SUI GRUPPI FINITI DI SOSTITUZIONI LINEARI.

Nota di **G. Vivanti** (Pavia).

Adunanza del 12 gennaio 1913.

1. Il problema della determinazione di tutti i gruppi finiti di sostituzioni lineari d'una variabile è stato da tempo risolto in vari modi ¹⁾. Il seguente metodo, affatto elementare e indipendente da considerazioni cinematiche, può forse presentare qualche interesse, almeno dal punto di vista didattico.

2. Affinchè una sostituzione lineare $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, dove $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, sia ellittica ²⁾, è necessario e sufficiente che $\frac{\alpha + \delta}{2}$ sia reale e, in valore assoluto, minore di 1.

Che sia sufficiente, è cosa nota ³⁾.

Posto ora $\frac{\alpha + \delta}{2} = k$, e ricordando che ⁴⁾:

$$\theta = (k - \sqrt{k^2 - 1})^2,$$

si ha, se la sostituzione è ellittica:

$$|k - \sqrt{k^2 - 1}| = 1,$$

da cui:

$$|k + \sqrt{k^2 - 1}| = \frac{1}{|k - \sqrt{k^2 - 1}|} = 1,$$

e quindi:

$$|k + \sqrt{k^2 - 1}| = |k - \sqrt{k^2 - 1}|.$$

I due membri di questa eguaglianza sono le lunghezze delle diagonali d'un paral-

¹⁾ Vedi per es.: F. KLEIN, *Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst* [Mathematische Annalen, t. IX (1876), pp. 183-208]; F. KLEIN, *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade* (Leipzig, Teubner, 1884); G. FANO, *Ueber endliche Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen* [Monatshefte für Mathematik und Physik, t. VII (1896), pp. 297-320] (dove si trova anche la letteratura dell'argomento).

²⁾ Per la terminologia e le notazioni, vedi il mio manuale Hoepli: *Elementi della teoria delle funzioni poliedriche e modulari* (Milano, Hoepli, 1906).

³⁾ Loc. cit. ²⁾, art. 24.

⁴⁾ Loc. cit. ²⁾, art. 23.

lelogramma avente come lati contigui i vettori k , $\sqrt{k^2 - 1}$; affinché esse sieno eguali, il parallelogramma dev'essere rettangolo, e quindi dev'essere reale il rapporto:

$$\frac{i\sqrt{k^2 - 1}}{k} = \frac{\sqrt{1 - k^2}}{k} = \sqrt{\frac{1}{k^2} - 1}.$$

Ne segue che k^2 è reale, positivo e minore di 1.

3. Affinchè il prodotto di due sostituzioni ellittiche sia una sostituzione ellittica, è necessario che i poli delle due sostituzioni stiano sopra un cerchio.

Abbiansi le sostituzioni ellittiche S_1 , S_2 , poste sotto la forma:

$$\frac{z' - p_1}{z' - q_1} = \theta_1 \frac{z - p_1}{z - q_1}, \quad \frac{z' - p_2}{z' - q_2} = \theta_2 \frac{z - p_2}{z - q_2},$$

dove $\theta_1 = e^{2i\varphi_1}$, $\theta_2 = e^{2i\varphi_2}$, e φ_1 , φ_2 sono reali. Se si rappresenta con $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, dove $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, la sostituzione $S_1 S_2$, e se si pone:

$$\frac{(p_1 - p_2)(q_1 - q_2)}{(p_1 - q_2)(q_1 - p_2)} = \lambda, \quad \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} = \mu,$$

si trova:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha + \delta}{2} &= \frac{(1 + \theta_1 \theta_2) - \lambda(\theta_1 + \theta_2)}{2(1 - \lambda)\sqrt{\theta_1 \theta_2}} = \frac{\cos(\varphi_1 + \varphi_2) - \lambda \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{1 - \lambda} \\ &= \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \mu \sin \varphi_1 \sin \varphi_2. \end{aligned}$$

Poichè $\frac{\alpha + \delta}{2}$, φ_1 , φ_2 sono reali, lo è pure μ , e quindi λ ; e i 4 punti p_1 , q_1 , p_2 , q_2 , avendo rapporto anarmonico reale, stanno sopra un cerchio ⁵⁾.

4. Se due sostituzioni (ellittiche) appartengono ad un gruppo finito, i loro poli, i quali stanno sopra un cerchio, si separano reciprocamente. Ciò equivale a dire che $\lambda < 0$, ossia che $|\mu| < 1$.

Se il prodotto delle due sostituzioni si rappresenta al solito sotto la doppia forma:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1),$$

$$\frac{z' - p}{z' - q} = \theta \frac{z - p}{z - q} \quad (\theta = e^{2i\varphi}),$$

si ha ⁶⁾:

$$\cos \varphi = \frac{\alpha + \delta}{2},$$

e quindi:

$$(1) \quad \mu = \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi}{\sin \varphi_1 \sin \varphi_2}.$$

⁵⁾ Vedi: L. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche* (Pisa, Spoerri, 1901), § 10. Del resto basta osservare che l'argomento di λ è, a meno di multipli di 2π , la differenza degli angoli $q_2 p_1 p_2$, $q_2 q_1 p_2$, la quale è zero o π , se i 4 punti stanno sopra un cerchio [cfr. G. FANO, loc. cit. ¹⁾].

⁶⁾ Loc. cit. ²⁾, art. 61.

Ricordiamo che i soli possibili gruppi finiti di sostituzioni lineari sono quelli compresi nella tabella seguente ⁷⁾:

	r	v_1	v_2	v_3	n
I	2	n	n		n
II	3	2	2	m	$2m$
III	3	2	3	3	12
IV	3	2	3	4	24
V	3	2	3	5	60

I poli di ciascun gruppo si distribuiscono in sistemi di $\frac{n}{v_i}$ ($i = 1, \dots, r$) poli equivalenti. Quindi i gruppi del tipo I hanno due soli poli, e ad essi non è applicabile il teorema da dimostrarsi.

