Der Schwingungskreis mit eisenhaltiger Induktivität.

Von

J. Biermanns.

Bei bestimmten, zufälligen oder beabsichtigten Schaltungen können in Hochspannungsnetzen Resonanzkreise auftreten, welche die Ausbildung von mit der Netzfrequenz verlaufenden sehr gefährlichen Schwingungen ermöglichen. Denken wir uns z. B., eine Leitung mit leerlaufenden Transformatoren werde dadurch unter Spannung gesetzt, daß die einzelnen Phasen derselben der Reihe nach mittels einpoliger Trennschalter an die Sammelschienen gelegt werden. In Fig. 1 sei gerade der Schalter der Phase I ein-

Fig. 1.

Fig. 2.

gelegt. Man sieht, wir haben durch diese Schaltung einen Schwingungskreis hergestellt, gebildet aus der Leerlaufimpedanz des Netztransformators (Phase I in Serie mit den unter sich parallelen Phasen II und III) einerseits und der Kapazität der Rückleitungen der Phasen II und III in Serie mit der Kapazität der Phasen II und III der Sammelschienen und des gesamten übrigen Netzes gegen Erde andererseits, wie dies die Fig. 2 andeutet. Dieser Schwingungskreis liegt an der verketteten Sammelschienen-Spannung. Ein anderer Fall: Auf der durch die Fig. 3 dargestellten Freileitung erfolge Drahtbruch, und zwar falle das der Zentrale zugekehrte Drahtende auf die Erde. Der sich hierdurch

Fig. 3.

Fig. 4.

bildende Schwingungskreis besteht aus der Leerlaufimpedanz des Netztransformators (Phase III in Serie mit den unter sich parallelen Phasen I und II) und der Kapazität der Leitung Phase III gegen Erde; er liegt ebenfalls an der verketteten Sammelschienen-Spannung (Fig. 4).

Es ließe sich nun noch eine ganze Reihe solcher Fälle konstruieren; erinnert sei z. B. nur an das Durchbrennen einzelner, am Anfange (bei kleinen Transformatoren für hohe Spannungen auch am Ende) von abgehenden Stichleitungen liegender Sicherungen, an das Abschalten von Leitungen mittels dreipoliger Trenn- bzw. Mastschalter unter Strom, wobei der Lichtbogen an einzelnen Phasen früher erlöschen kann als den beiden übrigen, usw. In all diesen Fällen entstehen nun nennenswerte Überspannungen, zunächst an der Selbstinduktion bzw. der Kapazität der gebildeten Schwingungskreise,

wenn die Eigenschwingungszahl dieser letzteren annähernd mit der aufgedruckten Frequenz übereinstimmt. In zweiter Linie, nämlich dann, wenn es sich um Schaltanordnungen nach Fig. 1 handelt, oder wenn die im Schwingungskreis pulsierende Energie groß genug ist, kann aber auch die Zentrale durch Spannungserhöhungen an den Sammelschienen in Mitleidenschaft gezogen werden.

Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß bei den erwähnten Resonanzschaltungen stets die Leerlaufimpedanz der Transformatoren in Frage kommt, und es wird deshalb von vornherein zu erwarten sein, daß die Sättigungserscheinungen des Eisens das Verhalten dieser Schwingungskreise stark beeinflussen werden. Wir wollen deshalb im folgenden dem Problem des Schwingungskreises mit eisenhaltiger Induktivität unsere besondere Aufmerksamkeit zuwenden.

Fig. 5.

Das Verhalten des Schwingungskreises mit konstanter Selbstinduktion und Kapazität läßt sich in sehr einfacher Weise beschreiben und ist auch seit langem bekannt. L bedeute die Selbstinduktion, K die in Reihe mit dieser liegende Kapazität des durch die Fig. 5 dargestellten Schwingungskreises. Sehen wir von den Verlusten ab, so läßt sich das Verhalten dieses sich selbst überlassenen Schwingungskreises durch die folgenden Gleichungen beschreiben:

$$e = A \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{K \cdot L}} \cdot t, \quad (1a)$$

$$i = A \cdot \sqrt{\frac{K}{L}} \cdot \cos \frac{1}{\sqrt{K \cdot L}} \cdot t. \quad (1b)$$

