ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

N^o. 15.

Auszug aus einem Schreiben des Herrn Professor *Degen* in Copenhagen an den Herausgeber.

Um Ihnen, geehrtester Hr. Collega, wenigstens meinen guten Willen zu zeigen, nehme ich mir die Freiheit Ihnen für Ihre so interessanten astronomischen Nachrichten hiemit die Anwendung eines eben so schönen als merkwürdigen Satzes mitzutheilen, der dem ersten Anschein nach bloß für die Speculation erfunden zu seyn scheint.

Es seyen $\left(\frac{n}{0}\right), \left(\frac{n}{1}\right), \left(\frac{n}{2}\right), \dots$ die *Eulerschen* Bezeichnungen der Binomial-Coëfficienten $1, n, \frac{1}{2}n(n-1), \dots$ und Σ_i die Summe der Produkte:

$\left(\frac{n}{0}\right) \cdot \left(\frac{n}{i}\right), \left(\frac{n}{1}\right) \cdot \left(\frac{1}{1+i}\right), \left(\frac{n}{2}\right) \cdot \left(\frac{n}{2+i}\right), \dots$
incl. bis $\left(\frac{n}{n-i}\right) \cdot \left(\frac{n}{n}\right)$, so finde ich allgemein:

$\Sigma_i = \left(\frac{2n}{n-i}\right)$, eine Formel, von der der bekannte Satz *Lagranges*, von der Summe der Quadrate der Binomial-Coëfficienten eine leichte Folge ist, wenn man nämlich das Intervall der Factoren, $i, = 0$ setzt.

Von diesem Satze, in Verbindung mit der Methode der kleinsten Quadrate, läßt sich nun, für die Prüfung und möglich beste Berichtigung einer gegebenen Reihe von Größen, die man nur approximatorisch und mit Fehlern vermischt erhalten hat, folgende Anwendung machen:

Es seyen $f(-m), f(-m+1) \dots f(-3), f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2), f(3), \dots$ die erwähnten Größen, deren n^{te} Differenz man aus irgend einem Grunde als verschwindend annehmen darf. Die Funktionen der nicht-verneinten Zeiger seyen aber mit Fehlern vermischt gegeben, d. i. man habe, [nach $f(-1)$,] $f(0) + \alpha, f(1) + \varepsilon, f(2) + \gamma$, etc. statt $f(0), f(1), f(2)$ etc.

Nimmt man also von der durch $\alpha, \varepsilon, \gamma, \dots$ entstellten Reihe die ersten, zweyten, etc. Differenzen, so werden sich die Fehler $\alpha, \varepsilon, \gamma, \dots$ über alle Differenzen, selbst über die n^{te} , aufwärts und abwärts verbreiten, und man wird in der n^{ten} Differenz folgende Glieder bemerken:

$$\begin{aligned} \alpha, \\ \varepsilon - \left(\frac{1}{1}\right) \alpha, \\ \gamma - \left(\frac{n}{1}\right) \varepsilon + \left(\frac{n}{2}\right) \alpha, \\ \delta - \left(\frac{n}{1}\right) \gamma + \left(\frac{n}{2}\right) \varepsilon - \left(\frac{n}{3}\right) \alpha \\ \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

deren Werthe ich $= A, B, C, D$, u. s. f. setze; Werthe, die ohne die vereinte Wirkung der vermeidlichen und unvermeidlichen Fehler eigentlich $= 0$ seyn würden.

