Ueber eindeutige Functionen mit mehreren, nicht vertauschbaren Perioden. II.

Von

OTTO RAUSENBERGER in Frankfurt a. M.

In dem ersten Theile der vorliegenden Abhandlung (Annalen XX, pag. 187) liess ich die Behandlung der Gruppen

$$y = x + 1, \quad y = -\frac{a}{x+b}$$

für $0 < a \leq \frac{1}{4}$, b von Null verschieden, unausgeführt, da dieselbe auf ausserordentliche Complicationen zu stossen schien. Eine erneute Inangriffnahme des Gegenstandes zeigte indessen, dass die vorhandenen scheinbaren Schwierigkeiten sich leicht überwinden und die fraglichen Gruppen sich in allgemeiner Form darstellen lassen. Durch die folgenden Entwicklungen wird die Untersuchung für reelle, positive a und reelle b vollständig abgeschlossen, während gleichzeitig auch gewisse Fälle complexer a und b in Betracht gezogen werden. Die früher gefundenen Gruppen der erweiterten und der parametrischen Modulfunctionen werden als Specialfälle — die sich allerdings scharf von den übrigen abheben — der Gruppen erscheinen, die uns im Folgenden beschäftigen sollen.

§ 1.

Eintheilung in 3 Hauptfälle.

1) Ist in der reellen Gruppe

$$(1) \quad y = x + 1, \quad y = \varphi_1(x) = -\frac{a}{x+b}$$

$0 < a \leq \frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2} \leq b \leq \frac{1}{2}$ (was immer zu bewerkstelligen ist), so stellt $\varphi_1(x)$ (vgl. I, pag. 193) eine rational oder irrational cyklische Periode dar, wenn $b^2 - 4a < 0$ ist; das Gleiche gilt für $\varphi_1(x \pm 1)$ $= -\frac{a}{x+b \pm 1}$, wenn $(b \pm 1)^2 - 4a < 0$ wird; das Zeichen $\pm$ ist

so zu wählen, dass mod. $(b \pm 1) < 1$ wird. Hiernach erhalten wir 3 Hauptfälle:

a) $\varphi_1(x)$ und $\varphi_1(x \pm 1)$ sind beide cyklisch; alsdann werden die Bedingungen aufzustellen sein, unter denen beide *rational* cyklisch sind, und diese werden sich unter einer gewissen Beschränkung als hinreichend für die Zulässigkeit der Gruppen erweisen.

b) $\varphi_1(x)$ ist cyklisch, $\varphi_1(x \pm 1)$ ist hyperbolisch oder im Grenzfall parabolisch; alsdann ist nur eine Bedingung zu befriedigen, und in den zugehörigen Functionen wird *ein* variabler Parameter auftreten.

c) $\varphi_1(x)$ und $\varphi_1(x \pm 1)$ sind beide hyperbolisch oder parabolisch; dann sind gar keine weiteren Bedingungen zu erfüllen und die zugehörigen Functionen enthalten *zwei* Parameter. — In den beiden letzten Fällen wird eine Ausdehnung auf *complexe* Gruppen möglich sein.

2) Für $16 < a$ ist immer $b^2 - 4a < 0$, und die Gruppe gehört der ersten oder zweiten Classe an; für $0 < a \leq 16$ dagegen gehört sie zur zweiten oder dritten Classe, da alsdann jedenfalls $(b \pm 1)^2 - 4a > 0$ ist.

§ 2.

Erster Hauptfall.

1. Damit $\varphi_1(x)$ eine rational cyklische Periode sei, muss es (s. I, pag. 199) die Form annehmen:

$$(1) \quad \varphi_1(x) = - \frac{\frac{c^2}{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}{x + c \cotang \frac{\varphi}{2}},$$