Hierin bedeuten A eine willkürliche Integrationskonstante, t die fortschreitende Zeit. Spannung und Strom befolgen also ein einfaches harmonisches Gesetz. Die durch die Gl. (1) dargestellten Schwingungen bezeichnet man auch als Eigenschwingungen des Thomsonschen Schwingungskreises, da sie stets mit ihrer nur von den Konstanten L und K des Schwingungskreises abhängigen Frequenz

$$\nu = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{K \cdot L}} \quad (2)$$

auftreten, ganz unabhängig von den elektrischen Zustandsänderungen, welchen man das System unterwirft; diese letzteren bestimmen vielmehr nur die Amplitude A der Schwingungen.

Ganz besonders interessant ist das Verhalten des an eine Wechselspannung

$$E = \bar{E} \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot n \cdot t$$

gelegten Thomsonschen Schwingungskreises. Je mehr sich die dem Schwingungskreis aufgezwungene Frequenz n der Eigenfrequenz ν desselben nähert, um so größer wird unter sonst gleichen Verhältnissen die am Schwingungskreis herrschende Spannung e . Spannung an der Drosselspule und Strom gehorchen nämlich folgendem Gesetz:

$$e = \bar{E} \cdot \frac{n^2}{n^2 - \nu^2} \cdot \sin 2 \pi \cdot n \cdot t, \quad (3a)$$

$$i = -\bar{E} \cdot \frac{n \cdot \nu}{n^2 - \nu^2} \cdot \cos 2 \pi \cdot n \cdot t. \quad (3b)$$

Man sieht, für

$$n = \nu$$

wird bei Vernachlässigung der Verluste

$$e = \infty.$$

Wesentlich verwickelter liegen die Verhältnisse beim Schwingungskreis mit Eisen, den die Fig. 6 schematisch andeuten möge. Nun ist es nicht mehr angängig, den Selbstinduktionskoeffizienten der Drosselspule als konstante Größe zu betrachten, der reziproke Wert desselben steht vielmehr in einer Abhängigkeit vom Strom, die wir durch die Magnetisierungskurve darzustellen gewöhnt sind. Der Selbstinduktionskoeffizient selbst nimmt von einem anfänglichen Maximalwerte an, den er bei geringen Strömen und damit niedrigen Sättigungen des Eisens einnimmt, mit wachsendem Strome beständig ab. Gl. (2) zeigte uns, daß die Eigenfrequenz des Thomsonschen Schwingungskreises nur von der Größe

Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 8.

des Produkts aus Selbstinduktion und Kapazität abhängig ist. Aus den vorhergehenden Betrachtungen folgt nun, daß beim eisenhaltigen Schwingungskreis auch die Eigenfrequenz ν keine Konstante mehr ist, sie ist vielmehr eine Funktion des Stroms und wächst mit diesem. Aus diesem Grunde wird der an eine Wechselspannung gelegte eisenhaltige Schwingungskreis manches Neue bieten. Wir denken uns diesen Versuch ausgeführt (Fig. 7), und zwar wollen wir unseren Betrachtungen gleich ein bestimmtes Beispiel zugrunde legen: die Amplitude A_1 der Grundwelle der an der eisenhaltigen Drosselspule herrschenden Spannung e stehe in einer Abhängigkeit von der Eigenfrequenz ν des Schwingungskreises, welche die Fig. 8 zeigt. Im nächsten Abschnitte soll gezeigt werden, wie diese Kurve berechnet wurde.

