ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

№. 358. 359.

Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler.

Von Herrn Geheimen-Rath und Ritter *Bessel*.

Die Wahrscheinlichkeit eines Beobachtungsfehlers kann von seiner Gröfse abhängig angenommen werden, aber sie ist so lange unbekannt, so lange unbekannt ist, *auf welche Art* er aus seinen Ursachen entsteht. Wir verdanken indessen *Laplace* das merkwürdige Resultat, dafs, aus einer *grofsen* Anzahl gleichartiger Beobachtungen, die *wahrscheinlichsten* Folgerungen gezogen werden können, ohne dafs es nöthig ist, das Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Fehler zu kennen.

Wenn man eine solche Reihe von Beobachtungen einer Erscheinung, deren mathematische Theorie bekannt ist, besitzt und wenn man die Constanten dieser Theorie, diesem Resultate gemäfs, bestimmt, so giebt ihre Vergleichung mit den einzelnen Beobachtungen der Reihe, Unterschiede zu erkennen, durch welche man eine *practische* Bestimmung des Gesetzes der Wahrscheinlichkeit der Fehler der angewandten Beobachtungsart erlangen kann. Findet man nämlich, dafs in m Fällen, unter der vorhandenen grofsen Anzahl μ derselben, der Fehler zwischen zwei einander sehr nahe liegende Grenzen x und $x-\frac{1}{i}$ fällt, so ist die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses, welche ich durch $\frac{1}{i}\varphi x$ bezeichnen werde, $=\frac{m}{\mu}$, oder

$$\varphi x = \frac{mi}{\mu}.$$

Macht man diese Bestimmung einer Anzahl Werthe von φx zu Ordinaten einer Curve, deren Abscissen die Fehler x sind, so stellt diese Curve das Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Fehler dar, und zwar desto richtiger, je gröfser μ und i sind. Kann man dahin gelangen, die Ordinaten dieser Curve, unbestimmt durch eine Function φx darzustellen, so ist hierdurch das Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Fehler der angewandten Beobachtungsreihe gegeben, und es ist kein Hindernifs mehr vorhanden, wenn es darauf ankommt, aus einer *beliebigen* Anzahl von Beobachtungen derselben Art, ihre *wahrscheinlichsten* Resultate zu ziehen und die *wahrscheinlichen* Fehler derselben zu berechnen. Das was ich hier gefordert habe, nämlich das Vorhandensein einer sehr zahlreichen Beobachtungsreihe einer Erscheinung, deren mathematische Theorie bekannt ist, kann aber nicht immer vorausgesetzt werden; wenn es fehlt, so kann der hier vorgezeichnete Weg zu der Bestimmung des Gesetzes der Wahrscheinlichkeit der Fehler nicht betreten werden.

Um in allen Fällen anwendbare Vorschriften zur Benutzung einer Beobachtungsreihe zu erhalten, hat *Gauss*, in seiner anfänglichen Darstellung der Methode der kleinsten Quadrate, die Annahme verfolgt, dafs das arithmetische Mittel aus einer Anzahl gleichartiger Beobachtungen einer gleichbleibenden Gröfse, ihre wahrscheinlichste Bestimmung sei. Er hat gezeigt, dafs diese Annahme gleichbedeutend ist mit der Bedingung, dafs, auch in dem allgemeineren Falle, in welchem die beobachtete Gröfse nach einem gegebenen Gesetze veränderlich ist, die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Unterschiede zwischen den Beobachtungen und der darauf gegründeten Theorie, den *möglichst kleinen* Werth erhält; ferner, dafs die eine wie die andere n bestimmtes Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Fehler namlic

$$\varphi x = \frac{1}{m\sqrt{(2\pi)}}.e^{-\frac{xx}{2mm}}$$

fordert, wo mm den mittleren Werth der Quadrate der Fehler, oder den Werth des bestimmten Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} xx\,\varphi x\,dx$$

bedeutet. Wenn kein Grund vorhanden ist, in dem speciellen Falle die Annahme des arithmetischen Mittels zurückzuweisen, so ist also auch keiner vorhanden, in dem allgemeinen Falle von der Methode der kleinsten Quadrate abzuweichen; allein dieser Mangel eines Widerspruchs gegen das eine oder das andere, ist kein Beweis des Stattfindens des angegebenen Ausdruckes von φx, und man mufs sich anderweitig von seiner Anwendbarkeit auf eine gegebene Beobachtungsreihe überzeugen, ehe man geneigt sein kann, der darauf gegründeten Berechnung des *wahrscheinlichen* Fehlers, sowohl der Beobachtungen selbst, als ihrer Resultate, irgend ein Gewicht beizulegen.

Da aber nicht bezweifelt werden kann, dafs die Function φx von der Art der Beobachtungen, auf welche sie angewandt werden soll, abhängig ist, und man ihren, dieser zugehörigen wahren Ausdruck, wenigstens im Allgemeinen, nicht kennt, so mufs die Auflösung der Aufgabe, aus vorhandenen Beobachtungen einer Erscheinung, deren mathematische Theorie gegeben ist, die *besten* Resultate zu ziehen, auf die Betrachtung einer *willkürlich* bleibenden Function φx gegründet werden. Diesem Gesichtspunkte sind *Laplace*, *Gauss* und *Poisson* in den bewunderungswürdigen Abhandlungen gefolgt, welche sie über die gegenwärtige Materie bekannt gemacht haben. Das Wesentlichste der Theorie dieser Materie hat schon *Lagrange* zum Gegenstande einer, in den Turiner Mémoiren für 1770 — 1773 gedruckten Abhandlung gemacht.

Wenn ich, nach solchen Vorgängern, Untersuchungen über denselben Gegenstand anstelle, so mufs ich zu ihrer Entschuldigung sagen, dafs ich eine Ansicht verfolgen werde, deren Verfolgung aufser der Absicht der genannten grofsen Geometer lag. Ich werde nämlich die Entstehungsart der Beobachtungsfehler *aus ihren Ursachen*, zum Grunde des Folgenden machen. Wenn man anfangs die Fehler einer gewissen Beobachtungsart, als aus *einer*, auf gegebene Art wirkenden Ursache hervorgehend betrachtet, so wird dadurch ihre jedesmalige Gröfse x eine gegebene Function eines Arguments ξ, welches in derselben Art willkührlich ist, wie das Fallen eines Würfels. Aus dem Ausdrucke $x = f\xi$ kann aber der Ausdruck φx abgeleitet werden, und durch diesen wird man in den Stand gesetzt, alle Folgerungen, welche man aus der Beobachtungsreihe ziehen kann, der Wahrscheinlichkeitsrechnung gemäfs zu ziehen. Unter dieser Voraussetzung, welche fordert, dafs das *Argument* einer gegebenen Function als willkürlich angesehen werde, würde man also mit Unrecht die *Function* des Fehlers, welche seine Wahrscheinlichkeit ausdrückt, als willkürlich betrachten. Ich werde diese Bemerkung verfolgen, auch auf einige Beispiele anwenden, durch welche zugleich anschaulich werden wird, dafs Fälle vorkommen können, in welchen es ein Interesse hat, die gewöhnliche Voraussetzung der Willkür der Function φx zu verlassen. *Gewöhnlich* sind diese Fälle aber nicht, indem man meistens über die Function $f\xi$ eben so zweifelhaft sein wird, als über die Function φx; dann findet die Betrachtung der ersteren keine Anwendung, und die Voraussetzung der Willkür der letzteren tritt an deren Stelle. In der Wirklichkeit wird es auch selten erlaubt sein, die Fehler *einer* Ursache zuzuschreiben; vielmehr werden im Allgemeinen mehrere, meistens viele von einander unabhängige Ursachen zusammenwirken. Hierdurch wird es nöthig, die Zusammensetzung der wirklich vorkommenden Fehler aus mehreren Ursachen, zu untersuchen. Ich bin dadurch zu dem merkwürdigen Resultate gelangt, dafs viele von einander unabhängige Fehlerursachen von gleicher Ordnung durch ihr Zusammenwirken Fehler hervor bringen, deren Wahrscheinlichkeit näherungsweise dieselbe ist, welche durch die Voraussetzung des arithmetischen Mittels, oder durch die Bedingung der kleinsten Quadrate, gefordert wird. Hierdurch findet eine auffallende Uebereinstimmung zwischen diesem Gesetze der Wahrscheinlichkeit der Fehler und der Vertheilung derselben in wirklich gemachten Beobachtungsreihen ihre Erklärung; welche Uebereinstimmung ich in häufigen Fällen bemerkt und auch einigemale bekannt gemacht habe, z. B. in der, am 29sten Juni 1815 an den verstorbenen *Bode* gesandten und in dem Astr. Jahrb. 1818 S. 234 gedruckten, frühesten öffentlichen Nachricht von einer Anwendung der Fehler zum Maafse der Genauigkeit der Beobachtungen, und in den Fundamentis Astronomiae pro Ao. 1755 p. 19. Ich nenne diese Uebereinstimmung *auffallend*, weil sie auf eine *allgemeine*, das jeder Beobachtungsart Eigenthümliche überwiegende Eigenschaft deutet, indem nicht angenommen werden kann, dafs die verschiedenartigsten Beobachtungsreihen, eben so verschiedenartige Gegenstände betreffend, ohne eine solche Eigenschaft, dem angeführten Gesetze der Wahrscheinlichkeit der Fehler sehr nahe entsprechen würden.

1.

Ich fange mit der Aufsuchung der Wahrscheinlichkeit $= \varphi x . dx$ an, mit welcher erwartet werden kann, dafs ein Beobachtungsfehler zwischen x und $x + dx$ falle, wenn er, auf gegebene Art, von einer Ursache ξ abhängt, für welche jeder zwischen zwei Grenzen $-\alpha$ und α liegende Werth gleich möglich ist.

Die zu x und $x + dx$ gehörigen Werthe der Ursache bezeichne ich durch ξ und $\xi + d\xi$, die gegebene Art der Abhängigkeit der ersten Gröfse von der zweiten, durch $x = f\xi$, wodurch $dx = df\xi$ wird. Die Wahrscheinlichkeit, dafs der Fehler zwischen x und $x + dx$ falle, ist einerseits $= \varphi x\, dx$, andrerseits ist sie, der Annahme zufolge, dafs jeder zwischen $-\alpha$ und α liegende Werth von ξ gleich möglich ist $= \frac{d\xi}{2\alpha}$. Man hat also

$$\varphi x\, dx = \frac{d\xi}{2\alpha}$$

und wenn man für dx seinen Ausdruck schreibt:

$$\varphi x = \frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{d\xi}{df\xi} \qquad [1]$$

woraus ξ durch die Gleichung $x = f\xi$ weggeschafft werden kann.

Wenn die Elemente $p, q, r \ldots$ aus einer Reihe von $n + 1$ Beobachtungen bestimmt werden sollen, so ist bekanntlich das System derselben das wahrscheinlichste, welches das Product

$$\Omega = \varphi x . \varphi x' . \varphi x'' \ldots \varphi x^{(n)}$$

so grofs als möglich macht, oder welches die Gleichungen:

$$(\Theta)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} 0 = \varphi'x.\frac{dx}{dp} + \varphi'x'.\frac{dx'}{dp} + \varphi'x''.\frac{dx''}{dp} + \ldots \\ 0 = \varphi'x.\frac{dx}{dq} + \varphi'x'.\frac{dx'}{dq} + \varphi'x''.\frac{dx''}{dq} + \ldots \\ 0 = \varphi'x.\frac{dx}{dr} + \varphi'x'.\frac{dx'}{dr} + \varphi'x''.\frac{dx''}{dr} + \ldots \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right.$$

erfüllt, in welchen $\varphi'x$, $\varphi'x'$, ... für

$$\frac{d\varphi x}{dx\,\varphi x},\quad \frac{d\varphi x'}{dx'\,\varphi x'},\ldots$$

geschrieben sind. Bei der Bestimmung der wahrscheinlichsten Elemente kommt also nicht sowohl φx, als $\varphi'x$ in Betracht; will man dieses, ohne in [1] ξ durch x ersetzt zu haben, also durch ξ ausdrücken, so erhält man, durch Differentiirung von [1]:

$$[2]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\varphi'x = -\frac{d^2 f\xi}{(df\xi)^2}$$

woraus nun ξ, durch $x = f\xi$, wegzuschaffen ist.

Die Grenzen $\mp a$, zwischen welchen die möglichen Werthe von x eingeschlossen sind, sind $\mp f\alpha$. Der Ausdruck des Quadrats des *mittleren* Fehlers einer Beobachtung ist

$$[3]\ldots\ldots mm = \int_{-a}^{a} xx\,\varphi x\,dx = \frac{1}{2\alpha}\int_{+\alpha}^{\alpha}(f\xi)^2\,d\xi$$

der *wahrscheinliche* Fehler einer Beobachtung $= mk$, findet sich aus der Auflösung der Gleichung:

$$\int_0^{mk} x\,\varphi x.dx = \tfrac{1}{2}\int_0^{a} x\,\varphi x\,dx$$

oder, nach der Einführung von ξ und unter der Voraussetzung dafs $x = 0$ und $\xi = 0$ zusammengehören, und $f(-\xi) = -f\xi$ ist, aus der Gleichung:

$$[4]\ldots\ldots\ldots\ldots\int_0^{K} f\xi.d\xi = \tfrac{1}{2}\int_0^{\alpha} f\xi\,d\xi$$

woraus K gefunden und dann

$$mk = fK$$

wird.

2.

Zur Erläuterung des Vorigen werde ich es auf zwei Beispiele anwenden.