worin φ vorläufig nur ein *rationaler* Bruchtheil von 2π zu sein braucht. Indessen lässt es sich leicht darthun, dass wir uns auf den Fall $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ beschränken dürfen; denn dieselbe Betrachtung, wie in I, pag. 199 zeigt, dass andernfalls ein $\varphi_*(x)$ eine grössere Determinante wie $\varphi_1(x)$ besitzen würde; in Folge dessen könnte entweder $\varphi_1(x)$ unmöglich sein (wenn die Determinante von $\varphi_*(x)$ die Einheit übersteigen würde, ein Fall der übrigens nicht eintreten kann, wenn c hinlänglich klein gewählt wird), oder wir würden auf eine erweiterte Modulgruppe geführt, oder $\varphi_*(x)$ würde demselben Gebiet wie $\varphi_1(x)$ angehören. Jedenfalls leuchtet ein, dass man auch $\varphi_1(x)$ als Iterirung von $\varphi_*(x)$ betrachten kann und dass sich daher $\varphi_*(x)$ ebensogut zur Erzeugung der Gruppe verwenden lässt wie $\varphi_1(x)$. — Die Constante c bestimmt sich durch die Bedingung, dass auch $\varphi_1(x \pm 1) = - \frac{a}{x+b \pm 1}$ rationalcyklisch sein soll. Wir müssen nämlich setzen

$$(2) \quad \varphi_1(x \pm 1) = - \frac{\frac{C^2}{4 \sin^2 \frac{\psi}{2}}}{x + C \cotang \frac{\psi}{2}},$$

woraus durch Vergleich mit (1) folgt

$$(3) \quad \frac{c^2}{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{C^2}{4 \sin^2 \frac{\psi}{2}},$$

und

$$(4) \quad c \cotang \frac{\varphi}{2} \pm 1 = C \cotang \frac{\psi}{2},$$

woraus wir unter Berücksichtigung, dass c und C entgegengesetzte Zeichen haben, nach Elimination von C erhalten:

$$(5) \quad c = \pm \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{\psi}{2}},$$

$$(6) \quad \varphi_1(x) = - \frac{\frac{1}{4 \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{\psi}{2} \right)^2}}{x \pm \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{\psi}{2}}}$$

und

$$(7) \quad \varphi_1(x \pm 1) = - \frac{\frac{1}{4 \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{\psi}{2} \right)^2}}{x \mp \frac{\cos \frac{\psi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{\psi}{2}}}.$$

Auch bei ψ dürfen wir uns auf $\psi = \frac{2\pi}{n}$ beschränken; ferner müssen wir, da $\text{mod. } b \leq \frac{1}{2}$ sein soll, $\cos \frac{\psi}{2} < \cos \frac{\varphi}{2}$, also $\varphi > \psi$ nehmen. Bemerkenswerth ist es, dass sich bei dieser Classe keine *complexen* Gruppen ergeben.

2. Um die wirkliche Existenzberechtigung der soeben gefundenen, doppelt unendlichen Gruppenreihe nachzuweisen, führen wir die zugehörige Eintheilung der Ebene in Parcellen durch, bei der ein wesentlich neues Moment im Vergleich zu den früher behandelten Gruppen auftritt. Zur Herstellung eines in's Unendliche reichenden Fundamentalpolygons für die Gruppe

$$y = x + 1, \quad y = -\frac{a}{x}$$

brauchen wir 2 parallele Gerade, deren auf der Abscissenaxe gemessener Abstand 1, deren Richtung und Lage im Uebrigen aber willkürlich ist, sowie einen um den Nullpunkt beschriebenen Kreis

mit dem Radius mod. $a^{\frac{1}{2}}$ oder eine Abbildung desselben durch $y = x \pm k$. Dieser Kreis, den ich als *Fundamentalkreis* bezeichnen will, wird durch die Periode $y = -\frac{a}{x}$ in sich selbst abgebildet, während ein ausserhalb des Kreises gelegener Punkt in einen inneren transformirt wird und umgekehrt. Auch für die zur Gruppe

$$y = x + 1, \quad y = \varphi_1(x) = -\frac{a}{x+b}$$

gehörige Eintheilung brauchen wir dieselben Geraden und denselben *primären Fundamentalkreis* mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und