Die Spannung der angelegten Stromquelle, deren Frequenz $n = 50$ sei, werde von Null beginnend allmählich gesteigert. Im Anfange, solange sich die Sättigung des Eisens noch nicht bemerkbar macht, kann die Selbstinduktion der Drosselspule als konstant betrachtet werden, und Spannung und Strom gehorchen also noch den Gl. (3) mit $\nu = \text{const.}$, d. h. die Spannung e wächst zunächst linear mit der angelegten Spannung E . Sobald nun aber e soweit zugenommen hat, daß die Kurve für die Eigenfrequenz ν nach oben abzubiegen beginnt, muß gemäß Gl. (3a) die Spannung e schneller wachsen; dies bedingt aber andererseits wieder, wie Fig. 8 zeigt, eine weitere Zunahme von ν , was wiederum auf die Spannung e zurückwirkt. Wir sehen also schon, es handelt sich hier um einen Selbsterregungsvorgang, es wird sich schließlich eine solche Spannung e einstellen, daß sie einmal der Gl. (3a) und dann der durch die Fig. 8 dargestellten Funktion genügt; denn zunächst kann ja nur die Grundwelle der Drosselspulen-Spannung mit der angelegten Spannung in Resonanz treten. Wenn wir also noch in die Fig. 8 eine mit Hilfe der Gl. (3a) errechnete Resonanzkurve einzeichnen, wie dies die Fig. 9 zeigt, so muß der Schnittpunkt beider Kurven den sich jeweils einstellenden Spannungszustand ergeben. Diese Kurven

Fig. 9.

können sich bei entsprechender gegenseitiger Lage im Höchsthalle dreimal schneiden, die Resonanzspannung e ist also durchaus nicht immer eindeutig bestimmt.

Fig. 10.

Fig. 10 zeigt die mit Hilfe des eben skizzierten Verfahrens gewonnene Abhängigkeit der Amplitude A_1 von der angelegten Wechselspannung E . Es ist interessant zu sehen, wie bei $E = 10\,000$ Volt die Spannung des Schwingungskreises plötzlich in die Höhe schnellt, ein weiteres Steigern der Spannung E hat infolge der bereits eingetretenen hohen Sättigung des Eisens nur mehr ein mäßiges Anwachsen der Amplitude A_1 und damit der Drosselspannung zur Folge. Die obere Kurve zeigt die an der Kapazität bzw. an der Rückleitung herrschende Spannung e_k , deren Verhalten ist ganz besonders interessant.

Der Vektor der Grundwelle der Kapazitätsspannung ist, da wir von den Verlusten absehen, durch die algebraische Summe der beiden Vektoren der angelegten Wechselspannung, $\bar{E}$, und der Drosselspannung, A_1 , gegeben. Im Anfange, vor Eintreten der Resonanz, haben nun die Vektoren $\bar{E}$ u. A_1 entgegengesetzte Richtung d. h. die induktive Reaktanz überwiegt noch, und die Kapazitätsspannung e_k ist gleich der

Differenz der Spannungen E und e , also verschwindend klein. Für die Amplitude der Grundwelle der Kapazitätsspannung gilt demnach:

$$|e_k| = \bar{E} - A_1$$

oder:

$$|e_k| = \bar{E} \cdot \frac{v^2}{n^2 - v^2} \quad 4a)$$

Im Augenblicke des Eintretens der Resonanz schwenkt nun der Vektor A_1 um 180° herum; der wechselt sein Vorzeichen, und es wird:

$$|e_k| = \bar{E} + A_1$$

oder

$$|e_k| = \bar{E} \cdot \frac{2 \cdot n^2 - v^2}{n^2 - v^2} \quad 4b)$$

Die Kapazitätsspannung steigt also sprunghaft beinahe von Null auf ihren vollen Resonanzwert, wie dies denn auch die Figur 10 zeigt. Die Kurvenform der Kondensatorspannung bzw. der Drosselspannung bei einer Spannung $E = 25\,000$

Fig. 11.

Volt eff zeigt die Fig. 11, die Abflachung der Drosselspannung ist sehr charakteristisch.

Fig. 12 zeigt nun das Resonanzdiagramm des eisenhaltigen Schwingungskreises, seine Form ist von der des Thomsonschen Schwingungskreises mit konstanter Selbstinduktion grundverschieden. Während beim Thomsonschen Schwingungskreis die Resonanzspannung bei einer bestimmten Periodenzahl $n(=v)$ auf den Wert Unendlich hinaufschneht (bei Vernachlässigung der Verluste) und dann bei weiterhin ansteigender Periodenzahl schnell wieder sinkt, bemerkt man beim eisenhaltigen Schwingungskreis ein mit der aufgedruckten Periodenzahl stetiges Anwachsen der Resonanzspannung. Liegt die an den Schwingungskreis angelegte Spannung E wesentlich über jener Spannung, bei welcher die v -Kurve (Fig. 8) nach oben abzubiegen beginnt, so wächst die Resonanzspannung mit zunehmender Frequenz n ständig und nähert sich bei unendlich großer Frequenz n dem Werte Unendlich. (Die Verluste setzen natürlich einem unbegrenzten Anwachsen der Resonanzspannung ein Ziel; in Wirklichkeit wird bei einer bestimmten Periodenzahl die Spannungskurve plötzlich scharf umbiegen und nahezu auf den Wert 0 abfallen.) Liegt dagegen die Spannung E noch in jenem Gebiet, in welchem die v -Kurve parallel zur Abszissenachse verläuft, so nimmt die Resonanzkurve den durch die gestrichelte Kurve angedeuteten Verlauf.

