SULL' ELETTROSTATICA DI UN CAMPO GRAVITAZIONALE UNIFORME E SUL PESO DELLE MASSE ELETTROMAGNETICHE.

di ENRICO FERMI.

Introduzione.

Fine di questo scritto è la ricerca dell'alterazione prodotta da un campo gravitazionale uniforme sui fenomeni elettrostatici che hanno luogo in esso fatta sulle basi della teoria generale della relatività. Stabilita l'equazione differenziale che lega il potenziale elettrico alla densità delle cariche, e che corrisponde all'equazione di Poisson dell'elettrostatica classica, si riesce ad integrarla nel caso almeno che il campo di gravitazione sia sufficientemente poco intenso, ed il campo della gravitazione terrestre soddisfa largamente a tale condizione, trovando così le correzioni da apportarsi alla legge di Coulomb per la presenza del campo di gravità.

In una prima applicazione si studia la distribuzione dell'elettricità sopra una sfera conduttrice mostrando che per influenza del campo la sfera si polarizza.

La seconda applicazione è dedicata alla ricerca del peso di una massa elettromagnetica, vale a dire della forza che, per effetto di trovarsi in un campo di gravità, si esercita sopra un sistema di cariche elettriche rigido (per es. sostenuto da un dielettrico rigido).

Si trova che tale peso è dato dal prodotto dell'accelerazione di gravità per $\frac{u}{c^2}$ dove u rappresenta l'energia elettrostatica delle cariche del sistema e c la velocità della luce. Si trova quindi che la massa pesante, cioè il rapporto tra il peso e l'accelerazione di gravità, per il nostro sistema non coincide almeno in generale, con la massa inerte, poichè,

ad esempio per un sistema avente simmetria sferica, quest'ultima viene data da $\frac{4}{3} \frac{u}{c^2}$, con i simboli di prima.

È noto del resto come la relatività in senso stretto conduca a prendere $\frac{\Delta u}{c^2}$ come aumento della massa *inerte* di un sistema al quale viene comunicata l'energia ΔU , e ciò può agevolmente mettersi in relazione con il risultato accennato.

Si mostra da ultimo come possa trovarsi un punto che, rispetto al peso del nostro sistema di cariche, gode delle stesse proprietà di cui gode il centro di gravità rispetto al peso di un ordinario sistema di masse materiali.

Parte Prima.

Elettrostatica di un campo di gravità.

§ 1. — Consideriamo una regione dello spazio sede di un campo uniforme di gravità e supponiamo che i fenomeni elettrostatici che pensiamo aver luogo in essa siano talmente poco intensi che si possa ritenere trascurabile l'alterazione da essi prodotta sulla metrica della regione in discorso. L'elemento metrico della varietà spazio-tempo, relativo a tale regione potrà in tali ipotesi, porsi sotto la forma ¹⁾

$$(1) \quad ds^2 = a dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

essendo a funzione soltanto di z .

Le variabili t, x, y, z saranno anche indicate con x_0, x_1, x_2, x_3 ed i coefficienti della forma quadratica (1) con g_{ik} . Sia φ_i il potenziale vettore ed F_{ik} il campo elettromagnetico. Sarà

$$(2) \quad F_{ik} = \varphi_{ik} - \varphi_{ki}$$

riferendoci alla forma fondamentale (1).

¹⁾ T. Levi Civita. Nota II. « Sui ds^2 einsteiniani ». N. 7. *Rend. Acc. Lincei*, 27, 1.° semestre.