mod. $a^{\frac{1}{2}}$ als Radius; allein es tritt noch ein *secundärer Fundamentalkreis* hinzu, der dem primären congruent ist und dessen Mittelpunkt im Punkte $-b$ liegt; aus diesen beiden Fundamentalkreisen geht durch Abbildung mittelst $y = x \pm k$ ein Kreissystem hervor, dessen benachbarte Individuen sich in unserem ersten Hauptfall schneiden. Die Bedeutung des primären und des secundären Fundamentalkreises ist leicht zu erkennen. Durch die Substitution $y = \varphi_1(x)$ wird der secundäre Kreis in den primären transformirt; ein Punkt ausserhalb des ersteren geht in einen solchen innerhalb des letzteren, ein Punkt innerhalb des ersteren in einen solchen ausserhalb des letzteren über. Für die Substitution $y = \varphi_1(x \pm 1)$ spielen der primäre Kreis einer-

Fig. I.

seits und die Abbildung des secundären durch $y = x \mp 1$ andererseits dieselbe Rolle.

Hiernach verfahren wir in unserem Falle folgendermassen (s. Fig. I).

Die beiden Fundamentalkreise, deren Mittelpunkt resp. der Nullpunkt und der Punkt

$$\mp \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{\psi}{2}}$$

sind, beschreiben wir mit dem Radius $\frac{1}{2 \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{\psi}{2} \right)}$; beide ver-

vielfältigen wir durch die Transformationen $y = x \pm k$. Die parallelen Geraden legen wir am Besten durch die Mittelpunkte des secundären Fundamentalkreises und seiner erwähnten Abbildungen und zwar senkrecht zur Abscissenaxe. So entstehen oberhalb und unterhalb der letzteren unendlich viele unendliche Fundamentalpolygone, die von 2 Geraden und Theilen von 3 Kreisen begrenzt werden. Der obere Schnittpunkt des primären Kreises mit dem secundären ist

$$x_1 = \frac{\mp \cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2}}{2 \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{\psi}{2} \right)},$$

der entsprechende des primären Kreises mit der ihn schneidenden Abbildung des secundären ist

$$x_2 = \frac{\pm \cos \frac{\psi}{2} + i \sin \frac{\psi}{2}}{2 \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{\psi}{2} \right)}.$$

In x_1 und x_2 entstehen resp. die Winkel φ und ψ . Ferner findet man leicht, dass x_1 und x_2 durch (6) resp. (7) in sich selbst transformirt werden, also Centren der durch diese Substitutionen gebildeten Cyklen sind. Das Fundamentalpolygon hat also die Winkel φ und ψ , sowie einen von 0° und zwei andere, welche im Allgemeinen supplementär (bei unserer Wahl der Geraden rechte) sind. Dass nun die Gruppe wirklich zulässig ist, erkennen wir daraus, dass sämtliche Polygone, welche an das Fundamentalpolygon anstossen (wir wollen jetzt als solches speciell dasjenige unendliche Vieleck betrachten, welches oberhalb, resp. unterhalb des Nullpunktes gelegen ist), dasselbe nicht überdecken. Es ist dies für die angrenzenden unendlichen Polygone und die um x_1 und x_2 gelagerten (in der Figur nicht ausgeführten) unmittelbar ersichtlich, und wir müssen nur nachweisen, dass die Polygone der beiden Cyklen, die sich an die krummlinige Begrenzung des Fundamentalpolygons anlegen, dieselbe auch vollständig in Anspruch nehmen und keinen Theil derselben frei lassen. Dieser Nachweis ergiebt sich daraus, dass die beiden Punkte

$$y_1 = \frac{\mp 2 \cos \frac{\varphi}{2} + i}{2 \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{\psi}{2} \right)}$$

und

$$y_1 = \frac{\pm 2 \cos \frac{\psi}{2} + i}{2 \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{\psi}{2} \right)}$$

durch (6) resp. (7) in denselben Punkt

$$y = \frac{i}{2 \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{\psi}{2} \right)}$$

transformirt werden und dieser durch die inversen Substitutionen wieder in y_1 und y_2 übergeführt wird.