Fig. 12.

1. Die Gleichungen des eisenhaltigen Schwingungskreises. Die mathematische Behandlung des eisenhaltigen Schwingungskreises setzt die Interpolierung der meist graphisch gegebenen Magnetisierungskurve durch eine analytische Funktion voraus. Man begegnet hier gewissen Schwierigkeiten, denn die betreffende analytische Funktion soll nicht nur die Magnetisierungskurve möglichst naturgetreu nachbilden, sondern sie soll auch eine Integration der Differentialgleichung des Schwingungskreises ermöglichen.

Man kann eine beständig zunehmende Funktion (d. i. eine Funktion ohne Maxima und Minima) stets durch eine unendliche Potenzreihe ausdrücken; bedeutet i den Magnetisierungsstrom, φ den auf eine Windung bezogenen, das Eisen durchsetzenden gesamten Kraftfluß, so können wir bei Vernachlässigung sämtlicher Verluste die Abhängigkeit zwischen i und φ durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$i = \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \cdot \varphi^k. \quad 5)$$

In weitaus den meisten Fällen wird es nun genügen, die geraden Glieder der auf der rechten Seite stehenden unendlichen Reihe wegzulassen und diese nach dem Gliede, mit der Ordnungszahl 5 abzubrechen, selbst die Funktion

Fig. 13.

$$i = \frac{I}{L} \cdot \varphi + \frac{I}{\lambda} \cdot \varphi^3 \quad 5a)$$

wird schon in vielen Fällen den praktischen Anforderungen Genüge leisten. Fig. 13 zeigt, mit welcher Genauigkeit sich eine an einem Transformator mit legiertem Eisen-

blech aufgenommene Magnetisierungskurve durch diese beiden Funktionen ausdrücken läßt.

Die Spannungsgleichung des durch die Fig. 6 dargestellten Schwingungskreises lautet:

$$\frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{K} \cdot \int i \cdot dt = 0. \quad (6)$$

Durch Differentiation dieser Gleichung und Elimination von i aus Gl. (5a) folgt weiter:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{1}{K \cdot L} \cdot \varphi - \frac{1}{K \cdot \lambda} \cdot \varphi^3.$$

Diese Gleichung mit $2 \cdot d\varphi$ multipliziert und nach φ integriert ergibt:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = A^2 - \frac{1}{K \cdot L} \cdot \varphi^2 - \frac{1}{2 \cdot K \cdot \lambda} \cdot \varphi^4,$$

wo A^2 die willkürliche Integrationskonstante.

Durch nochmalige Integration folgt endlich:

$$t = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{A^2 - \frac{1}{K \cdot L} \cdot \varphi^2 - \frac{1}{2 \cdot K \cdot \lambda} \cdot \varphi^4}} + B.$$

(B = willkürliche Integrationskonstante.)

Das auf der rechten Seite stehende Integral kann durch die Substitution:

$$\varphi^2 = a \cdot x^2$$

mit

$$a = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 2 \cdot K \cdot \lambda \cdot A^2}$$

und

$$\alpha = \frac{\lambda}{L}$$

übergeführt werden in:

$$t = \sqrt{\frac{a}{A^2}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2) \cdot \left(1 - \frac{a^2}{2 \cdot K \cdot \lambda \cdot A^2} \cdot x^2\right)}} + B,$$

ein Integral, welches durch die weitere Substitution:

$$x = \frac{1}{a} \cdot \sqrt{2 \cdot K \cdot \lambda \cdot A^2} \cdot \cos \psi$$

in das elliptische Integral erster Gattung:

$$t = -\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{a}{A^2}} \cdot \int \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cdot \sin^2 \psi}} + B$$

verwandelt werden kann. Hierin ist:

$$\varepsilon^2 = \frac{K \cdot \lambda \cdot A^2}{\alpha^2 + 2 \cdot K \cdot \lambda \cdot A^2 \pm \alpha \cdot \sqrt{\alpha^2 + 2 \cdot K \cdot \lambda \cdot A^2}}. \quad (8)$$