Limitando le nostre considerazioni ai campi elettrostatici porremo $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$ e, per brevità, $\varphi_0 = \varphi$. Ora si ha:

$$F_{ik} = \varphi_{ik} - \varphi_{ki} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$$

cioè

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{01} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad F_{02} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad F_{03} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ F_{23} = F_{31} = F_{12} = 0 \quad F_{ik} = -F_{ki} \quad F_{ii} = 0. \end{array} \right.$$

Si ha inoltre:

$$F^{(ij)} = \sum_{hk} g^{(ih)} g^{(jk)} F_{hk} = g^{(ii)} g^{(jj)} F_{ij}$$

da cui osservando che:

$$g^{(00)} = \frac{1}{a} \quad g^{(11)} = g^{(22)} = g^{(33)} = -1$$

si ottiene:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} F^{(01)} = -\frac{1}{a} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad F^{(02)} = -\frac{1}{a} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad F^{(03)} = -\frac{1}{a} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ F^{(23)} = F^{(31)} = F^{(12)} = 0 \quad F^{(ik)} = -F^{(ki)} \quad F^{(ii)} = 0. \end{array} \right.$$

Nel caso che stiamo trattando può darsi all'azione la forma seguente:

$$(5) \quad W = \int_{\omega} \sum_{ik} F_{ik} F^{(ik)} d\omega + \int de \int \varphi dx_0$$

dove

$$d\omega = \sqrt{-\|g_{ik}\|} dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 = \sqrt{a} dx dy dz dt$$

è l'elemento di ipervolume della varietà e l'integrazione relativa a $d\omega$ va estesa ad una determinata regione della varietà mentre le integrazioni relative a de , dx_0 vanno estese rispettivamente a tutti gli elementi di carica elettrica le cui linee orarie passano per la regione considerata ed a quei segmenti delle dette linee che in essa si trovano.

§ 2. — Nella variazione di W, φ potrà variarsi arbitrariamente, con l'unica condizione che sul contorno della regione d'integrazione sia $\delta\varphi = 0$.

Invece le variazioni δx , δy , δz oltre alla condizione $\delta x = \delta y = \delta z = 0$ sul contorno potranno essere assoggettate anche ad altre da determinarsi nei vari casi particolari. Per esempio nell'interno di un corpo conduttore esse saranno completamente arbitrarie mentre in un dielettrico rigido dovranno rappresentare le componenti di uno spostamento virtuale rigido e così di seguito.

Portando in (5) i valori (3), (4) si trova :

$$(6) \quad W = -\frac{1}{2} \iiint \frac{1}{\sqrt{a}} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz dt + \int de \int \varphi dt$$

da cui

$$(7) \quad \delta W = \iiint \delta \varphi \left[\frac{1}{\sqrt{a}} \Delta_2 \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{d}{dz} \frac{1}{\sqrt{a}} + \rho \right] dx dy dz dt + \iiint \rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \delta z \right) dx dy dz dt$$

come subito si ricava osservando che, per le ipotesi fatte, si ha, lungo una linea oraria, $dx = dy = dz = 0$ e che, essendo ρ la densità elettrica, $\rho dx dy dz = de$.

Perchè δW sia identicamente nullo si trova intanto, siccome $\delta \varphi$ è arbitrario nell'interno del campo d'integrazione :

$$(8) \quad \Delta_2 \varphi - \frac{d \log \sqrt{a}}{dz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\rho \sqrt{a} .$$

Dovrà oltre ciò aversi :

$$(9) \quad \iiint \rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \delta z \right) dx dy dz dt = 0 .$$

Per ogni sistema di valori di δx , δy , δz conforme ai vincoli supposti.

Nell'equazione (8) è contenuta la generalizzazione della legge di Poisson a cui la (8) si riduce se a è costante, cioè se manca il campo gravitazionale.

§ 3. — Se con G indichiamo accelerazione di gravità del campo considerato, cioè l'accelerazione con cui comincia a muoversi un punto materiale libero, si ha

$$G = - \frac{1}{2} \frac{da}{dz}.$$

Con ciò la (8) si scrive:

$$(11) \quad \Delta_z \varphi + \frac{G}{a} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = - \rho \sqrt{a}.$$

Per trovare la soluzione di (11), dato in ogni punto ρ , penseremo che le cariche elettriche siano contenute entro una piccola regione attorno all'origine delle coordinate. Porremo inoltre, nell'origine, $a = c^2$ (c = velocità della luce nell'intorno dell'origine) e supporremo la gravità così poco intensa da potersi trascurare quei termini che contengono il quadrato del rapporto $\frac{lG}{c^2}$ dove l rappresenta la massima lunghezza che interviene nel problema che si sta considerando. Sotto tali ipotesi può porsi:

$$\sqrt{a} = c + \frac{1}{2c} \frac{da}{dz} z = c \left(1 - \frac{G}{c^2} z \right).$$