Das *erste* Beispiel soll die Annahme

$$x = a\sin\xi$$

verfolgen, und für ξ soll jeder Werth gleich möglich, oder $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ sein. Man erhält ohne Weiteres aus den Formeln [1], [2] und [3],

$$\varphi x = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{(aa-xx)}}$$

$$\varphi'x = \frac{x}{aa-xx}$$

$$mm = \tfrac{1}{2}aa$$

Die Formel [4] ergiebt

$$\int_0^{K}\sin\xi\,d\xi = \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin\xi\,d\xi$$

oder

$$1-\cos K = \tfrac{1}{2},$$

woraus

$$K = 60^\circ$$

und

$$mk = a\sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

hervorgehen.

Die *wahrscheinlichsten* Elemente folgen aus der Auflösung der Gleichungen (Θ), wenn darin

$$\varphi'x = \frac{x}{aa-xx}$$

gesetzt wird; für den einfachsten Fall, in welchem eine immer gleiche Gröfse p, durch die Beobachtungen

$$p = h,\ h',\ h''\ldots\ldots h^{(n)}$$

bestimmt werden soll, folgt p aus der Auflösung der Gleichung:

$$0 = \frac{h-p}{aa-(m-p)^2} + \frac{h'-p}{aa-(m'-p)^2} + \ldots + \frac{h^{(n)}-p}{aa-(m^{(n)}-p)^2}\ldots\ldots[5]$$

statt deren die Methode der kleinsten Quadrate die Auflösung der Gleichung

$$0 = h-p+h'-p+\ldots+h^{(n)}-p$$
$$= \{h+h'+\ldots+h^{(n)}\} - (n+1)p\ldots\ldots\ldots[6]$$

fordert. Das Verhältnifs des *mittleren* Fehlers zum *wahrscheinlichen* ist $= 1:k = 1:\sqrt{3} = 1:1{,}732$, nach der gewöhnlichen Theorie, als *wahrscheinlichste* angenommen, würde es $1:0{,}4769364\sqrt{2} = 1:0{,}6745$ sein.

Ein diesem Beispiele entsprechender Fall würde vorhanden sein, wenn der Winkel zwischen zwei Punkten, von beliebigen und nicht angegebenen Punkten der Theilung eines Kreises an, gemessen wäre, welcher Kreis eine bekannte Excentricität und nur eine einfache Ablesung besitzt, übrigens aber fehlerfrei ist und fehlerfrei angewandt wird. Wird in diesem Falle der Anfangspunkt einer Messung durch u, der Punkt der Theilung, welcher in der Richtung von ihrem Mittelpunkte nach dem Mittelpunkte der Bewegung der Alhidade liegt, durch A, die Excentricität durch e bezeichnet, so ergiebt die Messung, statt des wahren Winkels p,

$$p + 2e\sin\tfrac{1}{2}p\,\cos(u - A + \tfrac{1}{2}p)$$

Man hat also, den im Beispiele angewandten Bezeichnungen zufolge:

$$2e\sin\tfrac{1}{2}p = a;\quad u - 90^\circ - A + \tfrac{1}{2}p = \xi$$

und u sowohl wie das davon abhängige ξ, ist, der Annahme gemäfs, vollkommen willkührlich. Man sollte also p durch die Auflösung der Gleichung [5], welche vom $2n+1^{\text{ten}}$ Grade ist, bestimmen, und sein so bestimmter Werth würde der *wahr-*

scheinlichste sein, der aus den vorhandenen Beobachtungen gefolgert werden kann. Dafs er desto weniger, je gröfser n ist, von dem arithmetischen Mittel aus allen Beobachtungen abweicht, welches man durch [6] erhält, kann sowohl in dem vorhandenen Falle leicht nachgewiesen werden, als es auch aus der allgemeinen, von *Laplace* gefundenen Eigenschaft folgt, welcher zufolge die Bestimmung der Elemente desto freier von φx wird, je gröfser die Anzahl der vorhandenen Beobachtungen ist. Der *wahrscheinliche* Fehler ist 2,568 Mal so grofs, als man ihn durch Verfolgung der Hypothese, auf welcher die Methode der kleinsten Quadrate beruhet, schätzen würde.

Weifs man nichts von der *Ursache* der Abweichungen der verschiedenen Messungen des Winkels p von einander, so erscheinen sie als wahre Beobachtungsfehler und es ist kein Grund vorhanden, welcher sich der Anwendung des arithmetischen Mittels, oder allgemeiner der Methode der kleinsten Quadrate, auch auf diese Beobachtungen, widersetzte. Man erhält aber dadurch, in dem betrachteten Falle, nicht den wahrscheinlichsten Werth von p und eine viel zu kleine Bestimmung seines wahrscheinlichen Fehlers. Ein anderer, dem Beispiele gleichfalls entsprechender Fall ist mir in meiner eigenen Praxis vorgekommen: ich hatte den Unterschied zweier Längen durch eine Mikrometerschraube, oft wiederholt gemessen, und bemerkte, als ich die Beobachtungen untereinander verglich, dafs gröfsere positive oder negative Abweichungen von dem mittleren Resultate der Messungen häufiger vorkamen als kleinere; was sowohl der Hypothese, auf welcher die Methode der kleinsten Quadrate beruhet, als der gewöhnlichen Erfahrung widersprach. Ich konnte nicht zweifeln, dafs in diesem Falle ein ganz anderes Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Fehler stattfinden müsse, und fand wirklich bei einer hierdurch veranlafsten näheren Prüfung des Apparates, dafs die Mikrometerschraube, in dem Umfange jeder ganzen Drehung sich nicht den Angaben ihrer Trommel proportional fortbewegte, aber in verschiedenen Drehungen wiederkehrende, dem Sinusse des von einem gewissen Anfangspunkte an gezählten Drehungswinkels proportionale Ungleichheiten zeigte. Dieser Fall entsprach also dem Beispiele. Als ich die erkannte Fehlerursache durch Rechnung beseitigte, hatte ich das Vergnügen, meine Messungen in sehr befriedigender Uebereinstimmung zu finden; woraus also hervorging, dafs der Apparat nur geringe sonstige Fehlerursachen besafs.

Das *zweite* Beispiel soll die Annahme

$$x = a\xi\xi$$

verfolgen, und jeder zwischen den Grenzen $-\alpha$ und α liegende Werth von ξ soll gleich möglich seyn. Die Formeln [1], [2] und [3] ergeben in diesem Falle:

$$\varphi x = \frac{1}{4\alpha\sqrt{(a\xi)}}$$

$$\varphi' x = -\frac{1}{2x}$$

$$mm = \tfrac{1}{5}aa\alpha^4$$

Die Formel [4] ergiebt die Gleichung:

$$\int_0^K \xi\xi\, d\xi = \tfrac{1}{2}\int_0^\alpha \xi\xi\, d\xi$$

oder

$$K^3 = \tfrac{1}{2}\alpha^3$$

und man erhält dadurch:

$$mk = \frac{a.\alpha\alpha}{\sqrt[3]{4}};\quad k = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{4}}$$

Beobachtungen dieser Art ergeben die wahrscheinlichsten Werthe der Elemente, wenn man, in den Gleichungen (Θ)

$$\varphi' x = -\frac{1}{2x}$$

setzt; in dem einfachsten Falle, in welchem eine immer gleiche Gröfse p, durch die Beobachtungen

$$p = h,\ h',\ h'' \ldots . h^{(n)}$$

bestimmt werden soll, folgt also p aus der Auflösung der Gleichung:

$$0 = \frac{1}{h-p} + \frac{1}{h'-p} + \ldots + \frac{1}{h^{(n)}-p}$$

oder, wenn man das Product:

$$(h-p)\,(h'-p)\,(h''-p)\ldots\ldots(h^{(n)}-p)$$

durch P bezeichnet, aus der Auflösung der Gleichung des n^{ten} Grades:

$$0 = \frac{dP}{dp} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [7^*]$$

Das Verhältnifs des mittleren Fehlers zum wahrscheinlichen ist $= \sqrt[3]{4} : \sqrt{5} = 1 : 1,409$.

Dieses Beispiel ist eins von denen, in welchen man nicht zu der Bestimmung von p, sondern zu der Bestimmung einer davon verschiedenen Grenze gelangt, nämlich der Grenze $p + \int x\varphi x\, dx$; man gelangt zwar immer nur zu einer Grenze, welche diesen Ausdruck hat, allein wenn $\varphi(-x) = \varphi x$ ist, so ist sie von p nicht verschieden, was hier, wo alle x gleiches Zeichen haben, nicht stattfindet. In dem gegenwärtigen Falle erhält man die Grenze

$$= p + \frac{1}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} f\xi . d\xi = p + \tfrac{1}{3}a\alpha\alpha.$$

Das Quadrat des mittleren, auf diese Grenze bezogenen Fehlers, ist bekanntlich*)

$$= mm - \tfrac{1}{9}aa\alpha^4 = \tfrac{4}{45}aa\alpha^4$$

*) *Gauss* Theoria combin. observationum etc. Gottingae 1823 p. 7.

und den wahrscheinlichen Fehler findet man

$$= \frac{\sqrt[3]{2}}{3} a\alpha\alpha = 0{,}420 . a\alpha\alpha.$$

Wenn das die Methode der kleinsten Quadrate ergebende Fehlergesetz auch hier angewandt werden sollte, würde man ihn $= 0{,}6745 . \sqrt{\tfrac{4}{45}} . a\alpha\alpha = 0{,}201 . a\alpha\alpha$ finden.

Es ist nicht schwer, auch diesem Beispiele untergeordnete Fälle, welche wirklich vorkommen können, aufzufinden. Einer von ihnen ist vorhanden, wenn die Länge einer Stange, welche eine kugelförmig gekrümmte Endfläche hat, auf einem mikrometrischen Apparate gemessen werden soll, welcher den Fehler hat, dafs der Mittelpunkt der kugelförmigen Fläche nicht sicher in die gerade Linie zwischen der Mikrometerspitze und dem Punkte, von welchem an die Länge gezählt wird, gebracht werden, sondern innerhalb der Grenzen $-\alpha$ und α willkürlich davon entfernt sein kann. Bezeichnet man den Halbmesser der Kugelfläche durch r, so ist, für ein convexes Ende der Stange, $x = -\frac{\xi\xi}{2r}$, für ein concaves $x = \frac{\xi\xi}{2r}$, und also $a = \mp\frac{1}{2r}$ Dafs a und x stets gleiches Zeichen haben, liegt in der Natur der Sache.

In beiden Beispielen, welche ich gegenwärtig verfolgt habe, ist das Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Fehler beträchtlich verschieden von dem oft erwähnten Gesetze

$$\varphi x = \frac{1}{m\sqrt{(2\pi)}} e^{\frac{-xx}{2mm}}$$

In dem ersten derselben sind sogar die sich den Grenzen nähernden Fehler weit wahrscheinlicher als die kleinen, und für die Grenzen selbst wird $\varphi x = \infty$. Dieses findet in vielen, und vermuthlich auch häufig vorkommenden Fällen statt. Wenn jeder Fehler aus einer einzigen Ursache entstände, so würde, meiner Meinung nach, kein Grund vorhanden sein, zu erwarten, dafs die Abnahme der Zahl der Fehler sich mit dem Zunehmen ihrer Gröfse verbunden zeigen werde; so wie es, seltener, nur bei sehr einfachen Beobachtungsarten vorkommender Ausnahmen nicht zu gedenken, in der Wirklichkeit der Fall ist. Da ich die Absicht erreicht zu haben glaube, welche mich zu der Verfolgung einiger Beispiele veranlafste, so verlasse ich diese, und bemerke darüber nur noch, dafs jeder Versuch, das der Methode der kleinsten Quadrate (wenn man sie als wahrscheinlichste Methode betrachten will) zum Grunde liegende Gesetz *allgemein* als das wirklich vorkommende zu erkennen, nothwendig vergebens sein mufs, da die Beispiele zeigen, dafs Bedingungen, welche nicht blofs mathematisch möglich sind, sondern auch practisch erfüllt werden können, auf davon gänzlich verschiedene Gesetze führen.

3.

Ich werde nun die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers untersuchen, welcher aus der *Zusammenwirkung* mehrer, von einander unabhängiger Ursachen entsteht. Um nicht unnöthige Weitläuftigkeit herbeizuführen, werde ich voraussetzen, dafs jede dieser Ursachen so wirkt, dafs sie positiven und negativen Fehlern von gleicher Gröfse gleiche Wahrscheinlichkeit giebt; ferner werde ich, als Maafs dieser Wahrscheinlichkeit, die Gewifsheit des Vorhandenseins der Ursache, aus welcher ein Fehler entsteht, oder, was dasselbe ist, das zwischen den äufsersten Grenzen des Fehlers genommene Integral $\int \varphi x . dx = 1$ annehmen. Indem ich schon gezeigt habe, wie aus einer gegebenen Art der Wirkung der einen Fehler erzeugenden Ursache, die seine Wahrscheinlichkeit ausdrückende Function hervorgeht, so ist es auch unnöthig, die erstere in dem Folgenden ferner zu betrachten.