3. Es erübrigt noch, aus der behandelten Gruppe einige Specialfälle herauszugreifen. Nehmen wir $\varphi = 180^\circ$, so finden wir

$$y = x + 1, \quad y = - \frac{1}{4 \cos^2 \frac{\psi}{2} x},$$

also die Gruppe der *erweiterten Modulfunktionen*; der secundäre Fundamentalkreis fällt hier mit dem primären zusammen. Immerhin charakterisirt sich dieser Specialfall als bedeutend von den übrigen verschieden durch den Umstand, dass hier die Abbildungen des primären Kreises sich einander schneiden.

Für $\varphi = \psi$ ergibt sich

$$y = x + 1, \quad y = - \frac{1}{16 \cos^2 \frac{\varphi}{2} x + \frac{1}{2}}$$

Für $a = \frac{1}{4}$ finden wir nur

$$y = x + 1, \quad y = - \frac{\frac{1}{4}}{x}$$

und

$$y = x + 1, \quad y = - \frac{\frac{1}{4}}{x + \frac{1}{2}}$$

§ 3.

Zweiter Hauptfall.

1. Im zweiten Hauptfall schliessen wir wieder, dass die Gruppe die Form

$$(1) \quad y = x + 1, \quad y = \varphi_1(x) = -\frac{\frac{c^2}{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}{x + c \cotang \frac{\varphi}{2}},$$

$\varphi = \frac{2\pi}{n}$, haben muss; c braucht hier keine Bedingungsgleichung zu erfüllen, sondern muss lediglich der Ungleichheit, die aus

$$(b \pm 1)^2 - 4a \geq 0$$

resultirt, nämlich

$$(2) \quad 1 - \text{mod. } c \cotang \frac{\varphi}{2} - c^2 \geq 0$$

genügen. Für den Grenzfall finden wir

$$\text{mod. } c = -\cotang \frac{\varphi}{2} \pm \frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2}};$$

also, da wir nur das obere Zeichen wählen können, um für $\text{mod. } c$ eine positive Grösse zu erhalten:

$$\text{mod. } c = \tan \frac{\varphi}{4}.$$

Die Ungleichheit lautet daher

$$(3) \quad \text{mod. } c \leq \tan \frac{\varphi}{4}.$$

2. Dass die soeben gefundenen Bedingungen auch hinreichend für die Existenzberechtigung der Gruppe sind, folgt wieder aus der Herstellung des Periodicitätsnetzes, das wir genau in derselben Weise wie für den vorigen Fall construiren (s. Fig. II).

Fig. II.

Auch hier schneiden sich der secundäre und der primäre Fundamentalkreis unter dem Winkel φ ; dagegen wird der primäre Kreis von der nächstgelegenen Abbildung des secundären nicht geschnitten, da die Centraldistanz beider $1 - \text{mod. } c \cotang \frac{\varphi}{2}$, ihr Radius aber $\frac{\text{mod. } c}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}$ ist. Die Bedingung nämlich dafür, dass die Centraldistanz nicht kleiner als der Durchmesser ist, drückt sich durch

$$1 - \text{mod. } c \cotang \frac{\varphi}{2} \geq \frac{\text{mod. } c}{\sin \frac{\varphi}{2}}$$

oder

$$\text{mod. } c \leq \text{tang } \frac{\varphi}{4}$$

aus, was mit (3) übereinstimmt.

Wir brauchen nun wieder lediglich die Abbildungen des Fundamentalraums ins Auge zu fassen, welche sich um letzteren lagern. In x_1 , sowie bei den Punkten y_1 , y_2 und y haben wir dasselbe Verhalten wie im vorigen Fall, und man sieht weiter, dass sich durch $\varphi_1(x \pm 1)$ die in Betracht kommende Abbildung des secundären Kreises in den primären verwandelt u. s. w. Eine Ueberdeckung kommt auch hier nicht vor.