Vernachlässigen wir eine Integrationskonstante, welche für den weiteren Verlauf unserer Untersuchungen belanglos ist, so können wir weiterhin schreiben:

$$\int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cdot \sin^2 \psi}} = -\frac{\omega}{\sqrt{K \cdot L}} \cdot t,$$

$$\omega = \sqrt{1 + \frac{\frac{2 \cdot K \cdot \lambda \cdot A^2}{\alpha^2}}{1 \pm \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot \lambda \cdot A^2}{\alpha^2}}}}. \quad (9)$$

Hieraus folgt nun sofort:

$$\varphi = -\sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot \lambda \cdot A^2}{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 2 \cdot K \cdot \lambda \cdot A^2}}} \cdot \cos \operatorname{am} \left(\frac{\omega}{\sqrt{K \cdot L}} \cdot t, \varepsilon \right). \quad (10)$$

Wir erhalten somit:

$$e = A \cdot \omega \sqrt{\frac{2}{1 \pm \sqrt{1 + \frac{2 \cdot K \cdot \lambda \cdot A^2}{\alpha^2}}}} \cdot \sin \operatorname{am} \frac{\omega}{\sqrt{K \cdot L}} \cdot t \cdot \Delta \operatorname{am} \frac{\omega}{\sqrt{K \cdot L}} \cdot t, \quad (11a)$$

$$i = -\sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot L \cdot A^2}{1 \pm \sqrt{1 + \frac{2 \cdot K \cdot \lambda \cdot A^2}{\alpha^2}}}} \cdot \left[\frac{1}{L} \cdot \cos \operatorname{am} \frac{\omega}{\sqrt{K \cdot L}} \cdot t + \frac{2 \cdot K \cdot A^2}{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 2 \cdot K \cdot \lambda \cdot A^2}} \cdot \cos \operatorname{am}^3 \frac{\omega}{\sqrt{K \cdot L}} \cdot t \right]. \quad (11b)$$

Wir kommen also zu dem Ergebnis, daß wir die Eigenschwingungen des eisenhaltigen Schwingungskreises durch elliptische Funktionen darstellen können; diese letzteren können auch als höhere trigonometrische Funktionen betrachtet werden, sie sind periodisch wie diese und gehen für $\varepsilon = 0$ in diese über. Die elliptischen Funktionen besitzen eine reelle Periode $4 \cdot \kappa$ und eine imaginäre Periode $j \cdot 2 \cdot \kappa'$, wo:

$$\kappa = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cdot \sin^2 \psi}}, \quad (12a)$$

$$\kappa' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varepsilon_1^2 \cdot \sin^2 \psi}}, \quad (12b)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1^2 &= 1 - \varepsilon^2, \\ j &= \sqrt{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (12c)$$

Fig. 14.

Die imaginäre Periode kann für uns von Bedeutung werden, wenn einzelne der Glieder der Reihe 5 sich negativ ergeben. Den Verlauf der bestimmten Integrale (12a) und (12b) zeigt die Fig. 14.

Setzen wir in Gl. (5a) $\lambda = \infty$, so müssen sich die Gl. (1) des Thomsonschen Schwingungskreises ergeben. In diesem Falle wird auch:

$$\omega = 1,$$

$$\varepsilon = 0,$$

$$\varepsilon_1 = 1$$

und damit

$$\kappa' = \infty,$$

$$\kappa = \frac{\pi}{2},$$

$$\Delta \operatorname{am} \frac{1}{\sqrt{K \cdot L}} \cdot t = 1,$$

$$\sin \operatorname{am} \frac{1}{\sqrt{K \cdot L}} \cdot t = \sin \frac{1}{\sqrt{K \cdot L}} \cdot t,$$

$$\cos \operatorname{am} \frac{1}{\sqrt{K \cdot L}} \cdot t = \cos \frac{1}{\sqrt{K \cdot L}} \cdot t$$

und wir erhalten tatsächlich:

$$e = A \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{K \cdot L}} \cdot t,$$

$$i = A \cdot \sqrt{\frac{K}{L}} \cdot \cos \frac{1}{\sqrt{K \cdot L}} \cdot t.$$