Man erhält eine deutliche Vorstellung von dem Zusammenwirken verschiedener Fehlerursachen, wenn man die Einheit, durch welche die Wirkung jeder derselben, oder der Beitrag, den sie zu dem Gesammtfehler liefert, gemessen wird, in unendlich viele gleiche Theile (i^{tel}) theilt und diese Wirkung von $\frac{1}{i}$ zu $\frac{1}{i}$ fortgehend annimmt. Die Wahrscheinlichkeit, dafs eine der Ursachen die Wirkung x erzeuge, ist der Anzahl von Fällen proportional, in welchen diese Wirkung sich, unter einer unendlich grofsen Zahl N von Fällen, zeigt. Bezeichnet man diese Anzahl durch $\frac{N}{i}\varphi x$, so ist der Ausdruck der Wahrscheinlichkeit des Vorkommens von $x = \frac{1}{i}\varphi x$. Die Wahrscheinlichkeit, dafs eine andere von der vorigen unabhängige Fehlerursache die Wirkung y hervorbringe, hat eben so den Ausdruck $\frac{1}{i}\varphi_1 y$; dafs eine dritte die Wirkung z hervorbringe, den Ausdruck $\frac{1}{i}\varphi_2 z$; u. s. w. Die Wahrscheinlichkeit, dafs diese Ursachen *zugleich* die durch $x, y, z, \ldots$ bezeichneten Wirkungen hervorbringen, ist das Product aller Wahrscheinlichkeiten der einzelnen, also, wenn die Anzahl der von einander unabhängigen Ursachen $= \mu + 1$ gesetzt wird,

$$= \frac{1}{i^{\mu+1}} . \varphi x . \varphi_1 y . \varphi_2 z \ldots\ldots$$

Wenn nun

$$x + y + z + \ldots = n$$

gesetzt wird, so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die Gesammtwirkung aller Ursachen, oder der Gesammtfehler, $= n$ sei, die Summe aller Werthe, welche der eben gegebene Ausdruck erhält, wenn für $x, y, z, \ldots$ alle von $\frac{1}{i}$ zu $\frac{1}{i}$ fortschreitende Werthe gesetzt werden, welche mit der Bedingung $x + y + z + \ldots = n$ vereinbar sind. Bezeichnet man diese Wahrscheinlichkeit durch $\frac{1}{i}\psi n$, so hat man also

$$\psi n = \frac{1}{i^{\mu}} \Sigma \varphi x . \varphi_1 y . \varphi_2 z \ldots\ldots\ldots \quad \ldots [7]$$

in welchem Ausdrucke das Summenzeichen Σ die angegebene Bedeutung hat.

Die Aufgabe, die Function ψn zu finden, ist also gleichbedeutend mit der Aufgabe, die geforderte Summation auszuführen. Da die Summation einer Reihe von Werthen einer Function, deren Argument von einer Grenze zu einer anderen, in arithmetischer Progression, und zwar durch unendlich kleine Aenderungen fortgeht, sich auf eine Integration zwischen diesen Grenzen reducirt, und unsere Aufgabe μ solcher Summationen, also auch μ successive Integrationen erfordert, so erhält sie hierdurch eine Schwierigkeit, welche nur in besonderen Fällen der Functionen φx, $\varphi_1 y$, $\varphi_2 z \ldots$ übersteiglich ist. Wenn $x, y, z, \ldots$ nicht jede beliebige Gröfse haben können, sondern der Bedingung unterworfen sind, dafs sie sich in den Grenzen resp. $\mp a$, $\mp b$, $\mp c \ldots$ befinden müssen, so gesellt sich zu dieser Schwierigkeit noch eine andere, gleichfalls sehr beträchtliche, nämlich die Schwierigkeit, jede Integration in ihren gehörigen Grenzen auszuführen. Offenbar ist dann ψn keine stetige Function von n, sondern sie erhält andere und andere Ausdrücke, jenachdem n sich zwischen den verschiedenen ihrer Gröfse nach aufeinander folgenden Combinationen von $\mp a$, $\mp b$, $\mp c, \ldots$ befindet.

4.

Obgleich das, was ich eben gesagt habe, nicht erwarten läfst, dafs man, ohne die Aufgabe von einer andern Seite aufzufassen, ein allgemein befriedigendes Resultat dadurch erhalten werde, so werde ich doch den Ausdruck [7] zu verfolgen anfangen. Man kann dadurch zu zwar speciellen, aber doch der Aufmerksamkeit nicht unwerth erscheinenden Resultaten gelangen.

Nimmt man zuerst nur *zwei* zusammenwirkende Fehlerursachen, so verwandelt sich [7] in:

$$\psi n = \frac{1}{i}\Sigma\varphi x\ \varphi_{,} y$$

und die durch x und y zu erfüllende Bedingung ist

$$n = x + y.$$

Schafft man dadurch y fort, so wird

$$\psi n = \frac{1}{i}\Sigma\varphi x\,\varphi_{,}(n-x)$$

und diese Summe mufs über alle, von $\frac{1}{i}$ zu $\frac{1}{i}$ fortschreitende Werthe von x ausgedehnt werden, welche x nicht aufserhalb der Grenzen $\mp a$, und zugleich $n-x$ nicht aufserhalb der Grenzen $\mp b$ bringen. Die Grenzen, über welche n nicht hinausgehen kann, sind offenbar $\mp(a+b)$.

Unter Vorbehalt der gehörigen Begrenzung des Integrals, ist

$$\frac{1}{i}\Sigma\varphi x\,\varphi_{,}(n-x) = \int\varphi x\ \varphi_{,}(n-x)\,dx$$

Die Bedingung, dafs x zwischen $-a$ und a liege, fordert, dafs das Integral nicht über diese Grenzen hinaus ausgedehnt werde; die zweite Bedingung, dafs $n-x$ zwischen $-b$ und b liege, fordert aber auch, dafs das Integral nicht über die Grenzen $n-b$ und $n+b$ hinausgehe. Es geht hieraus hervor, dafs man die gehörige Begrenzung des Integrals erhält, wenn man $-a$, a, $n-b$, $n+b$ nach ihrer Gröfse ordnet und die beiden mittleren als Grenzen des Integrals annimmt. Das Integral geht nicht bis zu a, wenn $n-a<-b$ und $>b$, oder $n<a-b$ und $>a+b$ ist, wovon jedoch die Bedingung $n>a+b$ weggelassen werden kann, indem sie nur fordert, dafs n die Grenze seiner möglichen Gröfse nicht überschreite; es erlangt also die Grenze a nicht, sondern $n+b$ statt derselben, wenn $n<a-b$ ist. Dagegen fängt es nicht von $-a$ an, wenn $n+a<-b$ und $>b$, oder $n<-a-b$ und $>-a+b$ ist, wovon aus dem angeführten Grunde die Bedingung $n<-a-b$ weggelassen werden kann; es fängt also nicht von der Grenze $-a$ an, sondern von $n-b$ statt derselben, wenn $n>-a+b$ ist. Wenn man diejenige von beiden Functionen, deren Grenzen sich am weitesten ausdehnen, als die erste von beiden, also $a>b$ annimmt, erhält man also:

$$[8] \ldots\ldots \left\{\begin{aligned} \psi n &= \int_{-a}^{n+b}\varphi x.\varphi_{,}(n-x)\,dx, \text{ wenn } n \text{ zwischen } -a-b \text{ und } a+b\\ &= \int_{n-b}^{n+b}\varphi x.\varphi_{,}(n-x)\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots -a+b \ldots\ldots a-b\\ &= \int_{n-b}^{a}\varphi x.\varphi_{,}(n-x)\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots a-b \ldots\ldots a+b \end{aligned}\right.$$

Dafs diese Formeln die Bedingung $\psi n = \psi(-n)$, der sie, der Annahme $\varphi x = \varphi(-x)$ und $\varphi_{,} y = \varphi_{,}(-y)$ gemäfs, entsprechen müssen, wirklich erfüllen, bemerkt man leicht.

Ich werde diese Formeln auf einige Beispiele anwenden. *Zuerst* werde ich die beiden zusammenwirkenden Fehlerursachen so annehmen, dafs die eine innerhalb der Grenzen $\mp a$, die andere innerhalb $\mp b$ liegenden Fehlern eine *beständige* Wahrscheinlichkeit giebt; also

$$\varphi x = \frac{1}{2a}, \quad \varphi_{,} y = \frac{1}{2b}$$

Die Formeln [8] ergeben für diesen Fall unmittelbar

$$\psi n = \frac{n+a+b}{4ab} \text{ wenn } n \text{ zwischen } -a-b \text{ und } -a+b$$
$$= \frac{2b}{4ab} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots -a+b \ldots\ldots \quad a-b$$
$$= \frac{-n+a+b}{4ab} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad a-b \ldots\ldots \quad a+b$$

Indem n von $\mp(a+b)$ zu $\mp(a-b)$ übergeht, wächst also ψn gleichförmig von 0 bis $\frac{1}{2a}$, welchen Werth es behält, während n sich zwischen $-a+b$ und $a-b$ befindet.

Als *zweites* Beispiel werde ich für eine der beiden zusammenwirkenden Fehlerursachen, die in dem ersten Beispiele des 2[ten] Art. abgeleitete, also

$$\varphi x = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{(aa-xx)}},$$

und für die andere die eben angewandte, also

$$\varphi_{\prime} y = \frac{1}{2b}$$

annehmen. Dadurch werden die Formeln [8].

$$\psi n = \frac{1}{2b\pi}\int_{-a}^{n+b}\frac{dx}{\sqrt{(aa-xx)}} = \frac{1}{2b\pi}(\tfrac{1}{2}\pi+u) \text{ wenn } n \text{ zwischen } -a-b \text{ und } -a+b$$
$$= \frac{1}{2b\pi}\int_{n-b}^{n+b}\frac{dx}{\sqrt{(aa-xx)}} = \frac{1}{2b\pi}(u-u') \ldots\ldots\ldots\ldots -a+b \ldots\ldots \quad a-b$$
$$= \frac{1}{2b\pi}\int_{n-b}^{a}\frac{dx}{\sqrt{(aa-xx)}} = \frac{1}{2b\pi}(\tfrac{1}{2}\pi-u') \ldots\ldots\ldots\ldots \quad a-b \ldots\ldots \quad a+b$$

wo die Winkel u und u' aus den Formeln:

$$\sin u = \frac{n+b}{a}; \quad \sin u' = \frac{n-b}{a}$$

hervorgehen.

Der in diesem Beispiele verfolgte Fall findet unter andern statt, wenn man der Ablesung der Theilungen des im 2[ten] Art. zur Erläuterung gewählten excentrischen Kreises eine optische Parallaxe beilegt, und den Ort des Auges, von welchem ihre Gröfse abhängt innerhalb der Grenzen, zwischen welchen diese von $-b$ zu b übergeht, willkürlich annimmt.

Als *drittes* Beispiel werde ich beide zusammenwirkende Fehlerursachen, von der Art der im 1[sten] Beispiele des 2[ten] Art. abgeleiteten, also

$$\varphi x = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{(aa-xx)}}; \quad \varphi_{\prime} y = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{(bb-yy)}}$$

annehmen. Bei dieser Annahme setzt die Erfindung von ψn die Integration von

$$\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{(aa-xx)}\sqrt{(bb-(n-x)^2)}}$$

zwischen den in den Formeln [8] angegebenen Grenzen voraus. Diese Function ist also eine elliptische Transcendente der ersten Gattung, deren Ausdruck unter die Form:

$$\frac{1}{M}\int\frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}\sqrt{(1-kkyy)}}$$

gebracht werden kann. Man erlangt diese Reduction sehr leicht, wenn man den, durch Eleganz und Vollständigkeit der Entwickelung des Meisters würdigen Formeln folgt, welche *Jacobi* *) gegeben hat. Wenn man in diesen Formeln x für y und y für x schreibt, so lehren sie, dafs

$$\frac{dx}{\sqrt{\{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,x-\delta)\}}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}\sqrt{(L^4-N^4yy)}}$$

wird, wo (unter der Voraussetzung $\alpha>\beta>\gamma>\delta$) unter L und N die Ausdrücke:

$$2L = \sqrt[4]{\{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)\}} + \sqrt[4]{\{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)\}}$$
$$2N = \sqrt[4]{\{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)\}} - \sqrt[4]{\{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)\}}$$

verstanden werden, und die Relation zwischen x und y die folgende ist.

1) wenn x nicht kleiner als α und nicht gröfser als δ ist

$$\frac{L-Ny}{L+Ny} = \sqrt[4]{\left\{\frac{(\alpha-\beta)(\beta-\delta)}{(\alpha-\gamma)(\gamma-\delta)}\right\}}\sqrt{\frac{x-\gamma}{x-\beta}}$$

2) wenn x nicht kleiner als γ und nicht gröfser als β ist

$$\frac{L-Ny}{L+Ny} = \sqrt[4]{\left\{\frac{(\beta-\delta)(\gamma-\delta)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\right\}}\sqrt{\frac{\alpha-x}{x-\delta}}$$

Die vier Factoren des Quadrats des Nenners des Differentials, welches mit diesen Formeln verglichen werden soll, sind:

$$x-a\,.\,x+a\,.\,x-n+b\,.\,x-n-b.$$

Wenn 1[tens] n zwischen $-a-b$ und $-a+b$ fällt, ist ihre Reihefolge:

$$x-a\,.\,x-n-b\,.\,x+a\,.\,x-n+b$$

---

*) Fundamenta nova theoriae funct. ellipt. Regiomonti 1829. p. 12. Man findet daselbst auch ähnliche Formeln für den Fall, in welchem der Nenner

$$\sqrt{\{-(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\}}$$

ist.

und das Integral wird von $-a$ bis $n+b$ genommen. Man hat also

$$\alpha = a, \quad \beta = n+b, \quad \gamma = -a, \quad \delta = n-b$$

und das Integral von γ bis β zu nehmen. Hieraus folgt

$$2L = \sqrt[4]{4ab} + \sqrt[4]{\{nn - (a-b)^2\}}$$
$$2N = \sqrt[4]{4ab} - \sqrt[4]{\{nn - (a-b)^2\}}$$

und die Grenzen des Integrals $= -1$ und $+1$.