La (11) può scriiversi perciò:

$$(12) \quad \Delta_z \varphi + \frac{G}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = - c \left(1 - \frac{G}{c^2} z \right) \rho.$$

L'integrale di questa equazione, come mostra senz'altro una verifica materiale e dato, con l'approssimazione indicata, da:

$$(13) \quad \begin{aligned} \varphi_P &= \frac{c}{4\pi} \int \left(1 - \frac{G}{c^2} z \right) z_M d\tau_M \left(\frac{1}{r} - \frac{G}{2c^2} \frac{z_P - z_M}{r} \right) = \\ &= \frac{c}{4\pi} \int \varrho_M d\tau_M \left(\frac{1}{r} - \frac{G}{2c^2} \frac{z_P + z_M}{r} \right) \end{aligned}$$

dove M è il punto generico del campo τ_M occupato da cariche elettriche, P il punto nel quale si calcola φ ed r la distanza MP .

Data la linearità dell'equazione (12) potrà naturalmente aggiungersi a (13) un qualsiasi integrale dell'equazione :

$$(12)^* \quad \Delta^2 \varphi + \frac{G}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

ottenuta ponendo in (12) $\rho = 0$. Tale integrale rappresenterà il campo dovuto a cause esterne alle ρ_m . Per le applicazioni che abbiamo in vista conviene considerare una particolare soluzione di (12)* data da

$$(14) \quad \varphi = -c E_x^* x - c E_y^* y + \frac{c^2}{G} E_z^* e^{-\frac{G}{c} z}$$

essendo E_x^* E_y^* E_z^* delle costanti.

Nell'origine essendo E la forza elettrica si ha

$$E_x = -\frac{1}{c} F_{01} \quad E_y = -\frac{1}{c} F_{02} \quad E_z = -\frac{1}{c} F_{03}.$$

Risulta di qui che nell'origine la forza elettrica del campo esterno (14) ha per componenti :

$$E_x^* \quad E_y^* \quad E_z^*.$$

§ 4. — Calcoliamo ora il campo elettrico dovuto ad una carica e concentrata nell'origine delle coordinate. Da (13) si ha :

$$(15) \quad \varphi = \frac{c e}{4 \pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{G}{2c^2} \frac{z}{r} \right)$$

e questa formula dà come subito si riconosce ponendo $G=0$ la generalizzazione della legge elementare di Coulomb. Ricordando le (3) si ottiene :

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{01} = \frac{c e}{4 \pi} \left(\frac{x}{r^3} - \frac{G}{2c^2} \frac{z x}{r^3} \right) \\ F_{02} = \frac{c e}{4 \pi} \left(\frac{y}{r^3} - \frac{G}{2c^2} \frac{z y}{r^3} \right) \\ F_{03} = \frac{c e}{4 \pi} \left(\frac{z}{r^3} - \frac{G}{2c^2} \frac{z^2}{r^3} + \frac{G}{2c^2} \frac{1}{r} \right). \end{array} \right.$$

Possiamo riassumere le tre formule precedenti in un'unica vettoriale. Indicando infatti con F_0 il vettore di componenti F_{01} F_{02} F_{03} con $\vec{a}$ un vettore di grandezza 1 e di orientazione MP infine con $\vec{G}$ un vettore di grandezza G e di orientazione le (16) possono scriversi:

$$(17) \quad F_0 = \frac{ce}{4\pi} \left\{ \frac{\vec{a}}{r^2} - \frac{\vec{G} \times \vec{a}}{2c^2 r} \vec{a} + \frac{1}{2c^2 r} \vec{G} \right\}.$$