3. Wir können jetzt die bisher festgehaltene Voraussetzung fallen lassen, dass c reell sei, und complexe c innerhalb einer gewissen, noch später festzusetzenden Ausdehnung zulassen. In dem Netze bleibt alsdann der Fundamentalkreis derselbe wie für ein c von dem gleichen absoluten Betrage; der Mittelpunkt des secundären Kreises wird dagegen von der Abscissenaxe wegverlegt, da er um die complexe Grösse $-c \cotang \frac{\varphi}{2}$ vom Nullpunkt entfernt ist. Die Centraldistanz — und hiermit die Winkel, unter denen beide Kreise sich schneiden — unterscheidet sich nicht von derjenigen, die die nämlichen Kreise für ein reelles c von demselben absoluten Werth besitzen. Man erkennt sofort, dass die Verhältnisse vollständig die gleichen bleiben wie bei reellen c , falls nur der secundäre Fundamentalkreis die benachbarte Abbildung des primären nicht schneidet. Die Bedingungen hierfür ergeben sich aus Figur III (siehe folgende Seite). Setzen wir nämlich $c = \gamma + \delta i$, so ist der Radius der Kreise gleich

$$\frac{\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}, \quad AC = \sqrt{\gamma^2 + \delta^2} \cdot \cotang \frac{\varphi}{2},$$

$$AB = 1, \quad AD = \text{mod. } \gamma \cdot \cotang \frac{\varphi}{2}, \quad CD = \text{mod. } \delta \cdot \cotang \frac{\varphi}{2},$$

und da BC mindestens gleich dem Durchmesser der Kreise sein muss,

$$\left(1 - \text{mod. } \gamma \cdot \cotang \frac{\varphi}{2}\right)^2 + \delta^2 \cotang^2 \frac{\varphi}{2} \geq \frac{\gamma^2 + \delta^2}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

oder

$$1 \geq \gamma^2 + \delta^2 + 2 \text{ mod. } \gamma \cdot \cotang \frac{\varphi}{2}$$

oder

$$\left(\text{mod. } \gamma + \cotang \frac{\varphi}{2}\right)^2 + \delta^2 \leq \frac{1}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Der Convergenzbezirk für c ist das gemeinsame Stück zweier Kreise, deren Radius $\frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2}}$ ist und deren Mittelpunkte um $\cotang \frac{\varphi}{2}$ nach rechts und links vom Nullpunkt entfernt sind.

Fig. III.

4. Die früher gefundene parametrische Modulgruppe ist ein Specialfall der eben behandelten.

§ 4.

Dritter Hauptfall.

1. Besteht bei positivem a und reellem b die Ungleichheit $b^2 - 4a \geq 0$, so sind weder $y = -\frac{1}{x+b}$ noch $y = -\frac{a}{x+b \pm 1}$ cyclisch; ausser jener Ungleichheit sind dann keine Bedingungen zu erfüllen.

Die Parcellirung stellen wir ebenso her wie in den beiden vorigen Fällen; ein Schneiden der Kreise findet hier überhaupt nicht statt. Die Zulässigkeit der Gruppe liesse sich für diesen Fall ganz ähnlich wie für den vorhergehenden darthun; doch ziehe ich es vor, die Existenz eines Gebietes direct nachzuweisen, innerhalb dessen keine 2 Punkte durch Periodicität verbunden sind. Wir bezeichnen (siehe folgende Seite Fig. IV) mit I die gesamte Ebene mit Ausschluss der beiden Fundamentalkreise und ihrer Abbildungen durch $y = x \pm k$, mit II den Inhalt des primären, mit III den des secundären Fundamentalkreises; ferner mit IV und V die erwähnten Abbildungen der

beiden letzteren. Alle Perioden der Gruppe lassen sich aus 3 Elementen zusammensetzen:

- (1) $y = x \pm k,$
- (2) $y = -\frac{a}{x \pm b} = \varphi_1(x),$
- (3) $y = \varphi_{-1}(x).$

Gehen wir nun von einem Punkte in einem der Parallelstreifen des Gebietes I aus, so bleiben wir durch Anwendung von (1) in I; lassen wir jetzt (2) folgen, so wissen wir, dass hierdurch jeder Punkt ausserhalb III — und das ist hier der Fall — innerhalb II abgebildet wird; auch bei wiederholter Anwendung von (2) bleiben wir in II. Folgt hierauf

Fig. IV.