Wenn 2tens n zwischen $-a+b$ und $a-b$ fällt, ist ihre Reihefolge:

$$x-a \,.\, x-n-b \,.\, x-n+b \,.\, x+a$$

und das Integral wird von $n-b$ bis $n+b$ genommen. Man hat also

$$\alpha = a, \quad \beta = n+b, \quad \gamma = n-b. \quad \delta = -a$$

und das Integral von γ bis β zu nehmen. Hieraus folgt

$$2L = \sqrt[4]{\{(a+b)^2 - nn\}} + \sqrt[4]{\{(a-b)^2 - nn\}}$$
$$2N = \sqrt[4]{\{(a+b)^2 - nn\}} - \sqrt[4]{\{(a-b)^2 - nn\}}$$

und die Grenzen des Integrals $= -1$ und $+1$.

Wenn 3tens n zwischen $a-b$ und $a+b$ fällt, ist ihre Reihefolge:

$$x-n-b \,.\, x-a \,.\, x-n+b \,.\, x+a$$

und das Integral wird von $n-b$ bis a genommen. Man hat also

$$\alpha = n+b, \quad \beta = a, \quad \gamma = n-\beta, \quad \delta = -a$$

und das Integral von γ bis β zu nehmen. Das Uebrige folgt hieraus wie in dem ersten Falle, was auch eine Folge davon ist, dafs $\psi n = \psi(-n)$ sein mufs.

Man hat also in allen drei Fällen

$$\psi n = \frac{1}{\pi^2 L^2} \int_{-1}^{1} \frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}\sqrt{(1-kkyy)}}$$

und wenn man

$$k = \left(\frac{N}{L}\right)^2 = \sin\theta$$

und $y = \sin\varphi$ setzt

$$[9] \ldots\ldots \psi n = \frac{2}{\pi^2 L^2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\sin\theta^2 \sin\varphi^2)}}$$

Den Zahlenwerth des Integrals hat *Legendre*, im 3ten Theile der Exercices du calcul intégral, in eine Tafel gebracht, deren Argument θ ist.

5.

Ich habe diese Beispiele verfolgt, um dadurch in einigen speciellen Fällen anschaulich zu machen, in welcher Art die Beschaffenheit der Functionen φ und φ, durch ihr Zusammenwirken verändert wird. Die drei Beispiele sind dieser Absicht angemessen gewählt: das *erste* setzt zwei Fehlerursachen voraus, welche gröfseren und kleineren Fehlern gleiche Wahrscheinlichkeiten beilegen; das *zweite* verbindet eine solche Fehlerursache mit einer anderen, deren Wirkungen desto wahrscheinlicher werden, je gröfser sie sind und für welche φx, an den Grenzen von x, sogar bis ins Unendliche wächst; das *dritte* betrachtet endlich das Zusammenwirken zweier Fehlerursachen der letzteren Art. Um leichter als durch die erlangten Formeln das Resultat dieses Zusammenwirkens zweier von einander unabhängiger Fehlerursachen übersehen zu können, habe ich die Zahlenwerthe von $(a+b)\psi n$ zuerst für die Voraussetzung $a = 5$ und $b = 5$, dann für die Voraussetzung $a = 6$ und $b = 4$ berechnet und führe sie hier an:

	$a=5$ und $b=5$				$a=6$ und $b=4$		
$\pm n$	I	II	III	$\pm n$	I	II	III
0	1,0	1,00	∞	0	0,83	0,58	0,61
1	0,9	0,80	0,15	1	0,83	0,60	0,64
2	0,8	0,70	0,12	2	0,83	0,76	∞
3	0,7	0,63	0,11	3	0,73	0,69	0,60
4	0,6	0,56	0,10	4	0,63	0,63	0,51
5	0,5	0,50	0,09	5	0,52	0,56	0,46
6	0,4	0,44	0,08	6	0,42	0,49	0,42
7	0,3	0,37	0,08	7	0,31	0,42	0,39
8	0,2	0,30	0,07	8	0,21	0,33	0,36
9	0,1	0,20	0,07	9	0,10	0,23	0,34
10	0,0	0,00	0,06	10	0,00	0,00	0,32

Im Beispiele III ist eigentlich der Werth von ψn, an der Grenze von n, unbestimmt; allein für ein unendlich wenig kleineres n drücken ihn die berechneten Zahlen aus. Durch diese Tafeln wird anschaulich, wie das Zusammenwirken zweier Fehlerursachen grösseren Fehlern, im Allgemeinen, kleinere Wahrscheinlichkeiten giebt, selbst wenn die den einzelnen zugehörigen φ und φ, diese Eigenschaft nicht haben. In dem Beispiele II ist das starke Zusammendrängen der Fehler an den Grenzen der aus der einen ihrer Ursachen hervorgehenden, gänzlich verschwunden, und es zeigt sich darin im Ganzen ein mit dem Wachsen von n verbundenes Abnehmen von ψn. In dem Beispiele III drängen sich die Fehler in dem ersten berechneten Falle bei $n = 0$, in dem zweiten bei $n = 2$, noch stark zusammen, aber die Werthe von n, für welche dieses stattfindet, liegen nicht mehr an den Grenzen. Dafs etwas Aehnliches aus dem Zusammenwirken zweier Fehlerursachen entstehen müsse, begreift man auch leicht ohne Rechnung; allein diese weiset es in den ihr entworfenen Fällen näher nach.

Man kann aus speciellen Fällen allerdings nichts Allgemeines folgern; allein ich bemerke, bei Gelegenheit der gegenwärtigen Verfolgung einiger derselben, dafs die dadurch erlangten Resultate der Vermuthung nicht zuwider sind, dafs das Zusammenwirken einer *grofsen Anzahl* von einander unabhängiger Fehlerursachen, die Gesetze der einzelnen mögen sein wie man will, einem Ausdrucke von ψn näheren könne, welcher die Eigenschaft besitzt, mit dem Wachsen der Werthe von n fortwährend abzunehmen.

6.

Man kann, durch weitere Verfolgung der Formel [7], leicht einen Ausdruck von ψn erhalten, welcher das Resultat des Zusammenwirkens *dreier* Fehlerursachen angiebt. Für zwei Fehlerursachen φx und $\varphi_{,} y$ habe ich oben gefunden:

$$\psi n = \int_{-a}^{a} \varphi x\, \varphi_{,}(n-x)\, dx$$

welcher Ausdruck aber die Hinzufügung der Bedingung fordert, dafs statt $\varphi_{,}(n-x)$ *Null* gesetzt werde, wenn $n-x$ ausserhalb $\mp b$ liegt. Führt man, um die Bezeichnungen n und ψn auch für das Zusammenwirken dreier Fehlerursachen beibehalten zu können, statt ihrer andere ein, nämlich ν statt n und $F\nu$ statt ψn, oder schreibt man statt des obigen Ausdruckes:

$$F\nu = \int_{-a}^{a} \varphi_{,}(\nu - x)\, \varphi x\, dx$$

so kann man, bei der Aufsuchung von ψn für *drei* Fehlerursachen, dieses $F\nu$ statt des vorigen φx und $\varphi_2 z = \varphi_2(n-\nu)$ statt der vorigen $\varphi_{,}(\nu - x)$ anwenden; unter der Bedingung, dafs statt $\varphi_2(n-\nu)$ *Null* gesetzt werde, wenn $n-\nu$ aufserhalb $\mp c$ liegt, wird das Integral zwischen den Grenzen von $\nu = \mp(a+b)$ genommen. Man erhält also

$$\psi n = \int_{-a-b}^{a+b} \varphi_2(n-\nu)\, F\nu\, d\nu = \int_{-a-b}^{a+b} \varphi_2(n-\nu)\, d\nu \int_{-a}^{a} \varphi_1(\nu - x)\, \varphi x\, dx \ldots\ldots\ldots\ldots [10]$$

und es wird klar, dafs man dieses Verfahren auch auf vier oder jede gröfsere Zahl von Fehlerursachen ausdehnen kann, indem man immer die Bedingung hinzufügt, dafs, statt der hinzukommenden $\varphi_3(n-\nu_1)$, $\varphi_4(n-\nu_2)$ u. s. w. *Null* gesetzt werde, sobald $n-\nu_1$, $n-\nu_2$, u. s. w. ausserhalb $\mp d$, $\mp e$, u. s. w. liegen. Für *vier* Fehlerursachen hat man z. B.

$$\psi n = \int_{-a-b-c}^{a+b+c} \varphi_3(n-\nu_{,})\, d\nu_{,} \int_{-a-b}^{a+b} \varphi_2(\nu_{,} - \nu)\, d\nu \int_{-a}^{a} \varphi_1(\nu - x)\, \varphi x\, dx \ldots\ldots\ldots\ldots [11]$$

Die hier geforderten successiven Integrationen sind aber nur in sehr eingeschränkten Fällen der Bedeutung von φ, φ_1, φ_2 ..... ausführbar, und selbst wenn sie ausführbar sind, wird die wirkliche Berechnung von ψn, durch die Nebenbedingungen, welche die Begrenzungen der Integrale erfordern, aufserordentlich erschwert. Um wenigstens den Anfang dieser Schwierigkeit anschaulich zu machen, werde ich den nächst-einfachen Fall, nämlich den Fall *dreier* Fehlerursachen, verfolgen. Die Formeln, welche ich dadurch erhalten werde, sind nicht nur hier anwendbar, sondern immer wenn ein Integral

$$\iint \varphi_2 z \cdot \psi_1 y \cdot \varphi x \cdot dy \cdot dx$$

über alle Werthe der veränderlichen Gröfsen ausgedehnt werden soll, für welche $x+y+z$ einen gegebenen Werth n hat: sie können also noch anderweitige Anwendungen finden.

Um abzukürzen, werde ich das Integral

$$\int_{h}^{i} \varphi_{,}(\nu - x)\, \varphi x\, dx \text{ durch } [h, i]$$

bezeichnen. Daraus folgt, den Formeln [8] gemäfs:

$$\begin{aligned}
\text{wenn } \nu &> -a-b < -a+b \ldots F\nu = [-a,\ \nu+b] \\
\nu &> -a+b < a-b \ldots\ldots F\nu = [\nu-b,\ \nu+b] \\
\nu &> a-b \quad < a+b \ldots\ldots F\nu = [\nu-b,\ a]
\end{aligned}$$

Man sucht

$$\psi n = \int_{-a-b}^{a+b} \varphi_2(n-\nu)\, F\nu \,.\, d\nu$$

unter der Bedingung, dafs statt $\varphi_2(n-\nu)$ *Null* gesetzt werde, wenn $n-\nu$ aufserhalb $\mp c$ liegt. Setzt man nach und nach für $F\nu$ die eben gegebenen Ausdrücke, so fordert die Anwendbarkeit des *ersten* derselben, dafs $\nu > -a-b$ und $< -a+b$ sei; die jetzt hinzugekommene Bedingung fordert, dafs $n-\nu > -c$ und $< c$, oder $\nu > n-c$ und $< n+c$ sei. Fällt $n-c$ zwischen $-a-b$ und $-a+b$, also n zwischen $-a-b+c$ und $-a+b+c$, so wird das Integral von $n-c$ angerechnet, für kleinere n von $-a-b$. Fällt $n+c$ zwischen $-a-b$ und $-a+b$, also n zwischen $-a-b+c$ und $-a+b+c$, so wird das Integral hiezu $n+c$ genommen, für gröfsere n bis zu $-a+b$. Insofern der erste der drei Ausdrücke von $F\nu$, bei dem Integrale in Betracht kommt, hat man also, unter der Annahme $a \geqq b \geqq c$:

$$\begin{aligned}
\psi n &= \int_{-a-b}^{n+c} \varphi_2(n-\nu)\,[-a,\ \nu+b]\, d\nu, \text{ wenn } n > -a-b-c < -a-b+c \\
&= \int_{n-c}^{n+c} \varphi_2(n-\nu)\,[-a,\ \nu+b]\, d\nu, \ldots\ldots n > -a-b+c < -a+b-c \\
&= \int_{n-c}^{-a+b} \varphi_2(n-\nu)\,[-a,\ \nu+b]\, d\nu \ldots\ldots\ldots n > -a+b-c < -a+b+c
\end{aligned}$$

Die Anwendbarkeit des *zweiten* der Ausdrücke von $F\nu$ fordert, dafs $\nu > -a+b$ und $< a-b$ sei; die hinzukommende Bedingung, dafs $\nu > n-c$ und $< n+c$ sei. Fällt $n-c$ zwischen $-a+b$ und $a-b$, also n zwischen $-a+b+c$ und $a-b+c$, so wird das Integral von $n-c$ angerechnet, für kleinere n von $-a+b$. Fällt $n+c$ zwischen $-a+b$ und $a-b$, also n zwischen $-a+b-c$ und $a-b-c$, so wird das Integral bis zu $n+c$ genommen, für gröfsere n bis zu $a-b$. Insofern der *zweite* der drei Ausdrücke von $F\nu$ bei dem Integrale in Betracht kommt, hat man also, unter der Annahme $a \geqq b+c$:

$$\begin{aligned}
\psi n &= \int_{-a+b}^{n+c} \varphi_2(n-\nu)\,[\nu-b,\ \nu+b]\,d\nu, \quad \text{wenn } n > -a+b-c < -a+b+c \\
&= \int_{-n-c}^{n+c} \varphi_2(n-\nu)\,[\nu-b,\ \nu+b]\,d\nu, \ldots\ldots\ldots n > -a+b+c < a-b-c \\
&= \int_{n-c}^{a-b} \varphi_2(n-\nu)\,[\nu-b,\ \nu+b]\,d\nu \ldots\ldots\ldots n > a-b-c < a-b+c
\end{aligned}$$