È interessante confrontare questa formula con quella che dà la forza elettrica esercitata da una carica elettrica e che, in assenza di campo gravitazionale, abbia accelerazione $\vec{\Gamma}$, moto quasi stazionario e velocità trascurabile di fronte a quella della luce. Tale forza, con le stesse notazioni, è espressa da:

$$(18) \quad E = \left\{ \frac{\vec{a}}{r} + \frac{\vec{\Gamma} \times \vec{a}}{c^2 r} \vec{a} - \frac{1}{c^2 r} \vec{\Gamma} \right\}.$$

Di qui si vede che, ponendo in (18)

$$(19) \quad \vec{\Gamma} = -\frac{\vec{G}}{2}$$

si ottiene

$$F_0 = c E.$$

In parole tale risultato può così enunciarsi, osservando che cE è la parte elettrica del campo elettromagnetico generato dalla carica in moto accelerato.

La parte elettrica (F_{01} F_{02} F_{03}) del campo elettromagnetico (F_{ik}) generato da una carica elettrica ferma in un campo uniforme di intensità G è uguale alla parte elettrica del campo elettromagnetico che, in assenza di campo gravitazionale, produrrebbe la stessa carica se si muovesse, con le condizioni indicate con accelerazione $-\frac{G}{2}$ in senso opposto al campo di gravitazione.

§ 5. — Studiamo ora come viene alterata dal campo gravitazionale la distribuzione dell'elettricità sopra un conduttore. Osserviamo perciò che essendo nell'interno del conduttore $\delta x \delta y \delta z$ arbitrarii dovrà essere per (9) nell'interno $\varphi = \text{costante}$ e quindi (8) $\rho = 0$. L'elettricità è quindi tutta alla superficie. Supponiamo allora che il nostro conduttore sia una sfera col centro O nell'origine delle coordinate e raggio R.

Cerchiamo di soddisfare la condizione $\varphi = \text{costante}$ nell'interno assumendo per la densità elettrica superficiale in un punto generico M della superficie l'espressione:

$$(20) \quad \frac{e}{4\pi R^2} + \frac{e}{r} a \cos \theta$$

dove θ rappresenta l'angolo che il raggio vettore OM forma con l'asse z ed a una costante da determinarsi che supponiamo dell'ordine di grandezza di $\frac{G}{c^2}$. Il potenziale in un punto P interno sarà dato (13) da:

$$\varphi_P = \frac{c}{4\pi} \int_{\sigma} \left(\frac{e}{4\pi r^2} + \frac{e}{r} a \cos \theta \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{G}{2c^2} \frac{z_P + z_M}{r} \right) d\sigma$$

dove l'integrazione deve estendersi a tutta la superficie σ della sfera. Trascurando termini di ordine superiore a $\frac{G}{c^2}$ si ottiene:

$$(21) \quad \varphi_P = \frac{c e}{16 \pi^2 r^2} \int \frac{d\sigma}{r} + \frac{c e a}{4 \pi r} \int \frac{\cos \theta d\sigma}{r} - \\ - \frac{c e G z_P}{32 \pi^2 R^2 c^2} \int \frac{d\sigma}{r} - \frac{c e G}{22 \pi^2 R^2 c^2} \int \frac{z_M d\sigma}{r}.$$

Essendo P interno si ha però:

$$\int \frac{d\sigma}{r} = 4\pi S \quad \int \frac{\cos \theta}{r} d\sigma = \frac{4}{3} \pi z_P \quad \int \frac{z_M}{r} d\sigma = \frac{4}{3} \pi R z_P.$$

Si trova dunque:

$$(22) \quad \varphi_P = \frac{c e}{4 \pi R} + \frac{c}{3} \left(\frac{e}{R} a - \frac{e}{2 \pi R c^2} \right) z_P.$$

Se dunque vogliamo φ_r costante dovremo porre

$$a = \frac{1}{2\pi} \frac{G}{c^2}.$$

Sostituendo questo valore in (20) si trova per la densità superficiale l'espressione:

$$(23) \quad \frac{e}{4\pi R^2} \left(1 + \frac{2G}{c^2} R \cos \theta \right).$$

Il fatto di trovarsi in un campo di gravitazione produce dunque nella sfera una polarizzazione di momento

$$\frac{2}{3} \frac{G}{c^2} e R^2.$$

Parte Seconda.