Die Gl. (11) lassen sich am besten übersehen, wenn wir die elliptischen Funktionen in unendliche trigonometrische Reihen entwickeln. Es ist nämlich:

$$\cos \operatorname{am} \frac{\omega}{\sqrt{K \cdot L}} \cdot t = \frac{2 \cdot \pi}{\varepsilon \cdot \kappa} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{\frac{2 \cdot k - 1}{2}}}{1 + q^{2 \cdot k - 1}} \cdot \cos(2 \cdot k - 1) \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{K \cdot L}} \cdot \frac{\omega}{4 \cdot \kappa} \cdot t, \quad (13)$$

wo:

$$q = e^{\frac{\pi \cdot \kappa'}{\kappa}}. \quad (13a)$$

Wir erhalten somit für die uns vor allem interessierende Spannung e:

$$e = \frac{\omega}{\sqrt{K \cdot L}} \cdot \frac{\pi^2}{\kappa^2} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{\alpha + 2 \cdot K \cdot L \cdot A^2 \pm \sqrt{\alpha^2 + 2 \cdot K \cdot \lambda \cdot A^2}}{1 \pm \sqrt{1 + \frac{2 \cdot K \cdot \lambda \cdot A^2}{\alpha^2}}}} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} (2 \cdot k - 1) \cdot \frac{q^{\frac{2 \cdot k - 1}{2}}}{1 + q^{2 \cdot k - 1}} \cdot \sin(2 \cdot k - 1) \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{K \cdot L}} \cdot \frac{\omega}{4 \cdot \kappa} \cdot t. \quad (14)$$

Die Amplitude der Grundschwingung der Drosselspulenspannung ist demnach:

$$A_1 = \frac{\omega}{\sqrt{K \cdot L}} \cdot \frac{\pi^2}{\kappa^2} \cdot \frac{\sqrt{q}}{1 + q} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{\alpha + 2 \cdot K \cdot L \cdot A^2 \pm \sqrt{\alpha^2 + 2 \cdot K \cdot \lambda \cdot A^2}}{1 \pm \sqrt{1 + \frac{2 \cdot K \cdot \lambda \cdot A^2}{\alpha^2}}}} \quad (15a)$$

und ihre Frequenz:

$$\nu = \frac{\omega}{4 \cdot \kappa \cdot \sqrt{K \cdot L}}. \quad (15b)$$

Indem in diese Gleichungen willkürliche Werte für A eingesetzt wurden, wurde die in der Fig. 9 wiedergegebene Abhängigkeit zwischen A_1 und ν gewonnen; dem Beispiel waren folgende Verhältnisse zugrunde gelegt:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= 7,0 \cdot 10^{30} \\ L &= 50 \cdot 10^{10} \\ K &= 0,57 \cdot 10^{-15} \end{aligned} \right\} \text{absolute Einheiten.}$$

Die Gl. (15) ergeben die gestrichelte Kurve; die bei geringen Sättigungen zu beobachtende schlechte Übereinstimmung mit der wahren Kurve erklärt sich daraus, daß die Funktion (5a) die Magnetisierungskurve gerade in ihrem unteren Teile verhältnismäßig am schlechtesten nachbildet. Demgegenüber möge aber darauf hingewiesen werden, daß für praktische Berechnungen gerade die höchsten, unter Umständen auftretenden Spannungen interessieren, d. h. daß hauptsächlich der im Gebiete der höheren Sättigungen liegende Teil der ν -Kurven in Frage kommt, und hier ist die Genauigkeit der Rechnung eine für praktische Verhältnisse durchaus genügende. Ein Versuch möge dies beweisen.