Wenn aber $a < b+c$ so widerspricht dieses der zweiten Bedingung $n > -a+b+c < a-b-c$ und die Reihefolge der vier Grenzen ist dann $-a+b-c$, $a-b-c$, $-a+b+c$, $a-b+c$, woraus, den angeführten Bedingungen gemäfs, hervorgeht:

$$\begin{aligned}
\psi n &= \int_{-a+b}^{n+c} \varphi_2(n-\nu)\,[\nu-b,\ \nu+b]\,d\nu, \quad \text{wenn } n > -a+b-c < a-b-c \\
&= \int_{-a+b}^{a-b} \varphi_2(n-\nu)\,[\nu-b,\ \nu+b]\,d\nu \ldots\ldots\ldots n > a-b-c < -a+b+c \\
&= \int_{n-c}^{a-b} \varphi_2(n-\nu)\,[\nu-b,\ \nu+b]\,d\nu \ldots\ldots\ldots n > -a+b+c < a-b+c
\end{aligned}$$

Die Anwendbarkeit des *dritten* der Ausdrücke von $F\nu$ fordert endlich, dafs $\nu > a-b$ und $< a+b$ sei; die hinzukommende Bedingung, dafs $\nu > n-c$ und $< n+c$ sei. Fällt $n-c$ zwischen $a-b$ und $a+b$, also n zwischen $a-b+c$ und $a+b+c$, so wird das Integral von $n-c$ angerechnet, für kleinere n von $a-b$. Fällt $n+c$ zwischen $a-b$ und $a+b$, also n zwischen $a-b-c$ und $a+b-c$, so wird das Integral bis zu $n+c$ genommen, für gröfsere n bis zu $a+b$. Insofern der *dritte* der Ausdrücke von $F\nu$ bei dem Integrale in Betracht kommt, hat man also:

$$\begin{aligned}
\psi n &= \int_{a-b}^{n+c} \varphi_2(n-\nu)\,[\nu-b,\ a]\,d\nu, \quad \text{wenn } n > a-b-c < a-b+c \\
&= \int_{n-c}^{n+c} \varphi_2(n-\nu)\,[\nu-b,\ a]\,d\nu \ldots\ldots\ldots n > a-b+c < a+b-c \\
&= \int_{n-c}^{a+b} \varphi_2(n-\nu)\,[\nu-b,\ a]\,d\nu \ldots\ldots\ldots n > a+b-c < a+b+c
\end{aligned}$$

Sammelt man diese 9 Ausdrücke, und bezeichnet man, um abzukürzen,

$$\int_k^l \varphi_2(n-\nu)\,d\nu \int_h^i \varphi_1(\nu-x)\,\varphi x\,dx \quad \text{durch } [k,\ l;\ h,\ i]$$

so erhält man:

α. in dem Falle $a \geqq b+c$

$$[12] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \left\{\begin{aligned}
\psi n &= [-a-b,\ n+c;\ \ -a,\ \nu+b] \text{ wenn } n > -a-b-c < -a-b+c \\
\psi n &= [\ n-c,\ \ n+c;\ \ -a,\ \nu+b] \ldots\ldots n > -a-b+c < -a+b-c \\
\psi n &= [n-c,\ -a+b;\ \ -a,\ \nu+b] \\
&\quad + [-a+b,\ n+c;\ \ \nu-b,\ \nu+b] \ldots\ldots n > -a+b-c < -a+b+c \\
\psi n &= [\ n-c,\ \ n+c;\ \ \nu-b,\ \nu+b] \ldots\ldots n > -a+b+c < a-b-c \\
\psi n &= [\ n-c,\ \ a-b;\ \ \nu-b,\ \nu+b] \\
&\quad + [\ a-b,\ \ n+c;\ \ \nu-b,\ \ a\ ] \ldots\ldots n > a-b-c < a-b+c \\
\psi n &= [\ n-c,\ \ n+c;\ \ \nu-b,\ \ a\ ] \ldots\ldots n > a-b+c < a+b-c \\
\psi n &= [\ n-c,\ \ a+b;\ \ \nu-b,\ \ a\ ] \ldots\ldots n > a+b-c < a+b+c
\end{aligned}\right.$$

β. in dem Falle $a \gtreqless b+c$

$$\left.\begin{array}{lll}
\psi n = [-a-b,\ n+c;\ \ -a,\ \nu+b] & \text{wenn} & n > -a-b-c < -a-b+c \\
\psi n = [\ n-c,\ n+c;\ \ -a,\ \nu+b] & \ldots\ldots\ldots & n > -a-b+c < -a+b-c \\
\psi n = [\ n-c,\ -a+b;\ \ -a,\ \nu+b] & & \\
\quad +[-a+b,\ n+c;\ \ \nu-b,\ \nu+b] & \ldots\ldots & n > -a+b-c < a-b-c \\
\psi n = [n-c,\ -a+b;\ \ -a,\ \nu+b] & & \\
\quad +[-a+b,\ a-b;\ \ \nu-b,\ \nu+b] & & \\
\quad +[\ a-b,\ n+c;\ \ \nu-b,\ \ a\ ] & \ldots\ldots\ldots & n > a-b-c < -a+b+c \\
\psi n = [\ n-c,\ a-b;\ \ \nu-b,\ \nu+b] & & \\
\quad +[\ a-b,\ n+c;\ \ \nu-b,\ \ a\ ] & \ldots\ldots\ldots & n > -a+b+c < a-b+c \\
\psi n = [\ n-c,\ n+c;\ \ \nu-b,\ \ a\ ] & \ldots\ldots\ldots & n > a-b+c < a+b-c \\
\psi n = [\ n-c,\ a+b;\ \ \nu-b,\ \ a\ ] & \ldots\ldots\ldots & n > a+b-c < a+b+c
\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [12^*]$$

Es kann kein Interesse haben, die noch viel weitläuftiger werdende, und die Unterscheidung mehrerer besonderer Fälle fordernde vollständige Entwickelung des Ausdruckes [11], oder gar eines, noch mehr als vier Fehlerursachen berücksichtigenden, zu verfolgen und die zahlreicheren Unterbrechungen der Stetigkeit von ψn aufzusuchen. Daſs der Fortgang auf diesem Wege in abschreckende Weitläuftigkeiten führt, und doch kein, eine Uebersicht gewährendes Resultat geben kann, wird durch die Formeln [12] und [12*] anschaulich, und damit ist die Absicht ihrer Entwickelung erreicht.

7.

Es sind indessen besondere Fälle vorhanden, in welchen das Zusammenwirken mehrerer Fehlerursachen, zu einem *einfachen* Resultate führt. Mit diesen werde ich mich jetzt beschäftigen.

Einer von ihnen ist der Fall, in welchem die verschiedenen Fehlerursachen nach demselben Gesetze der Wahrscheinlichkeit wirken, welches zur vollständigen Rechtfertigung der Methode der kleinsten Quadrate nothwendig ist. Ich werde zuerst nur *zwei* solcher Fehlerursachen annehmen, also

$$\varphi x = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-hhxx}, \quad \varphi_{,} y = \frac{h_{,}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h_{,}h_{,}yy}$$

setzen, und $\mp\infty$ als Grenzen von x und y betrachten. Dann ist (Art. 4)

$$\psi n = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi x . \varphi_{,}(n-x)\, dx = \frac{hh_{,}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-hhxx-h_{,}h_{,}(n-x)^2} dx$$

welcher Ausdruck auch

$$\psi n = \frac{hh_{,} e^{\frac{-(hh_{,}n)^2}{hh+h_{,}h_{,}}}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left\{x\sqrt{(hh+h_{,}h_{,})} - \frac{hh_{,}n}{\sqrt{(hh+h_{,}h_{,})}}\right\}^2} dx$$

geschrieben werden kann, oder wenn man

$$x\sqrt{(hh+h_{,}h_{,})} - \frac{hh_{,}n}{\sqrt{(hh+h_{,}h_{,})}} = t$$

setzt:

$$\psi n = \frac{hh_{,} e^{-\frac{(hh_{,}n)^2}{hh+h_{,}h_{,}}}}{\pi\sqrt{(hh+h_{,}h_{,})}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tt} dt$$

Da das Integral bekanntlich $= \sqrt{\pi}$ ist, so wird

$$\psi n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} . \frac{hh_{,}}{\sqrt{(hh+h_{,}h_{,})}}\, e^{-\left\{\frac{hh_{,}}{\sqrt{(hh+h_{,}h_{,})}}\right\}^2 nn}$$

oder ψn erhält wieder dasselbe Gesetz, welches für die einzelnen Ursachen angenommen wurde, welches nun aber von der Constante

$$\frac{hh_{,}}{\sqrt{(hh+h_{,}h_{,})}}$$

statt der in φx und $\varphi_{,} y$ stattfindenden h und $h_{,}$, abhängig geworden ist. Setzt man $\frac{1}{\alpha\sqrt{2}}$ für h, und $\frac{1}{\beta\sqrt{2}}$ für $h_{,}$, wodurch also α und β die mittleren aus den einzelnen Ursachen entstehenden Fehler werden, so wird

$$\left(\frac{hh_{,}}{\sqrt{(hh+h_{,}h_{,})}}\right)^2 = \frac{1}{2(\alpha\alpha+\beta\beta)}$$

und es geht hieraus hervor, daſs das Gesetz der Wahrscheinlichkeit des aus beiden Fehlerursachen zusammengesetzten Fehlers n, keinen andern Unterschied von den zum Grunde gelegten Gesetzen der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen hat, als den, daſs der mittlere Werth des Quadrates von n, die Summe der mittleren Werthe der Quadrate von x und y ist. Da diese Wiederhervorbringung des zum Grunde gelegten Gesetzes bei zwei Fehlerursachen eingetreten ist, so tritt sie auch bei der Verbindung des dadurch zusammengesetzten Fehlers mit einer neuen Fehlerursache derselben Art ein, u. s. w. Man hat also den mittleren Werth des Quadrats des aus einer beliebigen Anzahl ähnlicher Fehlerursachen zusammengesetzten Fehlers

$$mm = \alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \text{etc.} \ldots$$

und

$$\psi n = \frac{1}{m\sqrt{(2\pi)}} . e^{-\frac{nn}{2mm}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [13]$$

Ein anderer, der Aufmerksamkeit würdiger Fall ist der, in welchem die einzelnen zusammenwirkenden Fehlerursachen ihren Wirkungen von gleicher Gröſse *gleiche*, übrigens aber einem beliebigen Gesetze folgende Wahrscheinlichkeiten geben. Daſs die Summe aller Wirkungen $x+y+z+\ldots.$ den Werth n erhalte, ist dann offenbar genau so wahrscheinlich, als wahrscheinlich ist, dafs die Summe der Fehler von eben so vielen Beobachtungen, als Fehlerursachen vorhanden sind, $= n$ werde. Die Aufgabe ψn zu bestimmen, ist also in diesem Falle von der von *Laplace* *) aufgelöseten Aufgabe die Summe der Fehler einer Anzahl gleichartiger Beobachtungen zu finden, nicht verschieden; und sie führt, eben so wie diese, zu dem merkwürdigen Resultate, dafs eine Anzahl voneinander unabhängiger, zwar nach einem willkürlichen, aber sämmtlich nach einem gleichen Gesetze wirkender Fehlerursachen, den Ausdruck von ψn der oft angeführten exponentiellen Formel [13] destomehr nähert *je gröfser* sie ist. *Poisson* hat später **) eine meisterhafte Analyse derselben Aufgabe gegeben; auch die Récherches sur la probabilité des jugements desselben grofsen Geometers, enthalten Vieles was sich darauf bezieht.

8.

Ich werde in diesem und dem folgenden Art. zeigen, dafs beliebig wirkende Fehlerursachen, also willkürliche Annahmen der Functionen φx, $\varphi_1 y$, $\varphi_2 z$, ... sowohl, als auch der Grenzen $\mp a$, $\mp b$, $\mp c$, ... von x, y, z, ..., unter gewissen Bedingungen, zu der Erzeugung eines Beobachtungsfehlers zusammenwirken, *dessen Gesetz der Wahrscheinlichkeit dasselbe ist* [13], *welches die Methode der kleinsten Quadrate zur wahrscheinlichsten macht.*

Der Ausdruck [7]:

$$\psi n = \frac{1}{i^\mu} \Sigma \varphi x . \varphi_1 y . \varphi_2 z \ldots .$$

in welchem $\mu + 1$ die Anzahl der voneinander unabhängigen Fehlerursachen bezeichnet, würde von der Schwierigkeit, welche die gehörigen Begrenzungen von x, y, z, ... seiner Verfolgung in den Weg legen, frei sein, wenn die durch die Bedingung $x+y+z+\ldots = n$ hervorgebrachte Abhängigkeit dieser Gröfsen voneinander nicht vorhanden wäre. Man kann ihn aber von dieser Bedingung befreien, also x, y, z .... als voneinander unabhängig betrachten, wenn man ihn, unter dem Summenzeichen, mit einer Function von $x+y+z$.... multiplicirt, welche die Eigenschaften hat, für jeden nichtverschwindenden Werth von $x+y+z+\ldots-n$ zu verschwinden und für $x+y+z+\ldots-n=0$ den Werth 1 zu erlangen. Da x, y, z, ... sich von $\frac{1}{i}$ zu $\frac{1}{i}$ verändern (Art. 4) so hat die Function:

$$\frac{\sin i\pi \left\{x+y+z+\ldots-n\right\}}{i\pi \left\{x+y+z+\ldots-n\right\}}$$

diese Eigenschaften und man erhält durch ihre Einführung:

$$\psi n = \frac{1}{i^{\mu+1}} \Sigma \varphi x . \varphi_1 y . \varphi_2 z \ldots \frac{\sin i\pi\,(x+y+z+\ldots-n)}{\pi\,(x+y+z+\ldots-n)}$$

wo das Summenzeichen sich geradezu auf die Grenzen $\mp a$, $\mp b$, $\mp c$, ... bezieht.