Un gruppo del tipo II contiene un sottogruppo ciclico d'ordine m , e le rimanenti sostituzioni sono tutte d'ordine 2. Deve quindi il prodotto d'una sostituzione d'ordine 2 per una d'ordine m essere d'ordine 2, cioè dev'essere $\varphi = \frac{\pi}{2}$ per $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{m}$.

Ne segue $\mu = 0$, $\lambda = -1$; i 4 poli formano un gruppo armonico.

Per i tipi III, IV, V $\varphi_1, \varphi_2, \varphi$ possono prendere soltanto i valori:

$$\frac{a\pi}{3} (a = 1, 2), \quad \frac{b\pi}{4} (b = 1, 2, 3), \quad \frac{c\pi}{5} (c = 1, 2, 3, 4).$$

Osservando poi che ad un gruppo appartengono, insieme ad una sostituzione, tutte le sue potenze, si vede che, posto $\varphi_i = \frac{l_i\pi}{h_i}$, dove $h_i = 3, 4$ o 5 , se $h_i = 4$ e $l_i \neq 2$, la (1) deve sussistere, mutando eventualmente φ , anche per $l_i = 2$; se $h_i \neq 4$, qualunque sia l_i , la (1) deve sussistere per $l_i = 1, \dots, h_i - 1$. Quindi:

per $h_1 = h_2 = 4$, si ha:

$$(2) \quad \mu = -\cos \varphi;$$

per $h_1 = 4$, $h_2 = 3$ o 5 si ha, prendendo $l_2 = 1$ o $l_2 = 2$:

$$(3) \quad \mu = -\frac{\cos \varphi}{\sin \frac{\pi}{3}} \quad \text{o} \quad \mu = -\frac{\cos \varphi}{\sin \frac{2\pi}{5}};$$

⁷⁾ Loc. cit. ²⁾, art. 37.

per $h_1 \neq 4$, $h_2 \neq 4$ si ha, prendendo $l_1 = l_2 = 1$ o $l_1 = 1$, $l_2 = h_2 - 1$:

$$(4) \quad \mu = \frac{\cos \frac{\pi}{h_1} \cos \frac{\pi}{h_2} - \cos \varphi}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{h_1} \operatorname{sen} \frac{\pi}{h_2}}, \quad \mu = \frac{-\cos \frac{\pi}{h_1} \cos \frac{\pi}{h_2} - \cos \varphi}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{h_1} \operatorname{sen} \frac{\pi}{h_2}},$$

dove φ può essere diverso nelle due formole.

Ora il massimo valore di $|\cos \varphi|$ è $\cos \frac{\pi}{5} = \operatorname{sen} \frac{3\pi}{10} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, quindi dalle (2), (3) risulta immediatamente $|\mu| < 1$, e le (4) danno:

$$|\mu| \leq \frac{\operatorname{sen} \frac{3\pi}{10} - \cos \frac{\pi}{h_1} \cos \frac{\pi}{h_2}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{h_1} \operatorname{sen} \frac{\pi}{h_2}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{4} - C}{S} = H.$$

Per le varie combinazioni di valori di h_1 , h_2 si ha:

per $h_1 = 3$, $h_2 = 3$:

$$C = \frac{1}{4}, \quad S = \frac{3}{4}, \quad H = \frac{\sqrt{5}}{3} < 1;$$

per $h_1 = 3$, $h_2 = 5$:

$$C = \frac{1+\sqrt{5}}{8}, \quad S = \frac{1}{8} \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}, \quad H = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{15 - 3\sqrt{5}}} < 1;$$

per $h_1 = 5$, $h_2 = 5$:

$$C = \frac{3+\sqrt{5}}{8}, \quad S = \frac{5-\sqrt{5}}{8}, \quad H = \frac{1}{\sqrt{5}} < 1.$$

In tutti i casi dunque $|\mu| < 1$, quindi $\lambda < 0$.

Le corde $p_1 q_1$, $p_2 q_2$ si tagliano pertanto in un punto interno r del cerchio dei 4 poli.

5. *I segmenti che congiungono le coppie di poli delle sostituzioni d'un gruppo finito hanno tutti un punto comune.*

Sieno p_3 , q_3 i poli d'una terza sostituzione appartenente al gruppo finito considerato. I punti p_1 , q_1 , p_3 , q_3 staranno sopra un cerchio, e i punti p_2 , q_2 , p_3 , q_3 staranno sopra un cerchio; il punto r avrà egual potenza rispetto ai tre cerchi, e quindi $p_3 q_3$ passerà per r .

6. *Da ogni gruppo finito di sostituzioni lineari si ottiene per proiezione stereografica un gruppo finito di rotazioni d'una sfera su sè stessa; e quindi non vi sono altri gruppi finiti di sostituzioni lineari che i gruppi ciclici e poliedrici.*

Basta condurre per r , perpendicolarmente al piano della variabile complessa, un

segmento ro tale che:

$$\overline{ro^2} = p_1 r . r q_1 = p_2 r . r q_2 = \dots,$$

e prendere r come centro ed or come raggio della sfera, ed o come centro della proiezione stereografica; gli angoli $p_i o q_i$ risultano retti, e quindi le proiezioni di p_i e q_i sulla sfera sono gli estremi d'un diametro ⁸⁾).

Pavia, 26 dicembre 1912.

G. VIVANTI.

⁸⁾ Loc. cit. ²⁾, art. 49.