Der unserm Beispiel zugrunde gelegte Schwingungskreis, die Magnetisierungskurven des benutzten Transformators zeigen die in die Fig. 13 eingetragenen Punkte, wurde an eine Wechselspannung von 18 000 Volt mit der Frequenz 50 gelegt. Am Transformator

wurde dabei eine effektive Spannung von ca. 55 000 Volt gemessen. Die Fig. 10 ergibt für diese Verhältnisse einen Effektivwert der Amplitude A_1 der Grundwelle von 63 000 Volt. Bedenkt man, daß die höheren Harmonischen (die Amplitude der 3. Harmonischen beträgt in diesem Falle ca. 10% der Amplitude der Grundwelle, die Amplitude der 5. Harmonischen nur mehr ca. 1%) den Effektivwert der Spannung e nicht mehr wesentlich zu beeinflussen vermögen, und daß bei Ableitung der Gleichungen sämtliche Verluste vernachlässigt wurden, so muß die Übereinstimmung der Theorie mit dem Experiment als durchaus befriedigend bezeichnet werden.

Die Amplitude der 3. Harmonischen ergibt sich aus Gl. (14) zu:

$$A_3 = A_1 \cdot 3 \cdot q \cdot \frac{1 + q}{1 + q^3}, \quad (16a)$$

die Amplitude der 5. Harmonischen zu:

$$A_5 = A_1 \cdot 5 q^2 \cdot \frac{1 + q}{1 + q^5}. \quad (16b)$$

Die 7. usw. Harmonische können unbedenklich vernachlässigt werden. Die 3. und 5. Harmonische sind zu der Drosselspannung e zu addieren und von der Kondensatorspannung e_k dann selbstverständlich zu subtrahieren, da ja voraussetzungsgemäß die angelegte Wechselspannung rein sinusförmig ist. Hieraus erklärt sich die Form der Spannungskurven in Fig. 11.

Es bietet übrigens keine prinzipiellen Schwierigkeiten, die Übereinstimmung der Funktion (5a) mit der wahren Magnetisierungskurve durch folgenden Ansatz zu verbessern:

$$i = \frac{1}{L} \cdot \varphi + \frac{1}{\lambda_1} \cdot \varphi^3 + \frac{1}{\lambda_2} \cdot \varphi^5.$$

Man gelangt mit dieser Funktion mittels den im Vorhergehenden durchgeführten ganz ähnlichen Rechnungen zu folgendem Integral für die Zeit:

$$t = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{A^2 - \frac{1}{K \cdot L} \cdot \varphi^2 - \frac{1}{2 \cdot K \cdot \lambda_1} \cdot \varphi^4 - \frac{1}{3 \cdot K \cdot \lambda_2} \cdot \varphi^6}} + B.$$

Dieses Integral läßt sich durch die Substitution:

$$\varphi^2 = \frac{m + n \cdot x}{1 + x}$$

auf folgende Form bringen:

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{a - b \cdot x - c \cdot x^2 - d \cdot x^3 - e \cdot x^4}} + B.$$

m und n sind nun so zu bestimmen, daß die Konstanten b und d verschwinden, und es ist dann ein leichtes, das eben angeschriebene Integral auf ein elliptisches Integral erster Gattung zu reduzieren. Es möge jedoch nicht unerwähnt bleiben, daß der angedeutete Weg ganz außerordentlich umfangreiche Rechnungen erfordert.

Zum Schlusse noch einige Worte über die Auswertung der Konstanten L und λ in Gl. (5a). Diese enthält zwei willkürliche Konstanten; wir können der durch sie dargestellten Funktion also außer dem Nullpunkt noch zwei weitere Punkte der Magnetisierungskurve vorschreiben, durch welche sie zu gehen hat. Um somit die Konstanten L und λ zu bestimmen, hat man die Koordinaten zweier passend gewählter Punkte der vorgegebenen Magnetisierungskurve in die Gl. (5a) einzusetzen; man erhält so zwei algebraische Gleichungen ersten Grades zwischen L und λ , aus welchen diese leicht zu bestimmen sind. Nimmt man zur Gl. (5a) noch ein drittes Glied hinzu, so erhöht sich die Zahl der außer dem Nullpunkt willkürlich zu wählenden Punkte der Magnetisierungskurve auf drei.