Man kann aber diesem Ausdrucke eine weit zweckmässigere Form geben, indem man sich erinnert, dafs

$$\frac{\sin i\pi (x+y+z+\ldots-n)}{\pi (x+y+z+\ldots-n)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-i\pi}^{i\pi} e^{(x+y+z+\ldots-n)\,u\sqrt{-1}}\,du$$

ist; denn dadurch werden x, y, z, ... voneinander abgesondert und der Ausdruck erhält die Form:

$$\psi n = \frac{1}{2\pi}\int_{-i\pi}^{i\pi}\left(\Sigma \frac{1}{i}\varphi x e^{ux\sqrt{-1}}\right)\left(\Sigma\frac{1}{i}\varphi_1 y . e^{uy\sqrt{-1}}\right)\ldots\ldots e^{-un\sqrt{-1}}\,du$$

oder, da i unendlich grofs ist und man die einzelnen Summen durch Integrale ausdrücken kann:

$$\psi n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-a}^{a}\varphi x . e^{ux\sqrt{-1}}dx\right)\left(\int_{-b}^{b}\varphi_1 y . e^{uy\sqrt{-1}}dy\right)\ldots\ldots\ldots e^{-un\sqrt{-1}}du \;***).$$

Setzt man, statt der imaginären Exponentialgröfsen unter den sich auf x, y, z, ... beziehenden Integralzeichen, ihre Ausdrücke durch die trigonometrischen Linien, z. B.

$$e^{ux\sqrt{-1}} = \cos ux + \sqrt{-1} . \sin ux$$

so kann man den in $\sqrt{-1}$ multiplicirten Theil derselben weglassen, weil er aus den zwischen den Grenzen $\mp a$, $\mp b$, $\mp c$.., genommenen Integralen (wegen $\varphi x = \varphi(-x)$, $\varphi_1 y = \varphi_1(-y)$ u. s. w.) verschwindet. Ferner kann man von

$$e^{-un\sqrt{-1}} = \cos un - \sqrt{-1}\,\sin un$$

gleichfalls den in $\sqrt{-1}$ multiplicirten Theil weglassen, da das von einer negativen, bis zu einer gleich grofsen positiven Grenze genommene Integral von

$$\cos ux . \cos uy . \cos uz \ldots \sin un . du$$

verschwindet. Man erhält also

$$[14] \ldots\ldots\ldots\ldots \psi n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-a}^{a}\varphi x . \cos ux\,dx\right)\left(\int_{-b}^{b}\varphi_1 y . \cos uy\,dy\right)\ldots\ldots \cos un . du$$

*) Theorie analytique des probabilités. Paris 1812. p. 304.

**) Connoissance des Tems 1827 p. 273.

***) Auf eine ähnliche Formel, in welcher aber die Begrenzungen aller Integrale *gleich* sind, gelangt *Poisson* (probabilités des jugements p. 256) bei der Auflösung einer andern Aufgabe.

welcher Ausdruck für jede Anzahl Fehlerursachen und jede Annahme von φx, $\varphi_1 y$, $\varphi_2 z$, ... richtig, auch nur der Form nach von den im 6ten Art. gegebenen Ausdrücken, z. B. [11], verschieden ist.

Ehe ich diesen Ausdruck weiter verfolge, werde ich seine Anwendung durch ein Beispiel erläutern. Ich werde das *zweite* der im 4ten Art. ausgeführten Beispiele wieder vornehmen, also

$$\varphi x = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{(aa-xx)}};\quad \varphi_1 y = \frac{1}{2b}$$

setzen. Man hat also nach [14], indem man zuerst nach y integrirt:

$$\psi n = \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-a}^{a}\frac{\cos ux}{\sqrt{(aa-xx)}}dx\right)\frac{\sin ub}{ub}\cos un\,.\,du$$

oder

$$\psi n = \frac{1}{8b\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-a}^{a}\Big\{\sin u(x+n+b)+\sin u(x-n+b)-\sin u(x+n-b)-\sin u(x-n-b)\Big\}\frac{du\,dx}{u\sqrt{(aa-xx)}}$$

Integrirt man zuerst in Beziehung auf u und erinnert man sich, dafs

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin ru\,.\,\frac{du}{u}$$

für jeden positiven Werth von $r = \pi$, für jeden negativen $= -\pi$ ist, so wird z. B.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-a}^{a}\sin u(x+n+b)\frac{du\,dx}{u\sqrt{(aa-xx)}} = \pi\int_{-n-b}^{a}\frac{dx}{\sqrt{(aa-xx)}} - \pi\int_{-a}^{-n-b}\frac{dx}{\sqrt{(aa-xx)}}$$

wofür ich, um abzukürzen $\pi[-n-b,\ a] - \pi[-a,\ -n-b]$ schreiben werde. Man erhält also:

$$\psi n = \frac{1}{8b\pi}\Big\{[-n-b,a]-[-a,-n-b]+[n-b,a]-[-a,n-b]-[-n+b,a]+[-a,n+b]-[n+b,a]+[-a,n+b]\Big\}$$

Wenn

1tens $n > -a-b$ und $< -a+b$, oder $-n > a-b$ und $< a+b$

so ist $n-b < -a$ und $-n+b > a$, weshalb die 3te und 6te dieser Gröfsen $= [-a,a]$ werden, die 4te und 5te aber verschwinden. Setzt man, wie im 4ten Art.,

$$\sin u = \frac{n+b}{a};\quad \sin u' = \frac{n-b}{a}$$

so wird also

$$\psi n = \frac{1}{8b\pi}\Big\{(\tfrac{1}{2}\pi+u)-(\tfrac{1}{2}\pi-u)+\pi+\pi-(\tfrac{1}{2}\pi-u)+(\tfrac{1}{2}\pi+u)\Big\};$$

wenn 2tens

$n > -a+b$ und $< a-b$, oder $-n > -a+b$ und $< a-b$

so geht keine der Gröfsen $-n-b$, $n-b$, $-n+b$, $n+b$ über die Grenzen $\mp a$ hinaus und alle Glieder des Ausdruckes bleiben ungeändert, so dafs man erhält:

$$\psi n = \frac{1}{8b\pi}\Big\{(\tfrac{1}{2}\pi+u)-(\tfrac{1}{2}\pi-u)+(\tfrac{1}{2}\pi-u')-(\tfrac{1}{2}\pi+u')-(\tfrac{1}{2}\pi+u')+(\tfrac{1}{2}\pi-u')-(\tfrac{1}{2}\pi-u)+(\tfrac{1}{2}\pi+u)\Big\}$$

wenn 3tens

$n > a-b$ und $< a+b$, oder $-n > -a-b$ und $< -a+b$

so ist $-n-b < -a$ und $n+b > a$, weshalb das 1te und 8te der Glieder des Ausdruckes $= [-a,\ a]$ werden, das 2te und 7te aber verschwinden. Man erhält also

$$\psi n = \frac{1}{8b\pi}\Big\{\pi+(\tfrac{1}{2}\pi-u')-(\tfrac{1}{2}\pi+u')-(\tfrac{1}{2}\pi+u')+(\tfrac{1}{2}\pi-u')+\pi\Big\}$$

Dieses alles ist übereinstimmend mit den im 4ten Art. gefundenen Formeln.

Die früher auf die Begrenzungen fallende Schwierigkeit wird durch den Ausdruck [14], auf die in Beziehung auf u auszuführende Integration übertragen. Es ist kein Grund vorhanden, entweder der Form [11] oder der Form [14] *im Allgemeinen* einen Vorzug einzuräumen, sondern die vortheilhafteste Wahl zwischen beiden hängt von der Beschaffenheit der Functionen φx, $\varphi_1 y$, $\varphi_2 z$, ... ab. Allein da der vollständige Ausdruck von ψn, immer wenn die Begrenzungen der einzelnen Fehlerursachen nicht $\mp\infty$ sind, *nicht stetig* ist, und seine Anwendung zur Bearbeitung einer Beobachtungsreihe, aus diesem Grunde, in unüberwindliche Weitläuftigkeiten führen würde, so ist eine *Näherung*, welche sich von dem Ausdrucke von ψn wenig entfernt und die Unterbrechungen seiner Stetigkeit nicht besitzt, wirklich wünschenswerther als der streng richtige Ausdruck. Kommt es darauf an, die Frage: ob eine solche Näherung möglich ist, zu beantworten, und, im Falle ihrer Bejahung, dieselbe aufzusuchen, so erscheint der Vorzug der gegenwärtigen Form, vor der früheren, sehr grofs.

9.

Laplace hat bekanntlich gezeigt, dafs die Entwickelung von Ausdrücken, welche als Functionen *grofser Zahlen* betrachtet werden können, durch die Berücksichtigung dieses Umstandes, im Allgemeinen erleichtert werden kann. Sowohl er selbst, als auch *Poisson*, haben hieraus, bei der Auflösung vieler Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung, grofsen Nutzen gezogen, und auch die gegenwärtige wird dadurch, falls sie das Zusammenwirken *vieler* Fehlerursachen von nicht sehr ungleicher Gröfse betrifft, näherungsweise auflöslich. In diesem Falle ist es klar, dafs das im Ausdrucke [14] enthaltene Product:

$$\left(\int_{-a}^{a} \varphi x . \cos ux\, dx\right)\left(\int_{-b}^{b} \varphi_{,}y . \cos uy\, dy\right)\left(\int_{-c}^{c} \varphi_2 z \cos uz\, dz\right) \ldots\ldots$$

welches den gröfsten Werth, dessen er fähig ist, erlangt, wenn $u = 0$ gesetzt wird, für einigermaafsen beträchtliche Werthe von ux, uy, uz, ..., deren Cosinusse merklich kleiner werden als 1, sehr klein werden mufs.

Wenn man es daher als eine Function von u betrachtet, so ist es zweckmäfsig, ihr die Form: Me^{-U} zu geben, in welcher U eine Function von u ist, die für $u = 0$ verschwindet und mit u wächst, und in welcher M den gröfsten Werth des Products, also da $\int_{-a}^{a} \varphi x\, dx = 1$, $\int_{-b}^{b} \varphi_{,}y . dy = 1$, u.s.w. sind, die Zahl 1 bedeutet. Ich wähle also die Form:

$$[15] \ldots\ldots\ldots\ldots e^{-U} = \left(\int_{-a}^{a} \varphi x \cos ux\, dx\right)\left(\int_{-b}^{b} \varphi_1 y \cos uy\, dy\right)\left(\int_{-c}^{c} \varphi_2 z \cos uz\, dz\right) \ldots\ldots\ldots$$

und werde nun U aufsuchen.

Entwickelt man $\varphi x . \cos ux\, dx$ in die Reihe

$$\varphi x\, dx \left\{1 - \frac{uu\,xx}{2} + \frac{u^4 x^4}{24} - \frac{u^6 x^6}{720} + \ldots\right\}$$

und bezeichnet man:

$$\int_{-a}^{a} xx\,\varphi x\, dx = \alpha^2;\ \int_{-a}^{a} x^4 \varphi x\, dx = \alpha_1{}^4;\ \int_{-a}^{a} x^6\, \varphi x\, dx = \alpha_2^6; \ldots$$

wo also α^2 den mittleren Werth des Quadrats des aus der ersten Ursache hervorgehenden Fehlers, α_1^4 den mittleren Werth seines Biquadrats u. s. w. bedeuten, so hat man

$$\int_{-a}^{a} \varphi x \cos ux\, dx = 1 - \frac{\alpha^2}{2} uu + \frac{\alpha_1^4}{24} u^4 - \frac{\alpha_2^6}{720} u^6 + \ldots$$

und eben so

$$\int_{-b}^{b} \varphi_{,}y \cos uy\, dy = 1 - \frac{\beta^2}{2} uu + \frac{\beta_1^4}{24} u^4 - \frac{\beta_2^6}{720} u^6 + \ldots$$

$$\int_{-c}^{c} \varphi_2 z . \cos uz\, dz = 1 - \frac{\gamma^2}{2} uu + \frac{\gamma_1^4}{24} u^4 - \frac{\gamma_2^6}{720} u^6 + \ldots$$

u. s. w.