Peso delle masse elettromagnetiche.

§ 6. — Supponiamo di avere un sistema di cariche sostenute da un sostegno rigido per modo che ai $\delta x \delta y \delta z$ del § 2 bisogni attribuire la forma di componenti di uno spostamento rigido. Rimandando a dopo la considerazione degli spostamenti rotatorii consideriamo dapprima quelli traslatorii, vale a dire supponiamo $\delta x \delta y \delta z$ siano arbitrarie funzioni del tempo ma non dipendano da x, y, z .

Cercheremo allora di soddisfare la (9) pensando che il potenziale φ_r in un punto generico P sia la somma del potenziale dato da (13) e di uno di tipo (14). Indicheremo questi due addendi con φ'_r e φ''_r e supporremo che il rapporto fra le derivate di φ''_r e φ'_r rispetto ad una direzione qualunque sia dell'ordine di grandezza $\frac{lG}{c^2}$ di cui abbiamo convenuto di trascurare i quadrati. Con ciò la (9) si scrive:

$$\int dt \left\{ \delta x \int_{\tau_P} \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \frac{\partial \varphi''}{\partial x} \right) \rho_r d\tau_r + \delta y \int_{\tau_P} \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial y} + \frac{\partial \varphi''}{\partial y} \right) \rho_r d\tau_r + \right. \\ \left. + \delta z \int_{\tau_P} \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial z} + \frac{\partial \varphi''}{\partial z} \right) \rho_r d\tau_r \right\} = 0.$$

Questa equazione, dato che δx δy δz sono funzioni arbitrarie del tempo, tra di loro indipendenti, dà luogo alle tre equivalenti:

$$(24) \quad \int_{\tau} \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \frac{\partial \varphi''}{\partial x} \right) \rho_r d\tau_r = \int_{\tau_P} \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial y} + \frac{\partial \varphi''}{\partial y} \right) \rho_r d\tau_r = \\ = \int_{\tau_P} \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial z} + \frac{\partial \varphi''}{\partial z} \right) \rho_r d\tau_r = 0.$$

Ora dall'espressione (13) di φ' si ottiene subito, osservando che

$$\frac{\partial r}{\partial x_P} = \frac{x_P - x_r}{r};$$

$$\int_{\tau_P} \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \rho_r d\tau_r = -\frac{c}{4\pi} \int_{\tau_P} \int_{\tau_M} \rho_P \rho_M d\tau_P d\tau_M \left\{ \frac{x_P - x_M}{r^3} - \frac{G}{2c^2} \frac{(x_P - x_M)(z_P + z_M)}{r^3} \right\}$$

dove entrambi gli integrali vanno estesi al campo occupato da cariche. Scambiando nel secondo membro P con M, ciò che nulla altera, si ottiene:

$$\int_{\tau} \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \rho_r d\tau_r = -\frac{c}{4\pi} \int_{\tau} \int_{\tau_P} \rho_M \rho_P d\tau_M d\tau_P \left\{ \frac{x_M - x_P}{r^3} - \frac{G}{2c^2} \frac{(x_M - z_P)(z_M + z_P)}{r^3} \right\}$$

onde infine, prendendo la semisomma:

$$(25) \quad \int_{\tau_P} \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \rho_r d\tau_r = 0$$

in modo in tutto analogo

$$(26) \quad \int_{\tau_P} \frac{\partial \varphi'}{\partial y} \rho_r d\tau_r = 0.$$

D'altra parte similmente:

$$\int_{\tau_P} \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \rho_r d\tau_r = - \int_{\tau_P} \int_{\tau_M} \rho_P \rho_M d\tau_P d\tau_M \left\{ \frac{z_P - z_M}{r^3} - \frac{G}{2c^2} \frac{(z_P - z_M)(z_P + z_M)}{r^3} + \frac{G}{2c^2} \frac{1}{r} \right\}$$