Gesetzt es wären die 5 Größen $f(0) \dots f(4)$ mit den Fehlern $\alpha \dots \varepsilon$ behaftet, die übrigen aber davon frei, so würde man, weil alsdann $\zeta = 0, \eta = 0$, etc. folgende Bedingungsgleichungen erhalten:

- 1) $A - \alpha = 0$
- 2) $B + \left(\frac{n}{1}\right) \alpha - \varepsilon = 0$
- 3) $C - \left(\frac{n}{2}\right) \alpha + \left(\frac{n}{1}\right) \varepsilon - \gamma = 0$
- 4) $D + \left(\frac{n}{3}\right) \alpha - \left(\frac{n}{2}\right) \varepsilon + \left(\frac{n}{1}\right) \gamma - \delta = 0$
- 5) $E - \left(\frac{n}{4}\right) \alpha + \left(\frac{n}{3}\right) \varepsilon - \left(\frac{n}{2}\right) \gamma + \left(\frac{n}{1}\right) \delta - \varepsilon = 0$
- 6) $F + \left(\frac{n}{5}\right) \alpha - \left(\frac{n}{4}\right) \varepsilon + \left(\frac{n}{3}\right) \gamma - \left(\frac{n}{2}\right) \delta + \left(\frac{n}{1}\right) \varepsilon = 0$
- 7) $G - \left(\frac{n}{6}\right) \alpha + \left(\frac{n}{5}\right) \varepsilon - \left(\frac{n}{4}\right) \gamma + \left(\frac{n}{3}\right) \delta - \left(\frac{n}{2}\right) \varepsilon = 0$
- 8) $H + \left(\frac{n}{7}\right) \alpha - \left(\frac{n}{6}\right) \varepsilon + \left(\frac{n}{5}\right) \gamma - \left(\frac{n}{4}\right) \delta + \left(\frac{n}{3}\right) \varepsilon = 0$
u. s. w.

deren Anzahl $= n + 5$ seyn wird; also um n Einheiten größer, als die Anzahl der unbekannten Fehler. Wären die Größen der Reihe sonst Resultate eines vollständig ausgedrückten analytischen Gesetzes, so würden die aus irgend 5 der $n + 5$ Gleichungen erhaltenen Werthe $\alpha \dots \varepsilon$ auch den übrigen n Gleichungen entsprechen. Wo aber das

Gegentheil Statt findet, wird man, den Vorschriften der Methode der kleinsten Quadrate gemäß alle $n+5$ Gleichungen successive, erst mit dem Coëfficienten von α , dann mit dem von ξ , von γ , etc. multipliciren und die Summe

$$\left. \begin{aligned} \text{für } \alpha \dots & + \Delta^n A + \Sigma_0 \cdot \alpha - \Sigma_1 \cdot \xi + \Sigma_2 \cdot \gamma - \Sigma_3 \cdot \delta + \Sigma_4 \cdot \varepsilon = 0 \\ \text{für } \xi \dots & + \Delta^n B - \Sigma_1 \cdot \alpha + \Sigma_0 \cdot \xi - \Sigma_1 \cdot \gamma + \Sigma_2 \cdot \delta - \Sigma_3 \cdot \varepsilon = 0 \\ \text{für } \gamma \dots & + \Delta^n C + \Sigma_2 \cdot \alpha - \Sigma_1 \cdot \xi + \Sigma_0 \cdot \gamma - \Sigma_1 \cdot \delta + \Sigma_2 \cdot \varepsilon = 0 \\ \text{für } \delta \dots & + \Delta^n D - \Sigma_3 \cdot \alpha + \Sigma_2 \cdot \xi - \Sigma_1 \cdot \gamma + \Sigma_0 \cdot \delta - \Sigma_1 \cdot \varepsilon = 0 \\ \text{für } \varepsilon \dots & + \Delta^n E + \Sigma_4 \cdot \alpha - \Sigma_3 \cdot \xi + \Sigma_2 \cdot \gamma - \Sigma_1 \cdot \delta + \Sigma_0 \cdot \varepsilon = 0 \end{aligned} \right\} (A)$$

Das Gesetz dieser Formeln wird, mittelst jenes von mir aufgestellten Satzes, äußerst einfach und hat noch den Vortheil, daß man aus dem für α gefundenen Ausdruck leicht den für ε , wie aus dem für ξ den für δ erhalten kann. Die Differenzen $\Delta^n A$, $\Delta^n B$, ... werden

der einzelnen Produkte, die jeder Coëfficient besonders gibt, $= 0$ setzen.