Nimmt man, auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens, die Logarithmen von [15] und setzt man

$$\begin{aligned}
[\alpha^2] &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \ldots\\
[\alpha^4] &= \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \ldots\\
[\alpha_1^4] &= \alpha_1^4 + \beta_1^4 + \gamma_1^4 + \ldots\\
[\alpha^6] &= \alpha^6 + \beta^6 + \gamma^6 + \ldots\\
[\alpha^2\alpha_1^4] &= \alpha^2\alpha_1^4 + \beta^2\beta_1^4 + \gamma^2\gamma_1^4 + \ldots\\
[\alpha_2^6] &= \alpha_2^6 + \beta_2^6 + \gamma_2^6 + \ldots
\end{aligned}$$

so erhält man

$$[16] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots U = \frac{[\alpha^2]}{2} uu + \frac{3[\alpha^4] - [\alpha_1^4]}{24} u^4 + \frac{30[\alpha^6] - 15[\alpha^2\alpha_1^4] + [\alpha_2^6]}{720} u^6 + \ldots$$

Ich werde zuerst nur das erste Glied dieses Ausdruckes berücksichtigen, also, der Formel [14] gemäfs,

$$[17] \ldots\ldots\ldots \psi n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-[\alpha^2]}{2} uu} \cos un . du$$

annehmen. Das in diesem Ausdruck vorkommende bestimmte Integral hat *Laplace*, wie ich glaube zuerst, gefunden *); aufser diesem Integrale werde ich später noch einige andere, die darauf reducirt werden können, gebrauchen und deshalb alle zugleich hier anführen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{[\alpha^2]}{2} uu} \cos un . du = \frac{\sqrt{(2\pi)}}{\sqrt{[\alpha^2]}} e^{-\frac{nn}{2[\alpha^2]}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-\frac{[\alpha^2]}{2} uu} \cos un . du = \frac{\sqrt{(2\pi)}}{[\alpha^2]^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{nn}{2[\alpha^2]}} \left(1 - \frac{nn}{[\alpha^2]}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^4 e^{-\frac{[\alpha^2]}{2} uu} \cos un . du = \frac{\sqrt{(2\pi)}}{[\alpha^2]^{\frac{5}{2}}} e^{-\frac{nn}{2[\alpha^2]}} \left(3 - \frac{6 . nn}{[\alpha^2]} + \frac{n^4}{[\alpha^2]^2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^6 e^{-\frac{[\alpha^2]}{2} uu} \cos un . du = \frac{\sqrt{(2\pi)}}{[\alpha^2]^{\frac{7}{2}}} e^{-\frac{nn}{2[\alpha^2]}} \left(15 - \frac{45 . nn}{[\alpha^2]} + \frac{15 . n^4}{[\alpha^2]^2} - \frac{n^6}{[\alpha^2]^3}\right)$$

Man erhält jede folgende dieser Formeln durch zweimalige Differentiirung der vorangehenden in Beziehung auf n.

Der Ausdruck [17] verwandelt sich hierdurch in:

$$[18] \ldots\ldots\ \ldots \psi n = \frac{1}{\sqrt{[\alpha^2]}\sqrt{(2\pi)}} . e^{-\frac{nn}{2[\alpha^2]}}$$

welche Formel jedoch nur in *den* Fällen als eine Annäherung an den wahren Ausdruck von ψn angesehen werden kann, in welchen gezeigt werden kann, dafs der Einflufs der weggelassenen Glieder von [16] von geringer Bedeutung ist.

*) Theorie analytique des probabilités p. 96.

Man vervollständigt den Ausdruck [17], indem man ihn, unter dem Integralzeichen mit

$$e^{\frac{[\alpha^2]}{2}uu-U} = e^{\frac{3[\alpha^4]-[\alpha_1{}^4]}{24}u^4 \quad \frac{80[\alpha^6]-15[\alpha^2.\alpha_1{}^4]+[\alpha_2{}^6]}{720}u^6 - etc.\ldots}$$

oder mit

$$1-\frac{3[\alpha^4]-[\alpha_1^4]}{24}u^4-\frac{30[\alpha^6]-15[\alpha^2.\alpha_1^4]+[\alpha_2^6]}{720}u^6-\text{etc.}\ldots$$

multiplicirt. Man erhält dadurch

$$\psi n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{[\alpha^2]}{2}uu}\cos un.du \quad \frac{3[\alpha^4]-[\alpha_1^4]}{48\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u^4 e^{-\frac{[\alpha^2]}{2}uu}\cos un.du$$
$$\frac{30[\alpha^6]-15[\alpha^2.\alpha_1^4]+[\alpha_2^6]}{1\,440\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u^6 e^{-\frac{[\alpha^2]}{2}uu}\cos un\,du - \text{etc.}\ldots$$

und durch die Anwendung der angeführten Ausdrücke der hier vorkommenden Integrale:

$$\psi n = \frac{e^{-\frac{nn}{2[\alpha^2]}}}{\sqrt{[\alpha^2]}\sqrt{(2\pi)}}\left\{1-\frac{3[\alpha^4]-[\alpha_1^4]}{24[\alpha^2]^2}\left(3-\frac{6nn}{[\alpha^2]}+\frac{n^4}{[\alpha^2]^2}\right)-\frac{30[\alpha^6]-15[\alpha^2.\alpha_1^4]+[\alpha_2^6]}{720[\alpha^2]^3}\left(15-\frac{45nn}{[\alpha^2]}+\frac{15n^4}{[\alpha^2]^2}-\frac{n^6}{[\alpha^2]^3}\right)-\ldots\right\}\ldots[19]$$

Hieraus geht hervor, daſs der Ausdruck [18] eine Annäherung an ψn ist, wenn die jetzt hinzugekommenen Glieder, nämlich:

$$-\frac{e^{-\frac{nn}{2[\alpha^2]}}}{\sqrt{[\alpha^2]}\sqrt{(2\pi)}}\,\frac{3[\alpha^4]-[\alpha_1^4]}{24[\alpha^2]^2}\left(3-\frac{6nn}{[\alpha^2]}+\frac{n^4}{[\alpha^2]^2}\right)$$
$$-\frac{e^{-\frac{nn}{2[\alpha^2]}}}{\sqrt{[\alpha^2]}\sqrt{(2\pi)}}\,\frac{30[\alpha^6]-15[\alpha^2.\alpha_1{}^4]+[\alpha_2^6]}{720[\alpha^2]^3}\left(15-\frac{45nn}{[\alpha^2]}+\frac{15n^4}{[\alpha^2]^2}-\frac{n^6}{[\alpha^2]^3}\right)$$

u. s. w.

für alle Werthe von n sehr klein sind. Man bemerkt leicht, daſs sie den gröſsten Werth, dessen sie fähig sind, für $n=0$ erlangen, also für keinen Werth dieser Gröſse der Grenze:

$$-\frac{1}{\sqrt{[\alpha^2]}\sqrt{(2\pi)}}\left\{\frac{3[\alpha^4]-[\alpha_1^4]}{8[\alpha^2]^2}+\frac{30[\alpha^6]-15[\alpha^2.\alpha_1^4]+[\alpha_2^6]}{48[\alpha^2]^3}+\text{etc.}\ldots\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots[20]$$

überschreiten.

Die Gröſsen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ können immer als von gleicher Ordnung betrachtet werden, eben so $\beta, \beta_1, \beta_2, \ldots$; $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ u. s. w. Wenn auch $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ als von gleicher Ordnung angesehen werden können, oder wenn die einzelnen Fehlerursachen mittlere Fehler von gleicher Ordnung hervorbringen, von der Ordnung einer Gröſse k, und wenn die Anzahl der zusammenwirkenden Fehlerursachen, wie oben, durch $\mu+1$ bezeichnet wird, so ist $[\alpha^2]$ von der Ordnung von $(\mu+1)k^2$; $[\alpha^4]$ und $[\alpha_1^4]$ sind von der Ordnung von $(\mu+1)k^4$; $[\alpha^6]$, $[\alpha^2\alpha_1^4]$ und $[\alpha_2^6]$ von der Ordnung von $(\mu+1)k^6$, u. s. w. Man erhält also das erste Glied des eben entwickelten Ausdruckes von der Ordnung von $\frac{1}{\mu+1}$, das zweite Glied desselben von der Ordnung von $\frac{1}{(\mu+1)^2}$, u. s. w. Wenn also die Annahme, daſs $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ von gleicher Ordnung sind, statthaft ist, so ist der Ausdruck [18] *mit desto gröſserem Rechte als eine Annäherung an ψn anzusehen, je gröſser die Anzahl der zusammenwirkenden Fehlerursachen ist.* Es ist dagegen kein Grund vorhanden, ihn für eine Näherung zu halten, wenn eine oder einige der Fehlerursachen beträchtlich gröſsere Wirkungen äuſsern als die übrigen, oder wenn ihre Anzahl nicht groſs ist. Uebrigens bemerkt man leicht, daſs die Reihe [19] nicht convergiren, also auch nicht Folgerungen zum Grunde gelegt werden kann, welche nicht aus dem schnellen Kleinerwerden ihrer früheren Glieder allein gezogen werden können. Die Natur des Ausdruckes von ψn bringt nämlich, wie ich vorher gezeigt habe, mit sich, daſs er eine nicht-stetige Function von n ist; dieser Eigenschaft kann die Reihe nur entsprechen, wenn sie nicht convergirt, und *allgemein* folgt hieraus, daſs ψn nicht durch eine convergirende Reihe ausgedrückt werden kann. Andere Anwendungen, welche, in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, von dem Principe der *groſsen Zahlen* gemacht worden sind und gemacht werden können, sind im Allgemeinen, in dieser Beziehung, in einem gleichen Falle.

10.

Fälle, in welchen nicht *viele* von einander unabhängige Ursachen zusammenwirkten, um einen Beobachtungsfehler zu erzeugen, sind wahrscheinlich sehr selten; selbst in sehr einfach erscheinenden Beobachtungsarten können oft zahlreiche Ursachen ihrer Fehler nachgewiesen werden. Um dieses durch ein Beispiel zu erläutern, werde ich annehmen, daſs eine Reihe von Entfernungen eines Fixsterns von dem Scheitelpunkte oder Pole, mit einem, nach *Reichenbach*scher Art eingerichteten Meridiankreise beobachtet sei, und versuchen, die Ursachen der Fehler aufzuzählen, welche sich in der Zusammenstellung ihrer Resultate verrathen. Das Instrument muſs zuerst auf den Stern eingestellt werden, und diese Einstellung kann aus verschiedenen Ursachen fehlerhaft werden, nämlich 1tens, weil eine Grenze der Kraft des Fernrohrs vorhanden ist, innerhalb welcher seine Richtung willkürlich bleibt; 2tens weil der Punkt des Bildes des Sterns, den man in die Absehenslinie zu bringen beabsichtigt, innerhalb gewisser Grenzen willkürlich sein kann, welche bei großsen und hellen Sternen ohne Zweifel weiter auseinander liegen, als bei kleineren weniger hellen, und woraus hervorgehen kann, dafs bei Nacht und bei Tage, oder bei hellerem und weniger hellem Himmel, verschiedene Punkte gewählt werden; 3tens weil der Stern sich selten oder nie ruhig, sondern in zitternder, von dem Mangel des Gleichgewichts der Luft herrührender Bewegung zeigt, und also eine, zwischen den äufsersten Grenzen dieser Bewegung liegende Wahl getroffen werden mufs. Hiezu gesellen sich Fehlerursachen, welche von der Einstellung des Instruments ganz unabhängig sind, z. B. 4tens ein Einflufs der Elasticität seines Metalls, welcher, zufälligen äufseren Umständen zufolge, bald diesen, bald jenen Werth erhalten, auch zur Folge haben kann, dafs die Richtung des Fernrohrs, in dem Augenblicke des Ablesens der Beobachtung, nicht mehr dieselbe ist, welche sie bei seiner Einstellung war; 5tens eine Unsicherheit der Angabe des Kreises, welche aus kleinen Ungleichheiten der Entfernungen seiner eigenen Theilstriche und der Theilstriche der Nonien hervorgeht, und welcher sich als veränderlicher Fehler äufsert, da gewöhnlich, bei jeder Wiederholung der Beobachtung, andere Theilstriche zur Coincidenz gelangen; 6tens die aus der begrenzten Schärfe des optischen Hülfsmittels, wodurch die Ablesungen erlangt werden, hervorgehende Unsicherheit; 7tens die aus dem Umstande hervorgehenden Fehler, dafs die Schätzung der Angaben der Nonien nur z. B. bis auf die Hälfte des kleinsten Zwischenraumes von 2″, welchen sie angeben, getrieben werden kann, wodurch alle an den vier Nonien dieser Instrumente abgelesenen Beobachtungen, sich immer mit einer vollen, einer viertel, halben oder dreiviertel Secunde, nie aber mit anderen Theilen derselben schliefsen. Ferner kommen dazu äufsere Umstände, z. B. 8tens der Einflufs der Körperwärme des Beobachters auf den Kreis oder andere Theile des Apparats; 9tens der Einflufs einer, im Allgemeinen vorhandenen, Verschiedenheit der Wärme zwischen dem unteren und oberen Rande des Kreises, welcher Spannungen in seinem Metalle und Veränderungen seiner Figur erzeugt. Auch veranlafst 10tens die Voraussetzung, dafs die Wasserwage der Alhidade bei jeder Ablesung, sich im nicht beeinträchtigten Zustande des Gleichgewichts befinde, einen zufälligen Fehler; 11tens geht ein solcher aus der Annahme hervor, dafs das Instrument zwischen zwei mit einander zu vergleichenden Beobachtungen in vollkommen gleichem Zustande geblieben sei, während doch die Bemerkung von Aenderungen, welche es in kürzerer oder längerer Zeit erfährt, nicht selten ist. Mit dem sogenannten Beobachtungsfehler vermischt sich auch 12tens der Einflufs, welchen die fehlerhafte Annahme hat, dafs der Zustand der Atmosphäre, so wie Barometer und Thermometer ihn angeben, genau der sei, wonach die Gröfse der jedesmaligen Strahlenbrechung sich richtet, und 13tens der Einflufs kleiner Unvollkommenheiten der Reductionselemente der Beobachtungen. Ich werde vermuthlich in dieser Aufzählung von Ursachen, welche zur Erzeugung eines scheinbaren Beobachtungsfehlers zusammenwirken, mehrere übersehen haben, so wie ich der zufälligen Unachtsamkeit in der Ausführung einzelner Momente der Beobachtungen, nicht vortheilhafter oder unruhiger Beleuchtung der Fäden und der Theilstriche, der Einflüsse der Kälte auf das Instrument u. s. w. nicht habe erwähnen wollen. Immer aber wird durch diese Aufzählung von Fehlerursachen der Zweck erreicht, bemerklich zu machen, dafs selbst diese einfache Beobachtungsart einen Gesammtfehler zeigen mufs, welcher aus zahlreichen Ursachen entsteht, deren jede von den übrigen unabhängig wirkt.