scambiando M con P

$$\int_{\tau_P} \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \rho_P d\tau_P = -\frac{c}{4\pi} \int_{\tau_P} \int_{\tau_M} \rho_M \rho_P d\tau_M d\tau_P \left\{ \frac{z_M - z_P}{r^3} - \right. \\ \left. - \frac{G}{2c^2} \frac{(z_M - z_P)(z_M + z_P)}{r^3} + \frac{G}{2c^2} \frac{1}{r} \right\}$$

e prendendo la semisomma :

$$(27) \quad \int_{\tau_P} \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \rho_P d\tau_P = -\frac{c}{4\pi} \frac{G}{2c^2} \int_{\tau_P} \int_{\tau_M} \frac{\rho_P \rho_M}{r} d\tau_P d\tau_M = -G \frac{U}{c^2} c$$

indicandosi con U l'energia elettrostatica del sistema (a prescindere dai termini di correzione gravitazionali). Per le ipotesi fatte sulle derivate di φ'' possiamo senz'altro scrivere, con la nostra approssimazione :

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\tau} \frac{\partial \varphi''}{\partial x} \rho d\tau = -c E_x^* e ; \\ \int_{\tau} \frac{\partial \varphi''}{\partial y} \rho d\tau = -c E_y^* e ; \\ \int_{\tau} \frac{\partial \varphi''}{\partial z} \rho d\tau = -c E_z^* e ; \end{array} \right.$$

dove con $e = \int_{\tau} \rho d\tau$ si è indicata la carica totale del sistema. Sostituendo in (24) le espressioni ora ottenute si trova :

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} e E_x^* = 0 \\ e E_y^* = 0 \\ e E_z^* = -G \frac{U}{c^2} . \end{array} \right.$$

In queste formole è contenuto il nostro risultato. Esse ci dicono infatti che per mantenere in equilibrio il nostro sistema è necessario un campo esterno (E^*) il quale esercita

sul sistema una forza data (in prima approssimazione) da $e E^*$ che deve intendersi controbilanciare il peso del sistema, che vien dunque dato da $-e E^*$ ed ha perciò per componenti (25)

$$(30) \quad 0, 0, G \frac{U}{c^2}.$$

Giungiamo con questo alla conclusione che *il peso di una massa elettromagnetica ha sempre la direzione della verticale e grandezza eguale al peso di una massa materiale* $\frac{U}{c^2}$.

§ 7. — Nel § precedente abbiamo preso per $\delta x \delta y \delta z$ le componenti di uno spostamento traslatorio. Se invece si prendono le componenti di uno spostamento rotatorio virtuale con l'asse passante per l'origine delle coordinate, si pone cioè

$$(31) \quad \delta x = qz - ry \quad ; \quad \delta y = rx - pz \quad ; \quad \delta z = py - qx$$

l'integrale (9), a prescindere dalla parte dovuta al campo esterno φ'' diventa:

$$(32) \quad \int d\tau \left\{ p \int_{\tau} \rho \left(y \frac{\partial \varphi}{\partial z} - z \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) d\tau + q \int_{\tau} \rho \left(z \frac{\partial \varphi}{\partial x} - x \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) d\tau + \right. \\ \left. + r \int_{\tau} \rho \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) d\tau \right\}.$$

Gli integrali tra parentesi si calcolano facilmente in base a (13) con artifici simili a quelli usati nel § precedente. Essi hanno i valori

$$(33) \quad -\frac{G}{8\pi c} \iint \frac{y_r}{r} \rho_r \rho_x d\tau_r d\tau_x; +\frac{G}{8\pi c} \iint \frac{x_r}{r} \rho_r \rho_x d\tau_r d\tau_x; 0.$$

E prendendo per origine il punto $0'$ definito dal punto 0 e dal vettore

$$0' - 0 = \frac{1}{2U} \iint \frac{P - 0}{r} \rho_r \rho_x d\tau_r d\tau_x,$$

si riconosce subito che i tre integrali si annullano *qualunque* sia l'orientazione del sistema attorno ad O' . Segue di qui che rispetto alla nuova origine è nullo identicamente l'integrale (9), cioè è nullo il momento del peso rispetto ad O' qualunque sia l'orientazione del sistema, O' gode dunque delle proprietà di centro di gravità.

Pisa, Marzo 1921.