{dt} (A \dot{p} + B \ddot{p}) = 0,$$

oder

$$A \dot{p} + B \ddot{p} = \text{konst.} = M,$$

also

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{p} = \frac{M}{A} - \frac{B}{A} \ddot{p}, \\ \text{somit} \\ \ddot{p} = -\frac{M}{A^2} \frac{\partial A}{\partial p} \dot{p} + \frac{B}{A^2} \frac{\partial A}{\partial p} \dot{p}^2 - \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial p} \dot{p}^2 - \frac{B}{A} \ddot{p}. \end{array} \right.$$

Substituiert man diese Werte von $\dot{p}$ und $\ddot{p}$ in die Gleichung (5), so erhält man:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} P = \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial p} \frac{M^2}{A^2} - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{MB}{A^2} \dot{p} + \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial p} \frac{B^2}{A^2} \dot{p}^2 \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial p} \dot{p}^2 + \frac{\partial A}{\partial p} \frac{BM}{A^2} \dot{p} - \frac{B^2}{A^2} \frac{\partial A}{\partial p} \dot{p}^2 + \frac{B}{A} \frac{\partial B}{\partial p} \dot{p}^2 \\ - C \ddot{p}. \end{array} \right.$$

Man sieht, daß die beiden in $\dot{p}$ linearen Glieder einander tilgen; man erhält:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} P = \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial p} \frac{M^2}{A^2} - 0 \cdot \dot{p} + \dot{p}^2 \left\{ \frac{B}{A} \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial p} \frac{B^2}{A^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial p} \right\} \\ - \ddot{p} \left(C^2 - \frac{B^2}{A^2} \right). \end{array} \right.$$

Dieser Ausdruck stimmt wohl mit dem von Hrn. Reissner angegebenen im allgemeinen Bau überein (vgl. Gleichung (2)). *Das von ihm als Reibungsglied angesprochene Glied fehlt aber.* (Auch bei verschiedenen Versuchen, die von Hrn. Reissner nicht angegebenen Zwischenrechnungen zu ergänzen, stieß

ich immer wieder auf Gleichungen, in denen das „Reibungs“-Glied fehlt.)

Ich habe mich, dem Hrn. Verfasser folgend, auf den Fall der Adiabasie und einer einzigen nichtzyklischen Koordinate beschränkt. Betrachtet man rasche adiabatische Änderungen von Monozykeln mit *mehreren* nichtzyklischen Koordinaten, so treten hier tatsächlich in dem Ausdruck für die Lagrangekraft, z. B. des h^{ten} p , P_h Glieder auf, die linear sind in den $\dot{p}$, die sogenannte gyrostatistische Reaktion. Aber auch sie zeigen nicht den Charakter der Reibungskräfte. Denn in P_h treten alle $\dot{p}$ mit Ausnahme des $\dot{p}_h$ (der Geschwindigkeit mit gleichem Index) auf: die gyrostatistische Reaktion steht (nach der Hertz'schen Terminologie) normal zur Bahn. So wie auch die Kraft, die ein Elektron bei seiner Bewegung durch ein Magnetfeld erfährt, zwar linear in den Geschwindigkeitskomponenten des Elektrons ist, aber normal zur Bahn des Elektrons steht. Solche Kräfte bewirken keinen Energieumsatz.

Die adiabatischen Änderungen der nichtzyklischen Koordinaten eines Monozykels liefern also keinerlei Analogie zu den Erscheinungen der inneren Reibung bei idealen Gasen.

Zwei Stellen im letzten Kapitel der Thermodynamik von Poincaré („Zurückführung der Prinzipien der Thermodynamik auf die allgemeinen Prinzipien der Mechanik“) erwecken den Anschein, als ob Helmholtz dennoch eine derartige Analogie behauptet hätte. §§ 319, 326 und 327 „Irreversible Erscheinungen“ behauptet Poincaré, daß im Fall „unvollständiger“ Systeme erster Art (Elimination einiger nichtzyklischer Koordinaten vermöge der Bedingung, daß auf sie dauernd keine Kraft wirkt) die kinetische Energie eine beliebige Funktion der Geschwindigkeiten, also z. B. eine Funktion dritten Grades in ihnen werden könne, wenn sie vor der Elimination quadratisch war. Die betreffende Stelle bei Helmholtz besagt ausdrücklich, daß in diesem Fall die Lagrangefunktion noch immer eine gerade Funktion in den Geschwindigkeiten bleibt, woraus folgt, „daß auch in diesem Falle die Gesamtbewegung rückläufig vor sich gehen kann“. ¹⁾ Poincaré hingegen schreibt:

1) H. v. Helmholtz, „Die physikalische Bedeutung der kleinsten Wirkung“, Ges. Abh. 3. p. 217.

„Die irreversiblen Vorgänge könnten also mit den unvollständigen Systemen gleichbedeutend sein; diese Annahme macht Helmholtz. Indessen nimmt derselbe noch eine andere übrigens analoge Erklärung zu Hilfe.“ Und nun folgt die Entwicklung der gyrostatischen Reaktion. Helmholtz nennt sie „Fälle mit verborgener Bewegung“ und sagt darüber (l. c. p. 215): „Diese Fälle unterscheiden sich von denen, wo H die Geschwindigkeiten nur in Gliedern zweiten Grades enthält, wesentlich dadurch, daß die Bewegung nicht unter gleichen Bedingungen rückläufig vor sich gehen kann, wenn nicht die verborgenen Bewegungen gleichzeitig umgekehrt werden.“ Helmholtz behauptet aber nicht, daß hierin eine Analogie oder gar Erklärung der irreversiblen Prozesse der Thermodynamik liege und nur die mehrfache Bedeutung, in der man gegenwärtig den Ausdruck „unumkehrbarer Prozeß“ gebraucht, kann zu dieser Mißdeutung Anlaß geben.

Poincaré hat aber gerade diese beiden *angeblichen* Erklärungsversuche der Irreversibilität thermischer Prozesse zum Ausgangspunkt einer eigentümlichen Kritik *aller* mechanischen Erklärungsversuche des Entropiesatzes genommen.

Wien, 3. Dezember 1905.

(Eingegangen 6. Dezember 1905.)