wieder (1), so gelangen wir nach IV, hieraus durch (2) nach II u. s. w. Schliessen wir daher die ganze Folge von Substitutionen, in denen (3) noch nicht vorkommt, mit (1) ab, so sind wir in I oder IV. Nun lassen wir auch (3) ein oder mehrmals eintreten, wodurch wir nach III versetzt werden, wie sich dies aus Früherem ergibt. Durch (1) gelangen wir dann nach V, durch (2) wieder nach II oder durch (3) nach III u. s. w. Es ist klar, dass wenn man nicht denselben Weg wieder zurückgeht, also u. A. (2) und (3) auf einander folgen lässt, man niemals nach I zurückgelangt, falls man diesen Raum einmal verlassen hat. *Jeder Parallelstreifen von I stellt daher einen Fundamentalraum dar.* Zugleich erkennt man, dass in der ganzen Gruppe keine cyclische Periode vorkommt.

2. Auch hier ist eine Ausdehnung auf complexe Gruppen sofort zulässig. Die gemachten Schlüsse bleiben ungeändert bestehen, so lange die beiden Fundamentalkreise und deren Abbildungen durch (1) sich einander nicht schneiden. Aus einer Figur, welche Fig. III ähnlich ist, ergeben sich die Bedingungen hierfür ohne Schwierigkeit. Zunächst haben wir a der Ungleichheit

$$(4) \quad \text{mod. } a \leq \frac{1}{4}$$

zu unterwerfen, damit der primäre Kreis von seinen benachbarten Abbildungen nicht geschnitten wird. Setzen wir $a = \alpha + \beta i$, $b = \gamma + \delta i$, so ergibt sich als Bedingung dafür, dass der secundäre Fundamentalkreis mit keiner Abbildung des primären in Collision geräth, die Ungleichheit

$$(5) \quad (\gamma + k)^2 + \delta^2 \geq 4(\alpha^2 + \beta^2) \geq 4 \text{ mod. } a^2,$$

die für beliebige ganzzahlige, positive und negative k befriedigt sein muss. Während wir daher für a einen Convergenzkreis haben, der durch die Ungleichheit (4) bestimmt ist, dürfen wir b über die ganze Ebene der complexen Zahlen ausdehnen mit Ausschluss unendlich vieler Kreise, deren Gleichungen

$$(\gamma + k)^2 + \delta^2 = 4 \text{ mod. } a^2$$

lauten, die also den Radius $2 \text{ mod. } a$ besitzen und deren Centren die Punkte $0, \pm 1, \pm 2$ u. s. w. sind.

Die hauptsächlichsten der bis jetzt als möglich erkannten Gruppen sind demnach die folgenden.

1. Die Gruppe

$$y = x + 1, \quad y = -\frac{1}{4\left(\cos \frac{\pi}{m} + \cos \frac{\pi}{n}\right)^2};$$

$$x \pm \frac{\cos \frac{\pi}{m}}{\cos \frac{\pi}{m} + \cos \frac{\pi}{n}}$$

die in derselben enthaltenen cyklischen Perioden führen alle nach einer m -fachen oder n -fachen Iterirung zum Anfangswerth zurück.

2. Die einen Parameter enthaltende Gruppe

$$y = x + 1, \quad y = -\frac{\frac{c^2}{4 \sin^2 \frac{\pi}{m}}}{x + c \cotang \frac{\pi}{m}},$$

worin $c = \gamma + \delta i$ der Bedingung

$$\left(\text{mod. } \gamma + \cotang \frac{\pi}{m}\right)^2 + \delta^2 \leq \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{m}}$$

unterworfen ist. In dieser Gruppe kommen nur solche cyklische Perioden vor, die nach m -maliger Iterirung wieder den Anfangswerth liefern.

3. Die zwei Parameter enthaltende Gruppe:

$$y = x + 1, y = -\frac{a}{x+b},$$

worin a und $b = \gamma + \delta i$ den Ungleichheiten

$$\text{mod. } a \leq \frac{1}{4}$$

und

$$(k + \gamma)^2 + \delta^2 \geq \text{mod. } a$$

genügen müssen. *Cyklische Perioden kommen in dieser Gruppe überhaupt nicht vor.*

Die Einführung specieller Benennungen für die gefundenen Gruppen und die zugehörigen Transcendenten verschiebe ich auf eine spätere Gelegenheit.

Frankfurt a. M., den 15. August 1882.