Es ist das Bestreben des Künstlers, welcher ein Instrument verfertigt, seine *einzelnen* Theile so anzuordnen, dafs sie das was sie leisten sollen, mit *gleichmäfsiger* Genauigkeit leisten. Es würde unnütz sein, einem Kreise einen grofsen Halbmesser und bis auf Kleinigkeiten sichere Theilungen zu geben, wenn er nur ein kleines, wenig sichere Einstellungen gewährendes Fernrohr tragen sollte. Wenn es dagegen in der Absicht liegt, in den ersteren Beziehungen das Aeusserste zu leisten, so ist jedesmal auch die Absicht vorhanden, ein dieser Leistung angemessenes Fernrohr anzuwenden. Auch die Wasserwage, wodurch der Scheitelpunkt erkannt werden soll, giebt der Künstler *gleichmäfsige* Vollendung, und sein ganzes Nachdenken wendet er an, um *alle* Theile des Instruments so auszuführen, dafs nicht die Mangelhaftigkeit des einen, den Vortheil vernichte, welchen die Vollendung der übrigen hervorbringt. Der Beobachter, der das Instrument anwendet, bestrebt sich gleichfalls, dieser Anwendung eine der Genauigkeit des Instruments *gleichmäfsige* Sicherheit zu geben. Er wird Beobachtungen als ungenügend erkennen, wenn die äufseren Umstände so ungünstig sind, dafs sie ihm Zweifel erzeugen, welche er für *ungleichmäfsig* mit der Genauigkeit des Apparats hält. Während er z. B. eine, bis auf einige Secunden gehende Unsicherheit, welche das Zittern der Luft verursacht, für sehr bedeutend hält, wenn er mit einem grofsen und genauen Instrumente beobachtet, mufs sie ihm unbedeutend erscheinen, wenn er ein mit einem schwachen Fernrohre versehenes Instrument von kleinem Halbmesser, welches, auch bei der ruhigsten Luft, viel gröfsere Unsicherheiten übrig lassen würde, anwendet. Es ist nicht die *Gröfse* der Unsicherheit, welche diesen Unterschied veranlafst, sondern nur ihr *verschiedenes Verhältnifs* zu anderen vorhandenen Fehlerursachen.

Aus dieser Darstellung der Beobachtungen im Allgemeinen und der wesentlichen Beschaffenheit eines guten Apparats und einer, ihm angemessenen Beobachtungsreihe, scheint mir hervorzugehen, dafs man die *beiden* Annahmen, unter welchen das im 9ten Art. erlangte Resultat näherungsweise richtig ist, nicht für so selten gerechtfertigt halten darf, als man, ohne genauere Betrachtung der Beobachtungsarten und Apparate, vielleicht geneigt sein mögte. Die erste dieser Annahmen ist, dafs *viele* Ursachen zur Hervorbringung des Beobachtungsfehfehlers *zusammenwirken*; die zweite, dafs unter den, aus den einzelnen Ursachen hervorgehenden mittleren Fehlern, *keiner die übrigen beträchtlich übertreffe.* Wenn diese Annahmen erlaubt sind, nähert sich immer die Wahrscheinlichkeit des Gesammtfehlers n einer Beobachtung, der Form:

$$\psi n = \frac{1}{m\sqrt{(2\pi)}} \cdot e^{-\frac{nn}{mm}}$$

d.h. demselben Gesetze, wovon *Gaufs* zuerst gezeigt hat, dafs es das von der Vorschrift des arithmetischen Mittels geforderte ist.

11.

Ohne Ausnahme kann zwar die Richtigkeit der beiden Annahmen, worauf dieses Resultat beruhet, nicht vorausgesetzt werden, und ich habe selbst, im 2ten Art., einen Fall angeführt, in welchem sie nicht stattfand; dort war eine, die übrigen *beträchtlich übertreffende* Fehlerursache vorhanden und sie folgte für sich allein einem ganz anderen Gesetze, wefshalb dieses in den Beobachtungen vorzugsweise hervortrat. Aber es scheint, dafs die Beobachtungsarten, wenigstens die astronomischen, *selten* so einfach sind, dafs sie nicht die Annahmen und ihr Resultat mehr oder weniger rechtfertigen sollten.

Ich halte für zweckmäfsig, hierüber das Zeugnifs von astronomischen Beobachtungen selbst anzuführen. Ich habe (in den Fundamentis Astronomiae pro Ao. 1755 p. 19) abgezählt, wie viele Fehler sich, bei verschiedenen Beobachtungsreihen *Bradleys*, innerhalb enger, von 0 bis zu den gröfsten Fehlern fortgehender Begrenzungen fanden. Die eine dieser Abzählungen habe ich auf 300 Beobachtungen der Declinationen einiger häufig beobachteten Sterne gegründet; die andere auf 300 Beobachtungen der Rectascensionen in Zeit ausgedrückt; die dritte auf 470 Beobachtungen weit zusammengesetzterer Art, nämlich der Rectascensionen einiger Fixsterne, so wie sie aus ihren Rectascensionsunterschieden von der Sonne, deren Rectascensionen aus ihren beobachteten Declinationen berechnet worden sind, hervorgehen. Diese Abzählungen werde ich jetzt auf den Fall von 100 Beobachtungen reduciren, und sie mit der auf die Annahme

$$\psi n = \frac{1}{m\sqrt{(2\pi)}} e^{-\frac{nn}{2mm}}$$

gegründeten Theorie, so vergleichen, dafs ich mm durch die Summe der Quadrate der Fehler bestimme, während, in den Fund. Astr. selbst, eine andere Bestimmungsart angewandt worden ist.

1. Beobachtungen der Declinationen

$m = \pm 1''6237$

Grenzen.	Beobb.	Theorie.	Untersch.
0″0 — 0″4	22,0	19,5	— 2,5
0,4 — 0,8	19,3	18,3	— 1,0
0,8 — 1,2	18,3	16,2	— 2,1
1,2 — 1,6	9,3	13,6	+ 4,3
1,6 — 2,0	9,0	10,6	+ 1,6
2,0 — 2,4	7,7	7,9	+ 0,2
2,4 — 2,8	3,3	5,5	+ 2,2
2,8 — 3,2	5,0	3,6	— 1,4
3,2 — 3,6	2,7	2,2	— 0,5
3,6 — 4,0	1,3	1,3	0,0
4,0 etc....	2,0	1,4	— 0,6

2. Beobachtungen der Rectascensionen.

$m = \pm 0''2283$ Zeit.

Grenzen.	Beobb.	Theorie.	Untersch.
0″0 — 0″1	38,0	33,5	— 4,5
0,1 — 0,2	28,0	28,0	0,0
0,2 — 0,3	17,7	19,2	+ 1,5
0,3 — 0,4	8,0	10,9	+ 2,9
0,4 — 0,5	4,7	5,1	+ 0,4
0,5 — 0,6	2,0	2,0	0,0
0,6 — 0,7	1,0	0,7	— 0,3
0,7 — 0,8	0,3	0,2	— 0,1
0,8 — 0,9	0,3	0,0	— 0,3

3. Beobachtung der absoluten Rectascensionen.

$m = \pm 0''4033$ Zeit.

Grenzen.	Beobb.	Theorie.	Untersch.
0″0 — 0″1	20,0	19,6	— 0,4
0,1 — 0,2	18,7	18,4	— 0,3
0,2 — 0,3	16,6	16,3	— 0,3
0,3 — 0,4	12,4	13,6	+ 1,2
0,4 — 0,5	10,8	10,6	— 0,2
0,5 — 0,6	7,7	7,8	+ 0,1
0,6 — 0,7	5,5	5,4	— 0,1
0,7 — 0,8	3,0	3,6	+ 0,6
0,8 — 0,9	2,1	2,1	0,0
0,9 — 1,0	1,5	1,3	— 0,2
1,0 etc....	1,7	1,3	— 0,4

Diese drei Beobachtungsreihen sind von sehr verschiedener Art; ich werde aber noch ein viertes Beispiel anführen, bei welchem die Fehler durch wieder andere Ursachen hervorgebracht seyn müssen. Ich nehme es von 100 Rectascensionen des Polarsterns her, welche ich in den J. 1813 bis 1815 mit dem älteren Passagen-Instrumente der Königsberger Sternwarte beobachtet habe.

4. Rectascensionen des Polarsterns.

$m = \pm 1''3093$ Zeit.

Grenzen.	Beobb.	Theorie.	Untersch.
0"0 — 0 4	25	24,0	— 1,0
0,4 — 0,8	22	21,9	— 0,1
0,8 — 1,2	19	18,2	— 0,8
1,2 — 1,6	11	13,7	+ 2,7
1,6 — 2,0	9	9,5	+ 0,5
2,0 — 2,4	8	6,0	— 2,0
2,4 — 2,8	2	3,4	+ 1,4
2,8 — 3,2	3	1,8	— 1,2
3,2 — 3,6	1	0,9	— 0,1
3,6 etc....	0	0,6	+ 0,6

Die aus diesen vier Beispielen hervorgehende nahe Uebereinstimmung der Erfahrung mit der Forderung, welche die Theorie, unter der Voraussetzung des Stattfindens der beiden oft erwähnten Annahmen macht, ist geeignet dieses zu rechtfertigen; und zwar desto geeigneter, je zahlreicher die von anderen Reihen astronomischer Beobachtungen hergenommenen Beispiele sind, welche ich *für* dasselbe hätte anführen können. Es ist nicht wahrscheinlich, dafs die *einzelnen* Ursachen, aus deren Zusammenwirkung die Fehler so verschiedenartiger Beobachtungsreihen entstehen, jede für sich, dasselbe exponentielle Gesetz der Wahrscheinlichkeit ihrer Wirkungen haben sollten, und dafs, aus *diesem* Grunde, dem 7ten Art. zufolge, dieses Gesetz sich auch in ihrer Zusammenwirkung zeigte; vielmehr ist es wahrscheinlich, und durch die früher angeführten Verfolgungen specieller Fälle auch anschaulich geworden, dafs diese einzelnen Ursachen nach sehr verschiedenen Gesetzen wirken, und die nahe Uebereinstimmung zwischen der Erfahrung und dem exponentiellen Gesetze, nur durch das *Zusammenwirken* einer grofsen Zahl derselben hervorgebracht wird.

Diese Untersuchung führt also, im Allgemeinen (nicht ohne mögliche Ausnahme, deren eine ich angeführt habe) zu dem Gesetze der Wahrscheinlichkeit der Fehler zurück, auf welches die Methode der kleinsten Quadrate Anfangs gegründet wurde, und welches spätere Betrachtungen über die Willkür, welche das Gesetz der Fehler immer hat, wenn die Art ihrer Entstehung aus *einer* Ursache nicht bekannt ist, wieder aufzugeben veranlafsten.

Bessel.

Verzeichnifs meiner astronomischen Uhren, welche ich für beigesetzte Preise zu verkaufen beabsichtige.

	ℳ	Holl. Duc.
1. Ein Regulator von ***P. Bofenschen*** in Hannover in Mahagoni-Kasten mit Stiftengang und Quecksilber-Pendel. Geht einen Monat.........für	300	38
2. Ein Regulator von ***Lion*** vor 10 Jahren in Hamburg gemacht, mit Stiftengang und Rostpendel von 5 stählernen und 4 messingenen Stangen mit Gewichten, 8tägig, mit Schlüssel aufzuziehen für..................................	200	25
3. Ein Regulator von ***J. A. Libbertz*** in Hamburg mit Emaille-Zifferblatt, auf eine besondere Art eingerichtet, indem das Werk nur 3 Räder und 2 Getriebe hat; die Erfindung ist von Dr. ***Franklin*** in Philadelphia. 8tägig und mit Schnur zum Aufziehen und QuecksilberPendel für....	250	32
4. Ein Regulator in Mahagoni Kasten mit viereckigem Zifferblatt von ***J. A. Libbertz*** in Hamburg. Mit Schlüssel aufzuziehen und Quecksilber-Pendel. *Grahams* Hacken. 8tägig. für	260	33
5. Ein 8tägiger Box-Chronometer von ***Levitt*** Nr. 512 in einem Kasten, für....................	750	94
Dieser Chronometer ist jetzt beim Uhrmacher ***Lorentzen*** in Altona, der ihn sehr lobt.		
6. Ein alter Regulator von ***J. Magellan*** in Mahagoni-Kasten und mit Quecksilber-Pendel, auf Sternzeit ajustirt. *Grahams* Hacken. Mit Schlüssel aufzuziehen, für.....................	200	25
Ferner ein Gregorianisches 5füfsiges Teleskop mit Gestell für	200	25

Hamburg, Vorstadt St. Pauli hinter der Reeperbahn, im Monat Juli 1838.

Th. Blacker.

Inhalt.

Altona 1838. October 4.