Ein Blick auf obige 8 Gleichungen zeigt, daß diese Producte seyn werden:

positiv für ungerade Werthe von n , et vice versa. Die Bestimmung von α , ξ , γ ... ist das Geschäft der Elimination; also ihren unvermeidlichen Schwierigkeiten, obgleich wegen der Symmetrie der leicht zu generalisirenden Formeln A , etwas weniger unterworfen.

Für zwei fehlerhafte Größen, und also für γ , δ , ε , ... $= 0$, hat man

$$\begin{aligned} \Sigma_0 \cdot \alpha - \Sigma_1 \cdot \xi &= + \Delta^n A \quad (\Delta^n \text{ positiv für gerade Werthe von } n) \\ - \Sigma_1 \cdot \alpha + \Sigma_0 \cdot \xi &= + \Delta^n B \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich $\alpha = + \frac{\Sigma_0 \cdot \Delta^n A + \Sigma_1 \cdot \Delta^n B}{(\Sigma_0)^2 - (\Sigma_1)^2}$, und ferner, wenn man bemerkt, daß $\Sigma_0 = \frac{n+1}{n} \Sigma_1$,

$$\alpha = + \frac{(n+1)\Delta^n A + n\Delta^n B}{\frac{2n+1}{n} \Sigma_1} = + \frac{(n+1)\Delta^n A + n\Delta^n B}{\left(\frac{2n+1}{n}\right)}; \text{ und, durch die Vertauschung von } A \text{ mit } B, \alpha \text{ mit } \xi$$

$$\xi = + \frac{n\Delta^n A + (n+1)\Delta^n B}{\left(\frac{2n+1}{n}\right)}. \text{ So gibt z.B. } n=4 \text{ die Werthe } \alpha = \frac{5\Delta^4 A + 4\Delta^4 B}{126}, \xi = \frac{4\Delta^4 A + 5\Delta^4 B}{126};$$

Ausdrücke die denjenigen vollkommen ähnlich sind, welche Hr. *Monteiro da Rocha* in seinen Memoiren über prakt. Astronomie (der Franz. Uebers. von 1808 pag. 137) für x und x' , hier α und ξ , gefunden hat, doch in der, seinem Schema gemäß, zu Grunde gelegten Hypothese vom Verschwinden der 8ten Differenzen. Der flüchtigste Blick wird Ihnen aber zeigen, daß wenn gleich die Schrift des lusitanischen Geometers mir die Veranlassung zu gegenwärtiger Untersuchung gegeben, ich doch in Bearbeitung des Stoffs einen ganz verschiedenen Weg gegangen bin.

Nachschr. Ich erlaube mir noch die allgemeinen Formeln für 3 fehlerhafte Größen hinzuzufügen, weil sie eine etwas weitläufige Reduction erfordern. Ich finde

$$\begin{aligned} \alpha &= + \frac{(n+2)\Delta^n A + 2n\Delta^n B + n\Delta^n C}{\frac{2}{n+1} \cdot \left(\frac{2n+2}{n}\right) = \frac{2}{n+2} \cdot \left(\frac{2n+2}{n+1}\right)} \\ \xi &= + \frac{n(n+2)\Delta^n A + 2(n^2+n+1)\Delta^n B + n(n+2)\Delta^n C}{\left(\frac{2n+2}{n+1}\right)} \\ \text{und } \gamma &= \frac{n\Delta^n A + 2n\Delta^n B + (n+2)\Delta^n C}{\frac{2}{n+2} \cdot \left(\frac{2n+2}{n+1}\right)} \end{aligned}$$

Ich bin sicher, daß in diesen Formeln kein Rechnungs- oder Schreibfehler sich eingeschlichen.

Copenhagen den 3ten May 1822.

C. F. Degen.